РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

Определение 1

Метод Крамера предназначен для того, чтобы решать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которых число неизвестных переменных равняется числу уравнений, а определитель основной матрицы не равен нулю.

Метод Крамера — вывод формул

Пример 1

Найти решение системы линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

В этой системе $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ - неизвестные переменные,

$a_{ij},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ - числовые коэффициенты,

$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ - свободные члены.

Решение такой системы линейных алгебраических уравнений — ***набор значений*** $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$***, при которых все уравнения системы становятся тождественными***.

Матричный вид записи такой системы линейных уравнений:

$AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — основная матрица системы, в которой ее элементы — это коэффициенты при неизвестных переменных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец неизвестных переменных.

После того как мы найдем неизвестные переменные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, матрица $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ становится решением системы уравнений, а равенство $AX = B$ обращается в тождество.

Алгоритм решения СЛАУ методом Крамера

- Вычислить определитель матрицы системы и убедиться, что он не равен нулю:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

➢ **Найти определители:**

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{2n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\ldots$

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n \end{vmatrix}$$

- **Вычислить неизвестные переменные при помощи формул:**

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta x}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta x}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta x}.$$

- **Выполнить проверку результатов: если все определители являются тождествами, то решение найдено верно.**

Пример 2

Найти решение неоднородной системы линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = \frac{5}{6} \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

Как решать?

Основная матрица представлена в виде $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Мы можем вычислить ее определитель по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} : \ \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - \left(-2\right) \times 2 = 9 + 4 = 13$$

Записываем определители Δ_{x_1} и Δ_{x_2}. Заменяем 1-ый столбец основной матрицы на столбец свободных членов и получаем определитель $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

По аналогии заменяем второй столбец основной матрицы на столбец свободных членов и получаем определитель:

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{6} \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Находим эти определители:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{6} \times 3 - 2\left(-2\right) = \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{6} \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - \frac{5}{6} \times 2 = 6 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

Находим неизвестные переменные по следующим формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{\frac{13}{2}}{13} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{3}{13} = \frac{1}{3}$$

Выполняем проверку — подставляем полученные значения переменных в в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Оба уравнения превращаются в тождества, поэтому решение верное.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{3}$