מהי לוגיקה?

- תורת היגיון
- תורת היסק מתארת טיעונים תקפים - טיעונים ששומרים על אמיתות. תקפות היא תכונה מבנית (תחבירית) של טיעונים
- תנאיי-קדם ללוגיקה: שפה בעלת תחביר וסמנטיקה.

תחביר – מבנה של ביטוים בשפה.

סמנטיקה – פשר (משמעות) של הביטויים, הקשר שבין השפה לבין מה שהיא מדברת עליו.

לוגיקה במדעי המחשב

- מחשב מחקה יכולת שכלית (היגיון)
- תוכנית מחשב – סוג של הוכחה. תורת התכנות- לוגיקה שימושית. אימות תוכנה.
- תכנות לוגי.
- בינה מלאכותית

טיעונים

- אם רכבת מאחרת וגם אין מוניות זמינות בתחנה, אז אלי מאחר לפגישה. אבל אלי לא איחר לפגישה למרות שרכבת איחרה. לכן היו מוניות זמינות בתחנה.
- אם יורד גשם ולטלי אין מטריה איתה, אז היא מצטננת. טלי לא הצטננה למרות שהיה גשם. לכן לטלי הייתה מטריה.

מבנה הטיעון:

אם p וגם לא q, אז r. לא r ו-p. לכן q.

$$r, \neg r \land p \vdash q \rightarrow (p \land \neg q)$$

תחשיב הפסוקים

נדון בפסוקיי חיווי, אשר יש להם בדיוק אחד משני ערכים: אמת (True) או שקר (False).

1. קנדה היא מדינה.
2. משה הוא כלב
3. סגור את הדלת!
4. X| = X|
5. משפט זה הוא שקר.

מפסוקים יסודיים ניתן לבנות פסוקים מורכבים בתוספת מילות חיבור כגון: ו, או, לא, וכו':

קנדה היא מדינה ומשה הוא כלב.

קשרים לוגיים

- שלילה (negation) $\neg P$: "לא P".
- קוניונקציה (conjunction, גימום) $P \wedge Q$: "P ו- Q".
- דיסיונקציה (disjunction, איווי) $P \vee Q$: "P או Q".
- אימפליקציה (implication, אימוז) $P \rightarrow Q$: "אם P אז Q".
- שקילות (equivalence) : $P \leftrightarrow Q$ "P אם ורק אם Q".

תחביר

הגדרה: נוסחא נקראת בנויה היטב (well-formed formula) אם ניתן ליצור אותה לפי החוקים הבאים:

1. כל פסוק אטומי p,q,... הוא נוסחא בנויה היטב.
2. קבוע $\perp$ הוא נוסחא בנויה היטב.
3. אם A ו- B הן נוסחאות בנויות היטב, אז גם $(\neg A)$ $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ הן נוסחאות בנויות היטב.
4. כל נוסחא בנויה היטב ניתן ליצור במספר סופי של צעדים ע"י שימוש בחוקים 1-3.

פסוקים מורכבים

דוגמא: $(p \vee q)$, $((p\neg) \vee (p \wedge q))$, $\neg\, (q \vee (p\neg))$, $(((p\neg)$

ולא $((p \wedge q))$, $(p \wedge q \wedge r)$, $p \vee)$

משפט. (קריאה יחידה) כל נוסחה שייכת בדיוק לאחד מהסוגים הבאים:

1. פסוק אטומי.
2. $(A\neg)$ עבור נוסחה אחת ויחידה A.
3. $(A \circ B)$ עבור קשר בינארי ○ אחד ויחיד ונוסחאות יחידות A ו-B. (בלי הוכחה)

אינדוקציה על נוסחאות

אם תכונה ***P*** נכונה לכל הפסוקים האטומיים, ומהנחה ש-***P*** נכונה לנוסחאות A ו-B נובע ש-***P*** נכונה ל-(¬A) ,(A↔B), (A→B), (A∨B), (A∧B),, אזי ***P*** נכונה לכל נוסחא בנויה היטב.

הסכם: אפשר להשמיט סוגריים חיצוניים וסוגריים עבור ¬. לדוגמא נרשום ¬P∧Q במקום ((¬P)∧Q)

הצרנה

- זהו מקס או שההוא מוריץ ואני ליצן: $p \lor q \land r$
- אני אגיע הביתה ואביא תותים אם לא ירד גשם.
- אם לא יובל ולא איל יעברו את הבחינה, גם חגי לא יעבור.
- לא כולם (מהשלושה) יכשלו.

