

Использование лайфхаков при решении задач по математике

Давайте
знакомиться...



Денисов Андрей Петрович

Учитель математики

Университетский лицей №1511
предуниверситария НИЯУ МИФИ

Люблю игры в любых проявлениях
(и с удовольствием в них играю)

спортивные

настольные

компьютерные

(да-да, я тоже человек :))

Решение квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Как вы привыкли решать квадратные уравнения?

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



$$ax^2 + bx + c = 0$$

Решим несколько квадратных уравнений при $a=1$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Разложим
+12
на целые
множители



| | |
|----|-----|
| 1 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 4 |
| -1 | -12 |
| -2 | -6 |
| -3 | -4 |



Какая пара дает в
сумме...

Внимание!

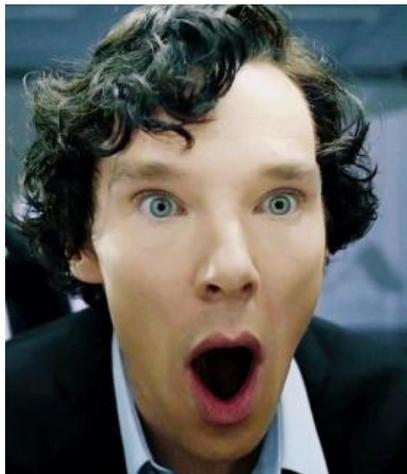
+8



Правильно: 2 и
6



Это и есть
ответ!!!



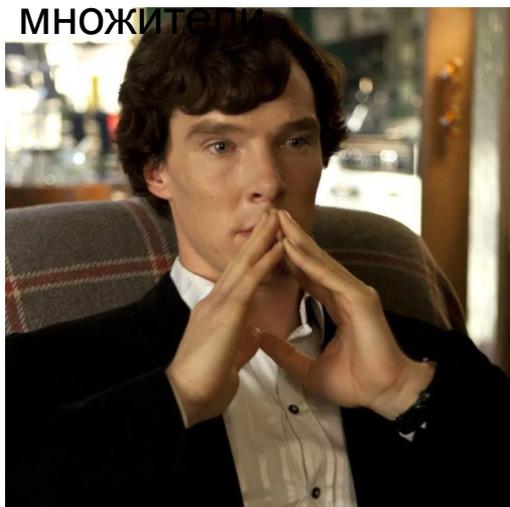
Ответ: 2;6

Попробуем еще

раз?

$$x^2 - 15x + 36 = 0$$

Разложим +36 на целые
множители



| | |
|----|-----|
| 1 | 36 |
| 2 | 18 |
| 3 | 12 |
| 4 | 9 |
| 6 | 6 |
| -1 | -36 |
| -2 | -18 |
| -3 | -12 |
| -4 | -9 |
| -6 | -6 |

Какая пара дает в сумме +15
?

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$

Отве 3; 12

т:

Еще один интересный лайфхак

$$x^2 - 73x + 72 = 0$$

Чему равна сумма всех коэффициентов уравнения?

$$1x^2 - 73x + 72 = 0$$

$$1 - 73 + 72 = 0$$

Если сумма всех коэффициентов любого уравнения (хоть 50й степени) равна нулю,

то $x=1$ является решением данного уравнения.

Что нам это дает?

$$x^2 - 73x + 72 = 0$$



$$1 \quad 72$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 72 \end{cases}$$

Мы точно знаем, что $x_1=1$

корень

А еще знаем, что $x_1 \cdot x_2 = 72$, тогда

...

Ответ: 1; 72

Усложним уравнение

$$7x^2 - 15x + 8 = 0$$

$$a \neq 1$$

Но, при этом $7 - 15 + 8 = 0$

Следовательно $x_1 = 1$ является корнем
уравнения

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{8}{7} \end{cases}$$

Ответ: $x = 1; \frac{8}{7}$

Способ, ради которого мы вообще все это затеяли :)

Удивите своих учителей!

Рассмотрим уравнение:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$a \neq 1$$

Сумма
коэффициентов
не равна 0

Все указывает на
дальнейшее решение через
дискриминант



Рассмотрим уравнение:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$D = 49 - 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{7+5}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = 49 - 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

Рассмотрим уравнение:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \longrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$\frac{1}{3} \quad \frac{6}{3}$

Последовательность действий:

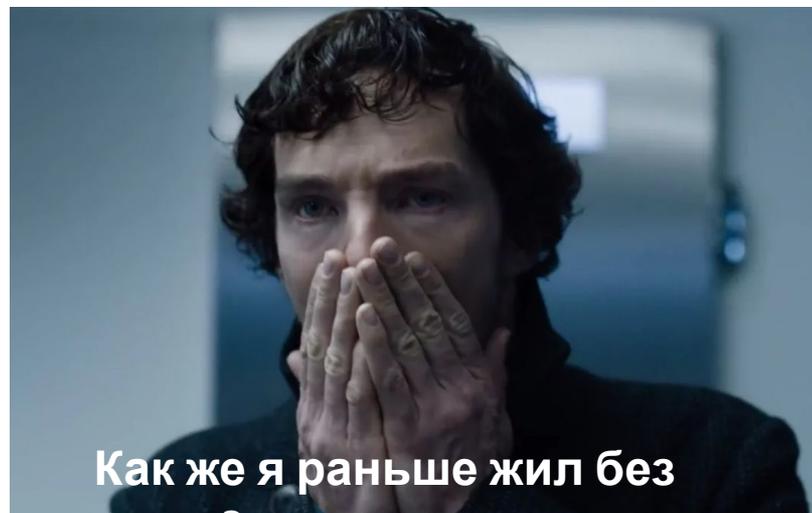
1. Добиваемся того, чтобы коэффициент перед x^2 был положительным
2. Перебрасываем его (со знаком умножить) на свободный член
3. Решаем новое уравнение, используя теорему Виета (обратную)
4. Приписываем «прыгающий» коэффициент в знаменатель найденных корней
5. Пишем ответ

Решить уравнение:

$$2x^2 - 13x + 18 = 0 \longrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$\begin{array}{cc} \frac{9}{2} & \frac{4}{2} \end{array}$

Ответ: $2; \frac{9}{2}$



И еще один интересный способ решения.

