Основы функционального анализа

Глава 2. Линейные нормированные пространства

Основной источник :

В.В. Смагин. Линейные нормированные пространства. Учебное пособие

Пространства со скалярным произведением

Задачи

№ 8.10. $\forall M \subset H$ — псп.

Доказать: $M \subset (M^\perp)^\perp$.

Док-во. Пусть $x \in M$.

Тогда $\forall y \in M^\perp$ $(x, y) = 0 \Rightarrow x \perp M^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (M^\perp)^\perp$. ч.т.д.

№ 8.11. $\forall M \subset H$ — ПСП.

Доказать: $M^{\perp}$ — подпр-во пр-ва H.

Док-во. 1) Покажем, что $M^{\perp}$ — ЛМ в H.

а) $\forall x, y \in M^{\perp}$. Для $\forall z \in M$ $(x+y, z) =$
$= (x, z) + (y, z) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in M^{\perp}$

б) $\forall x \in M^{\perp}$, $\forall$ число λ. Для $\forall z \in M$
$(\lambda x, z) = \lambda \cdot (x, z) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in M^{\perp}$

Итак, $M^{\perp}$ — лин. мног-е в H.

2) <u>Док-м:</u> $M^\perp$ – замкнутое множ-во (в метрике пр-ва H $\rho(x,y) = \|x-y\|_H = (x-y, x-y)^{\frac{1}{2}}$).

Пусть $\underline{x \in \overline{M^\perp}}$. Тогда $\exists$ послед-ть $\{x_n\} \subset M^\perp$: $x_n \longrightarrow x$ (по метрике ρ).

След-но, $(\forall z \in M)(\forall n)[(x_n, z) = 0]$.

Тогда при $n \to \infty$ $0 = (x_n, z) \longrightarrow (x, z)$ (по св-ву непрер-ти скаляр. произв-я, теорема 8). След-но, $(x, z) = 0$ при $\forall z \in M$, т.е. $x \perp M \Rightarrow \underline{x \in M^\perp}$.

Итак, $\overline{M^\perp} \subset M^\perp \Rightarrow M^\perp$ – замкнуто.

$M^\perp$ – замкнутое ЛМ $\Rightarrow$ $M^\perp$ – подпр-во в H.

Глава 3. Линейные операторы

1. Определение линейного оператора

Определение . Пусть E и F – ЛНП, одновременно вещественные или комплексные. Оператор $y = A(x)$, определенный на пространстве E и принимающий значения в пространстве F, называется *линейным*, если этот оператор:

аддитивен, т. е. для всех x_1 и x_2 из E

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2); \tag{1}$$

однороден, т. е. для всех $x \in E$ и любых вещественных (если E вещественно) или комплексных (если E комплексно) чисел λ

$$A(\lambda x) = \lambda A(x). \tag{2}$$

Вместо $A(x)$ будем писать также Ax.

Обозначение : $A : E \to F$ (A действует из E в F).

Примеры

① Оператор $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; A задан матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad Ax = \mathcal{A}x = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk} x_k \end{pmatrix},$$

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Оператор A является линейным в силу соответствующих свойств операции умножения матрицы на столбец.

② $A: C^1[a,b] \to C[a,b]$; $Ax = \dot{x}$ (оператор A переводит всякую функцию $x \in C^1[a,b]$ в её производную $\dot{x}(t)$);

$A \overset{\text{обозн.}}{=} \dfrac{d}{dt}$. Нетрудно проверить выполнение свойств аддитивности и однородности оператора $\dfrac{d}{dt}$.

2. Линейные ограниченные операторы

Пусть E, F — линейные нормированные пространства, одновременно вещественные или комплексные.

Определение

Линейный оператор $A : E \to F$ называется *ограниченным*, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall\, x \in E)[\, \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E].$$

Пример. $A = \dfrac{d}{dt} : C^1[a,b] \to C[a,b]$ — оператор дифференцирования.

$$\|Ax\|_F = \|\dot{x}\|_F = \max_{a\le t\le b} |\dot{x}(t)| \le \max_{a\le t\le b} |x(t)| + \max_{a\le t\le b} |\dot{x}(t)| = \|x\|_E,$$

след-но, A — огранич. оператор (здесь $C = 1$).

Теорема 2.1. *Пусть E, F — линейные нормированные пространства и $A : E \to F$ — линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора A равносильны :*

а) A ограничен;

б) A переводит единичный шар в ограниченное множество;

в) A переводит любое ограниченное множество в ограниченное множество;

г) A непрерывен на E;

д) A непрерывен в нуле.

Доказ-во. а) $\xrightarrow{?}$ б)

Дано: A – ограничен

Док-ть: A переводит единич. шар в огран. мн-во.

Пусть $M = B(\theta, 1) = \{x \in E \,/\, \|x\|_E < 1\}$ – открытый шар единичного радиуса в пр-ве E (с центром в т. θ).

A – ограничен, т.е. $(\exists C > 0)(\forall x \in E)\left[\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\forall x \in M)\left[\|Ax\| \leq C \cdot \underbrace{\|x\|}_{<1} < C\right] \Rightarrow (\forall x \in M)\left[Ax \in B(\theta, C)\right]$$

$$\Rightarrow A(M) \subset \underbrace{B(\theta, C)}_{\text{открытый шар в } F \text{ радиуса } C} \Rightarrow A(M) \text{ – ограниченное множ-во}$$

($A(M)$ – образ мн-ва M: $A(M) = \{y = Ax \,/\, x \in M\}$).