סמנטיקה

פירוש או מודל הוא השמה $I: P \to \{F,T\}$ - שיוך ערכיי אמת לפסוקים אטומיים.

פשר של הקשרים – פונקציות אמת:

$$f : \{F,T\}^n \to \{F,T\}$$

לא כל הפסוקים בשפה טבעית הם פונקציות אמת:

"אני יודע ש-P", "מחר יהיה P".

P	¬P
F	T
T	F

שלילה. ¬P אמיתי אם ורק אם P שקרי.

קבוע שקר. $I(\perp)=F$

דיסיונקציה

$P \vee Q$ שיקרי כאשר גם P וגם Q שיקרי, אחרת אמיתי :

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

קוניונקציה

$P \wedge Q$ אמיתי כאשר גם P וגם Q אמיתי, אחרת שקרי:

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

שקילות

$P \leftrightarrow Q$ אמיתי כאשר ל- P ול- Q יש אותו ערך אמת, ושקרי אחרת:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

אימפליקציה

$P \rightarrow Q$ שקרי כאשר P אמיתי ו- Q שקרי, אחרת אמיתי.

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

אם 1+1=3, אז פריס היא בירת צרפת.

יחס ספיקות

הגדרה. (הרחבה של פירוש לפסוקים מורכבים)

- $I(\perp)=F$
- $I(\neg A)=T$ אם ורק אם $I(A)=F$
- $I(A\wedge B)=T$ אם ורק אם $I(A)=I(B)=T$
- $I(A\vee B)=T$ אם ורק אם $I(A)=T$ או $I(B)=T$
- $I(A\rightarrow B)=T$ אם ורק אם $I(A)=F$ או $I(B)=T$
- $I(A\leftrightarrow B)=T$ אם ורק אם $I(A)=I(B)$

פירוש I מספק A, או I הוא מודל של A, אם $I(A)=T$

עובדה. ערך האמת של פסוק מורכב היא **פונקציה** של ערכי האמת של הפסוקים אטומיים שלו (קריאה יחידה!).

בעיות ספיקות ותקפות

- נוסחה נקראת **ספיקה** (או עקבית) אם יש לה מודל.
  נוסחה לא ספיקה נקראת **סתירה**.

  בעיית ספיקות (SAT problem): האם (ומתיי)
  הנוסחה ספיקה? SAT היא בעיית NP.

- נוסחה A נקראת **תקפה**, או **טאוטולוגיה**, אם כל
  פירוש הוא מודל של A .

  בעיית תקפות: האם נוסחה A תקפה?

A היא טאוטולוגיה אם ורק אם ¬A היא לא ספיקה.

טבלאות אמת

טבלת אמת של פסוק מורכב מתארת את ערכי האמת של הפסוק עבור כל פרוש.

אם הפסוק מורכב מ- m פסוקים אטומיים, אזי יש 2^m, צרופים ובטבלת האמת שלו תהיינה 2^m שורות.

p	q	¬	p	V	q
F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T
		2	1	3	1

טאוטולוגיות וסתירות

נוסחה המקבלת ערך אמת T לכל הצבה עבור המשתנים שלה היא טאוטולוגיה.

נוסחה המקבלת ערך F לכל הצבה כזאת היא סתירה.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \to p$
F	T	F	T
T	F	F	T

ניתן להוכיח טאוטולוגיות וסתירות בשיטת השלילה.

דוגמא: $(A \vee \neg B) \to (A \to B)$

שקילות של פסוקים

שני פסוקים נקראים שקולים אם יש להם אותם מודלים. פסוקים שקולים מהבאים אותה טענה.

נסמן את השקילות ב- $\equiv$. בדוגמא: $A \vee A \equiv A$.

משפט: נוסחאות A ו- B שקולות אם ורק אם $A \leftrightarrow B$ היא טאוטולוגיה.

הוכחה נובעת מן ההגדרות [נמק].

טבלת אמת ל- $\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

p	q	$\neg($	p	$\land$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\lor$	$\neg$	$q)$
F	F	T	F	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
		3	1	2	1	4	2	1	3	2	1

תוך שימוש בשקילויות יסודיות ניתן להוכיח שקילויות חדשות בלי להשתמש בטבלאות אמת.