Он особенно хорош при $a=1$ и четном b и это не $D/4$

$$x^2 - 8x - 180 = 0$$

Выделим полный квадрат (забыв про 180 вообще)

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$$

Теперь вспомним про 180

$$\begin{aligned} x^2 - 8x - 180 &= (x - 4)^2 - 16 - 180 = (x - 4)^2 - 196 = \\ &= (x - 4)^2 - 14^2 = (x - 4 - 14) \cdot (x - 4 + 14) = (x - 18) \cdot (x + 10) \end{aligned}$$

$$(x - 18) \cdot (x + 10) = 0$$

$$\begin{cases} x = 18 \\ x = -10 \end{cases}$$

Ответ: 18; -10

Корни в уме подбирались, зачем тогда так сложно?

$$x^2 - 8x - 180 = 0$$

18 -10

А если вот так ?

$$x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 15 = 0$$

$$(x - 4)^2 - (\sqrt{15})^2 = 0$$

$$(x - 4 - \sqrt{15}) \cdot (x - 4 + \sqrt{15}) = 0$$

Ответ: $4 + \sqrt{15}$; $4 - \sqrt{15}$



Как быстро возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5 ?

$$25 \cdot 25 = \boxed{2 \cdot 3} \boxed{25} = 625$$

$$35 \cdot 35 = 1225$$

$$75 \cdot 75 = 5625$$

$$145 \cdot 145 = 21025$$



Как быстро умножать числа, разность которых равна 2 ?

$$11 \cdot 13 = (12 - 1) \cdot (12 + 1) = 144 - 1 = 143$$

$$24 \cdot 26 = (25 - 1) \cdot (25 + 1) = 625 - 1 = 624$$

$$17 \cdot 19 = (18 - 1) \cdot (18 + 1) = 324 - 1 = 323$$

Как быстро умножать числа, разность которых четная?

$$18 \cdot 32 = (25 - 7) \cdot (25 + 7) = 625 - 49 = 625 - 25 - 24 = 576$$



Как возводить в квадрат любые числа?

$$26 \cdot 26 = (20 + 6)^2 = 400 + 240 + 36 = 676$$

$$37 \cdot 37 = (30 + 7)^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$$

$$51 \cdot 51 = (50 + 1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$$



А вам слабо

Как извлечь квадратный корень из числа (если мы точно знаем, что он есть)

$$\sqrt{2304} = 48$$

$$(40 + 8)^2 = 1600 + 640 + 64 = 2304$$

$$\sqrt{4489} = 67$$

$$(60 + 7)^2 = 3600 + 840 + 49 = 4489$$

$$10^2 = 100$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$20^2 = 400$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$30^2 = 900$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$40^2 = 1600$$

$$4 \cdot 4 = _6$$

$$50^2 = 2500$$

$$5 \cdot 5 = _5$$

$$60^2 = 3600$$

$$7 \cdot 7 = _9$$

$$70^2 = 4900$$

$$8 \cdot 8 = _4$$

$$9 \cdot 9 = _1$$

Умножение десятичных и обыкновенных дробей

$$0,07 \cdot 0,00003 = \frac{7}{100} \cdot \frac{3}{100000} = \frac{21}{10^7} = 0,0000021$$

$$0,012 \cdot 0,0009 = \frac{12}{1000} \cdot \frac{9}{10000} = \frac{108}{10^7} = 0,0000108$$

$$\frac{12}{99} \cdot \frac{9}{40} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 9}{9 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 10} = \frac{3}{110}$$

$$\frac{42}{35} \cdot \frac{70}{21} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7} = 4$$



Найти

$$\begin{array}{ccc} & 2 \cdot 7 & \\ \text{---} & & \\ 20\% & \text{от} & 70 \end{array} \quad 14$$

$$\begin{array}{ccc} & 3 \cdot 14 & \\ \text{---} & & \\ 30\% & \text{от} & 140 \end{array} \quad 42$$

$$12\% \quad \text{от} \quad 50$$

$$50\% \quad \text{от} \quad 12 \quad 6$$

$$16\% \quad \text{от} \quad 25$$

$$25\% \quad \text{от} \quad 16 \quad 4$$



Решить уравнение

$$3x + |x + 1| = 2$$

Как учат в школе?

$$\left[\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3x + (x + 1) = 2 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq -1 \\ 4x = 1 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0,25 \end{cases} \right. \Leftrightarrow x = 0,25$$

$$\left[\begin{cases} x + 1 < 0 \\ 3x - (x + 1) = 2 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x < -1 \\ 2x = 3 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x < -1 \\ x = 1,5 \end{cases} \right. \Leftrightarrow x = 0,25$$

Как в школе не учат :) ?

$$|x + 1| = 2 - 3x$$

$$\left[\begin{cases} x + 1 = 2 - 3x \\ x + 1 = 3x - 2 \\ 2 - 3x \geq 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4x = 1 \\ 2x = 3 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 0,25 \\ x = 1,5 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \right. \Leftrightarrow x = 0,25$$