

# Построение графиков

## Общая схема построения

1. Область определения и множество значений.
2. Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.
3. Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат).
4. Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.
5. Асимптоты графика.
6. Промежутки монотонности и точки экстремума.
7. Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).
8. Специфические особенности графика.

Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

1. Область определения и множество значений.

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in$

Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

2. Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in$

2.  $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бесконечный разрыв)

Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

3. Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат).

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in$

2.  $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бескон. разрыв).

3. Непериодическая функция общего вида.

Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

4. Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty), y \in$

2.  $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бескон. разрыв).

3. Непериодическая функция общего вида.

4.  $y > 0$  при  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\infty, -1)$ .

Пересечение с  $Oy$  и сопряженности 3-го порядка с  $Ox$ :  $(0, 0)$ .

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}, g(x) \equiv 0 \text{ (ось } Ox), x_0 = 0, f(x) - g(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+1)^3} = 0, \text{ т.е. есть 3-й порядок сопряженности.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)^3} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{нет 4-го порядка}$$

$$(f(x) - g(x) = \bar{o}((x-x_0)^3)), \text{ но } f(x) - g(x) \text{ не есть } \bar{o}((x-x_0)^4))$$

Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

## 5. Асимптоты графика.

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in$

2.  $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бесконечный разрыв).

3. Непрерывная функция общего вида.

4.  $y > 0$  при  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\infty, -1)$ .

Пересечение с  $Oy$  и сопряженное 3-го порядка с  $Ox$ :  $(0; 0)$ .

5.  $x = -1$  ( $x+1=0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow -1 \pm 0$

$y = x - 3$  ( $x - y - 3 = 0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$

$$k_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{x})^3} = 1; \quad b_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^4}{(x+1)^3} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x(x+1)^3}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 - 3x^2 - x}{(x+1)^3} = -3$$

Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

## 6. Промежутки монотонности и точки экстремума.

- $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, -\frac{256}{27}] \cup [0, +\infty)$
- $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бесконечный разрыв).
- Непрерывная функция общего вида.
- $y > 0$  при  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\infty, -1)$ .  
 Пересечение с  $Oy$  и соприкосновение 3-го порядка с  $Ox$ :  $(0, 0)$ .
- $x = -1$  ( $x+1=0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow -1 \pm 0$   
 $y = x - 3$  ( $x - y - 3 = 0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$
- $y' = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$ ;  $y$  возрастает по  $x$  при  $x \in (-\infty, -4)$  и при  $x \in (0, +\infty)$   
 $y$  убывает по  $x$  при  $x \in (-4, -1)$  и при  $x \in (-1, 0)$ . Точка минимума:  
 $(0, 0)$ , точка максимума:  $(-4, -\frac{256}{27})$

Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

7. Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, -\frac{256}{27}] \cup [0, +\infty)$

2.  $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бесконечный разрыв).

3. Непериодическая функция общего вида.

4.  $y > 0$  при  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\infty, -1)$ .

Пересечение с  $Oy$  и сопряженное 3-го порядка с  $Ox$ :  $(0, 0)$ .

5.  $x = -1$  ( $x+1=0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow -1 \pm 0$

$y = x - 3$  ( $x - y - 3 = 0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$

6.  $y' = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$ ;  $y$  возрастает по  $x$  при  $x \in (-\infty, -4)$  и при  $x \in (0, +\infty)$   
 $y$  убывает по  $x$  при  $x \in (-4, -1)$  и при  $x \in (-1, 0)$ . Точки минимума:  $(0, 0)$ , точка максимума:  $(-4, -\frac{256}{27})$

7.  $y'' = \frac{12x^2}{(x+1)^5}$ ; выпуклость вверх при  $x \in (-\infty, -1)$ , выпуклость вниз при  $x \in (-1, +\infty)$ . Точек перегиба нет.



Пример.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

8. Специфические особенности графика.

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, -\frac{256}{27}] \cup [0, +\infty)$
2.  $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бесконечный разрыв).
3. Непериодическая функция общего вида.
4.  $y > 0$  при  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\infty, -1)$ .  
Пересечение с  $Oy$  и сопряженное 3-го порядка с  $Ox$ :  $(0; 0)$ .
5.  $x = -1$  ( $x+1=0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow -1 \pm 0$   
 $y = x - 3$  ( $x - y - 3 = 0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$
6.  $y' = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$ ;  $y$  возрастает по  $x$  при  $x \in (-\infty, -4)$  и при  $x \in (0, +\infty)$   
 $y$  убывает по  $x$  при  $x \in (-4, -1)$  и при  $x \in (-1, 0)$ . Точка минимума:  $(0; 0)$ , точка максимума:  $(-4; -\frac{256}{27})$
7.  $y'' = \frac{12x^2}{(x+1)^5}$ ; выпуклость вверх при  $x \in (-\infty, -1)$ , выпуклость вниз при  $x \in (-1, +\infty)$ . Точек перегиба нет.
8.  $y''|_{x=0} = 0$

# Построение графиков

## Общая схема построения

1. Область определения и множество значений.
2. Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.
3. Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат).
4. Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.
5. Асимптоты графика.
6. Промежутки монотонности и точки экстремума.
7. Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).
8. Специфические особенности графика.

1.  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, -\frac{256}{27}] \cup [0, +\infty)$
2.  $y(x)$  непрерывна при  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$ .  $x = -1$  - т. разрыва 2-го рода (бескон. разрыв).
3. Неприведённая функция общего вида.
4.  $y > 0$  при  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\infty, -1)$ .  
Пересечение с  $Oy$  и соприкосновение 3-го порядка с  $Ox$ :  $(0, 0)$ .
5.  $x = -1$  ( $x+1=0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow -1 \pm 0$   
 $y = x - 3$  ( $x - y - 3 = 0$ ) - асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$
6.  $y' = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$ ;  $y$  возрастает по  $x$  при  $x \in (-\infty, -4)$  и при  $x \in (0, +\infty)$   
 $y$  убывает по  $x$  при  $x \in (-4, -1)$  и при  $x \in (-1, 0)$ . Точка минимума:  $(-4, 0)$ , точка максимума:  $(-4, -\frac{256}{27})$
7.  $y'' = \frac{12x^2}{(x+1)^5}$ ; выпуклость вверх при  $x \in (-\infty, -1)$ , выпуклость вниз при  $x \in (-1, +\infty)$ . Точка перегиба нет.
8.  $y''|_{x=0} = 0$

Пример:  $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$