б) $\xrightarrow{?}$ в) **Дано:** A переводит единич. шар в огран. мн-во
Док-ть: A переводит $\forall$ огранич. мн-во в огранич-е.

Рассм-м произвольное ограниченное мн-во M в E.
Ограниченность мн-ва M означает, что $(\exists R>0)(\forall x\in M)[\|x\|_E<R]$,
т.е. $M\subset \underbrace{B(\theta,R)}_{\text{открытый шар рад. } R \text{ с центром в } \theta.}$. Докажем ограниченность образа $A(M)$ в пр-ве F.

Рассмотрим множество $N=\frac{1}{R}M=\{\frac{1}{R}x \mid x\in M\}\subset E$; тогда
$(\forall y\in N)\left[\|y\|_E=\frac{1}{R}\|x\|_E<\frac{R}{R}=1\right] \Rightarrow N\subset B(\theta,1)$.
Оператор A переводит единич. шар $B(\theta,1)$ в некот. огран. мн-во
$P\subset B(\theta,K)$, где K — некоторая константа (радиус шара) $\Rightarrow$
$\Rightarrow A(N)\subset A(B(\theta,1))=P\subset B(\theta,K) \Rightarrow (\forall x\in M)\left[\|A(\frac{x}{R})\|_F<K\right]\Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall x\in M)[\|Ax\|<R\cdot K] \Rightarrow A(M)\subset B(\theta,R\cdot K) \Rightarrow A(M)$ — огран. мн-во.

в) $\xrightarrow{?}$ а)   Дано: A переводит $\forall$ огран. мн-во в огран-е

Д-ть: A – ЛОО

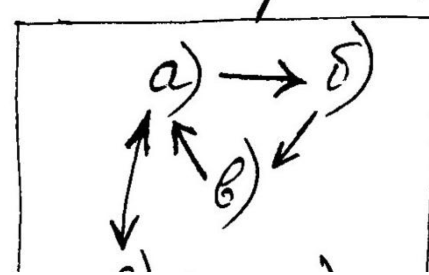
П: A – не огран., т.е. $(\forall C>0)(\exists x_C\in E)\left[\|Ax_C\|_F > C\cdot\|x\|_E\right]$.

Тогда $(\forall n\in \mathbb{N})(\exists x_n)\left[\|Ax_n\| > n\cdot\|x_n\|\right]$ (*)

Рассм-м множ-во $M=\left\{y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}\subset E$; $\|y_n\|=1\ \forall n$, т.е. M – огранич. мн-во.

След-но, $(\exists R>0)(\forall n)\left[Ay_n\subset B(\theta,R)\right]$ (по опред-ю огранич. мн-ва).

Тогда $(\forall n)\left[\|Ay_n\|=\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|}<R\right]$, т.е. $(\forall n)\left[\|Ax_n\|<R\cdot\|x_n\|\right]$, что противоречит (*). След-но, предположение о неограниченности оп-ра A неверно $\Rightarrow$ A – ЛОО.



г) $\to$ д) – очевидно.

ности оп-ра A неверно $\Rightarrow$ A – ЛОО.

$$
\begin{tikzcd}
\text{а)} \arrow[rr] \arrow[dd, leftrightarrow] & & \text{б)} \arrow[dl] \\
& \text{в)} \arrow[ul] & \\
\text{д)} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{г)}
\end{tikzcd}
$$

г) $\longrightarrow$ д) – очевидно.

д) $\xrightarrow{?}$ г) **Дано:** A – непр. в т. θ_E

Док-ть: $(\forall a \in E)\left[(x_n \to a) \Rightarrow (Ax_n \to Aa)\right]$

(непрер-сть по Гейне)

Расс-м $\forall a \in E$ и $\forall \{x_n\} \subset E$, сходящ-ся к a.

Тогда послед-сть $\{y_n = x_n - a\}$ сход-ся к элем-ту $a - a = \theta_E$, след-но, $Ax_n - Aa = A(x_n - a) \to A\theta_E = \theta_F \Rightarrow Ax_n \to Aa$ (при $n \to \infty$).

(Заметим, что ЛО всегда переводит нулевой эл-т в нулевой:
$A(\theta_E) = A(0 \cdot \theta_E) = 0 \cdot A(\theta_E) = \theta_F$).

а) $\xrightarrow{?}$ д) **Дано:** A – огран. **Д-ть:** A – непр. в θ_E.

Т.к. A – огран, то $(\forall x \in E)\left[\|Ax\| \le C \cdot \|x\|\right]$. Пусть $x_n \to \theta_E$, тогда $\|Ax_n\| \le C \cdot \|x_n\| \to C \cdot \|\theta_E\| = 0 \Rightarrow \|Ax_n\| \to 0 \Rightarrow Ax_n \to \theta_F$.

$д) \xrightarrow{?} а)$ Дано: A — непр. в т. Θ_E. Док-ть: A — ограничен.

П: A — не ограничен, т.е. $(\forall n)(\exists x_n \in E)\left[\|Ax_n\| > n \cdot \|x_n\|\right]$.

Т.о., имеем последовательность $\{x_n\} \subset E$: $\dfrac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} > n \; (\forall n)$.

Рассм-м послед-ть $\left\{ z_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|} \right\} \subset E$; $\|z_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$, т.е.

$z_n \to \Theta_E$ (при $n \to \infty$). След-но, $Az_n \to A(\Theta_E) = \Theta_F$.

Но $\|Az_n\| = \dfrac{\|Ax_n\|}{n \cdot \|x_n\|} > \dfrac{n}{n} = 1 \; (\forall n)$.

Получили противоречие $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ предположение неверно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ A — ограничен.

Теорема доказана.