שקילויות יסודיות

$P \vee P \equiv P$	$P \wedge P \equiv P$
$R \equiv P \vee \vee (P \vee Q) (Q \vee R)$	$R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \wedge (P \wedge Q)$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$P \vee \bot \equiv P$	$P \wedge T \equiv P$
$P \vee T \equiv T$	$\bot \equiv \bot \wedge P$
$P \vee \neg P \equiv T$	$P \wedge \neg P \equiv F$
$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
$P \wedge \neg Q \neg \equiv (P \vee Q) \neg$	$P \vee \neg Q \neg \equiv (P \wedge Q) \neg$
$P \equiv P \neg \neg$	

שלמות פונקציונאלית

p	q	r	A
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

כל נוסחה $A(p_1,\ldots,p_n)$ מגדירה פונקציית אמת n-מקומית: לכל I,

$$g(I(p_1),\ldots,I(p_n))=I(A)$$

דוגמה.

$$(p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r)$$

משפט (שלמות פונקציונאלית). לכל פונקציה אמת קיימת נוסחה המגדירה אותה.

הוכחה. תהיה f פונקצית אמת n-מקומית. נגדיר

$$H_f=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\{F,T\}^n \ : f(a_1,\ldots,a_n)=T\}$$

לכל $x=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ נשייך נוסחה

$$A_x = \check{r}_1 \wedge \check{r}_2 \ldots \wedge \check{r}_n$$

כך ש: $\check{r}_i$ הוא r_i אם $a_i=T$, אחרת $\check{r}_i$ הוא $\neg r_i$. אז פירוש I מספק את A_x אם"ם $x=(I(r_1),\ldots,I(r_n))$ [?].

נגדיר $A_f= A_{x1} \vee A_{x2} \vee \ldots \vee A_{xk}$ עבור כל x_i מ- H_f.

אז, לכל פירוש $I(A_f)=T$, I אם"ם קיים $x \in H_f$ כך ש $x=(I(r_1),\ldots,I(r_n))$ [?], ז"א $f(I(r_1),\ldots,I(r_n))=I(A_f)$.

קבוצות שלמות של קשרים

הגדרה: קבוצה של קשרים שבאמצעותם ניתן לתאר כל פונקצית אמת נקראת קבוצה שלמה.

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \lor Q \qquad P \lor Q \equiv \neg P \rightarrow Q$$

$$P \lor Q \equiv \neg(\neg P \land \neg Q) \qquad P \land Q \equiv \neg(\neg P \lor \neg Q)$$

מסקנה. $\{\neg, \lor\}$, $\{\neg, \land\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ הן קבוצות שלמות של קשרים. [נמק]

קבוצות לא שלמות של קשרים

למה. $\{\leftrightarrow, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ היא קבוצה לא שלמה של קשרים.

הוכחה. להבדיל מ-$\neg p$, כל נוסחה הבנויה מ- $\{\leftrightarrow, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ היא אמיתית כאשר כל הפסוקים האטומיים שלה אמיתיים. [באינדוקציה על מספר הקשרים בנוסחה].

למה. $\{\leftrightarrow, \neg\}$ היא קבוצה לא שלמה של קשרים.

[להוכיח]

קבוצות קשרים שלמות

NAND – "לא ו-..." - $\uparrow$

$P\uparrow Q$ מוגדרת ע"י $P\uparrow Q \equiv \neg(P \wedge Q)$

P	Q	$P\uparrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

קל לראות ש-

$P\uparrow P \equiv \neg P$

$P \wedge Q \equiv (P\uparrow Q)\sim \equiv (P\uparrow Q) \uparrow (P\uparrow Q)$

$P \vee Q \equiv (Q\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow P)$

לכן $\{\uparrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

קבוצות קשרים שלמות

NOR – "לא או" - $\downarrow$

$P\downarrow Q$ מוגדר ע"י $P\downarrow Q \equiv \neg(P \vee Q)$

P	Q	$P \downarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

מתקיים: $P \downarrow P \equiv \neg P$

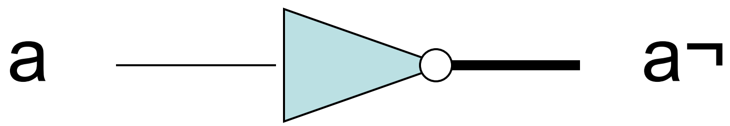
$P \vee Q \equiv (P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$

$P \wedge Q \equiv (Q\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow P)$

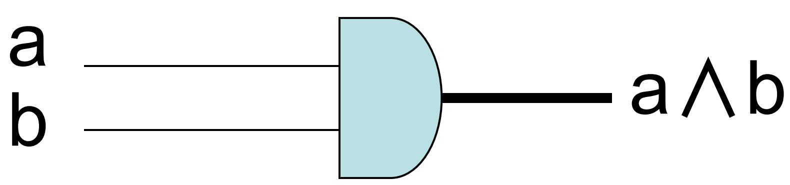
לכן $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

