

# Семинар 6. Первый и второй замечательные пределы и способы их вычисления

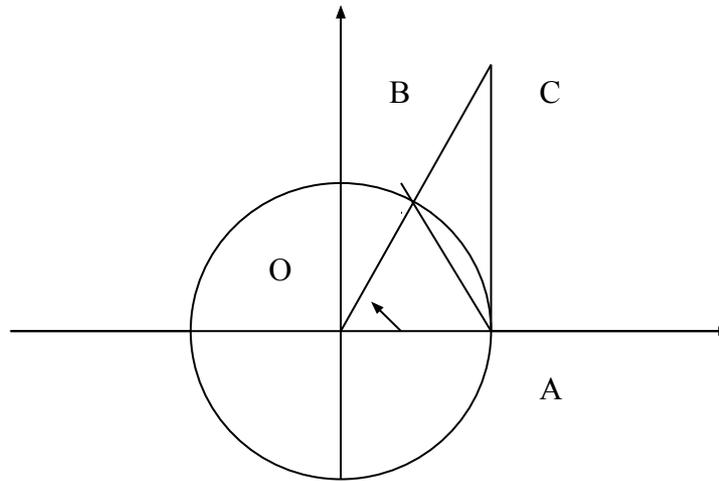
## Первый замечательный предел

(предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге)

**Теорема** Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной

в радианах, равен единице, то есть  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (1)

Доказательство



Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса  $R$  с центром в начале координат  $OA = R, \angle AOB = x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, AC \perp OA$

$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект.} AOB} < S_{\triangle AOC}$ , то есть  $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$  или  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ .

В силу четности функций  $\frac{x}{\sin x}$  и  $\frac{1}{\cos x}$  это неравенство справедливо и для интервала

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . Перейдя в этом неравенстве к пределу при  $x \rightarrow 0$  и заметив, что в силу непрерывности функции  $\cos x$  при  $x=0$  имеет место равенство  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  получим  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ , что равносильно  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

### Второй замечательный предел

Рассмотрим выражение  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , где  $n$  – натуральное число.

Задаем для  $n$  неограниченно возрастающие значения и вычисляем  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Получим следующий результат

n	1	2	10	100	1000	10000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718

Как видно из таблицы при увеличении  $n$  выражение  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  изменяется все медленнее и стремится к некоторому пределу, приближенно равному 2,718.

### Теорема

Последовательность  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  стремится к конечному пределу, заключенному между 2 и 3.

(Доказательство на основании разложения по биному Ньютона). Этот предел называется числом  $e$ . Итак

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284\dots$$

Рассмотрим функцию  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  где  $(x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty))$ . Можно доказать, что

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Другое выражение для числа  $e$ . Полагая  $\frac{1}{x} = \alpha$  ( $\alpha > -1$ ) будем иметь  $e = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\frac{1}{\alpha}$

При вычислении пределом полезно применять следующие формулы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Данные формулы легко получаются из двух основных формул.

## Примеры с решениями

**1. Найти**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x}$

Решение. Используя первый замечательный предел, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \cdot \sin mx}{mx} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = m$$

**2. Найти**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$

Решение. Имеем  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(5x/2)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(5x/2)}{x} \right)^2 = 2 \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 = 25/2$

**3. Найти**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$

Решение. Имеем  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x \cdot \sin 2x}{x \cdot x} = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$

**4. Найти**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

Решение. Сделаем замену  $t = \arcsin x \Rightarrow x = \sin t \Rightarrow t \rightarrow 0$ . Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

**5. Найти**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное, то есть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{4}$$

**6. Найти**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x$

Решение. Преобразуем выражение в скобках и выделим второй замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + 1/x} \right)^x = \frac{1}{e}$$

**7. Найти**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

Решение. Преобразуем выражение в скобках и выделим второй замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-1/x}{1+3/x} \right)^x \cdot \left( \frac{1-1/x}{1+3/x} \right)^2 = \frac{e^{-1}}{e^3} \cdot \frac{1}{1} = e^{-4}$$

**8. Найти**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x$

Решение. Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть, а именно

$$\left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7}\right) = 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}$$

Таким образом, при  $x \rightarrow \infty$  данная функция представляет

собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель к бесконечности (неопределенность вида  $1^\infty$ ). Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^{\frac{x(8x-3)}{8x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^{\frac{x(8x-3)}{8x-3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^{\frac{x(8x-3)}{8x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^{\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}}$$

Так как  $\frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^{\frac{x(8x-3)}{8x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^{\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}}$$

Принимая во внимание, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2} = 8$

окончательно получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7}\right)^x = e^8$$

**9. Найти**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Решение. Сделав замену  $e^x - 1 = z, \Rightarrow x = \ln(1 + z), \Rightarrow z \rightarrow 0$ , получим второй замечательный предел, а именно

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(1 + z)} = 1$$

## Примеры для самостоятельного решения.

Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(mx)}{\sin(nx)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^x$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$