

19.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ 2 РОДА

Пусть кривая AB задана параметрически:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

где

$$\alpha \leq t \leq \beta$$

и функции

$$\varphi(t) \quad \text{и} \quad \psi(t)$$

непрерывны вместе со своими производными.

Пусть также при изменении параметра t от α к β ,
кривая описывается от точки A к B .

Тогда криволинейный интеграл существует и

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$$

Для интеграла общего вида:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))dt$$

Если, например, интеграл берется по кривой,
заданной уравнением

$$y = y(x)$$

$$a \leq x \leq b$$

То

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx$$

Если

$$x = x(y)$$

$$c \leq y \leq d$$

То

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_c^d f(y, x(y)) dy$$

ПРИМЕРЫ.

1

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 - y^2) dx$$

где L - отрезок параболы $y=x^2$, заключенный между точками $x=0$ и $x=2$.

Решение.

$$\int_L (x^2 - y^2) dx = \int_0^2 (x^2 - x^4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = -\frac{56}{15}$$

2

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$$

где L- полуокружность

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

Решение.

$$\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2} =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{a^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin^2 t) - a^2 \cos^2 t \cdot a \cos t}{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt =$$
$$= -a \int_0^{\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin^3 t = \frac{1}{4} (3 \sin t - \sin 3t) \\ \cos^3 t = \frac{1}{4} (3 \cos t + \cos 3t) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{a}{4} \int_0^{\pi} (3 \sin t - \sin 3t + 3 \cos t + \cos 3t) dt =$$

$$= -\frac{a}{4} \left(-3 \cos t + \frac{1}{3} \cos 3t + 3 \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{5}{3} a$$