שערים (gates)

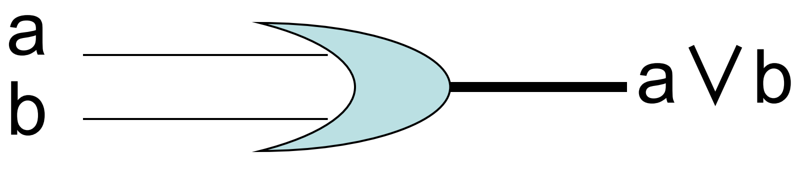
שער NOT:



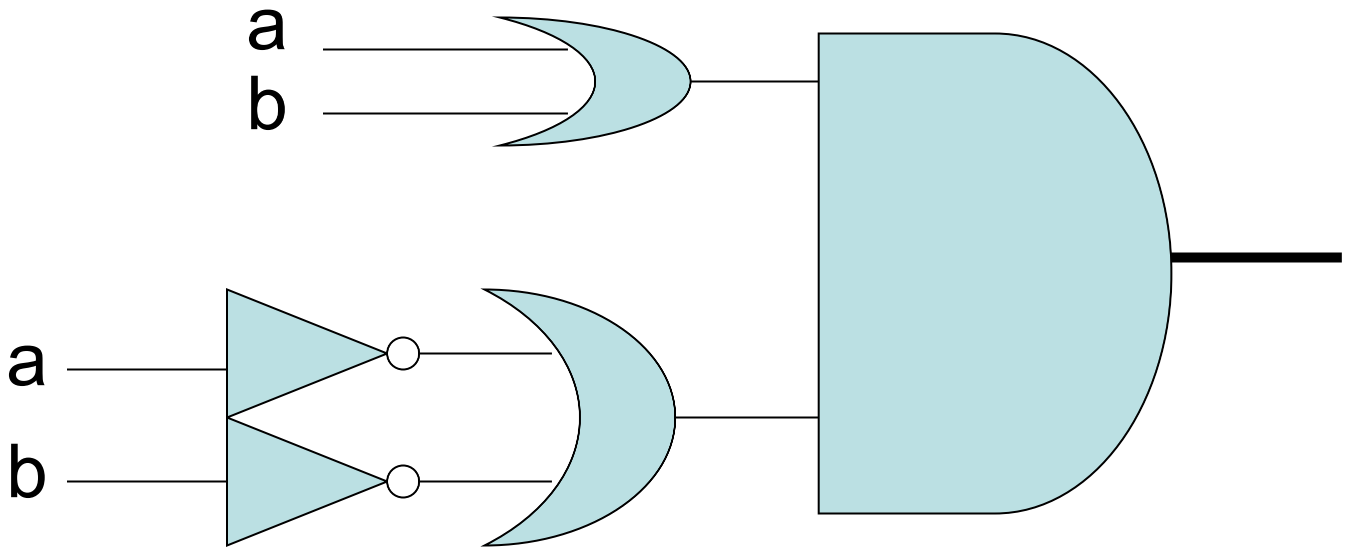
שער AND:



שער OR:

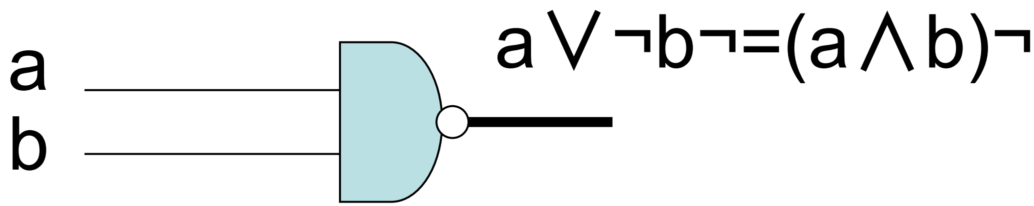


רשת לתיאור הנוסחה: $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$

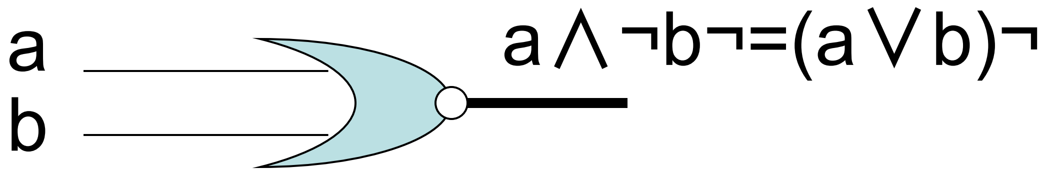


שערים נוספים

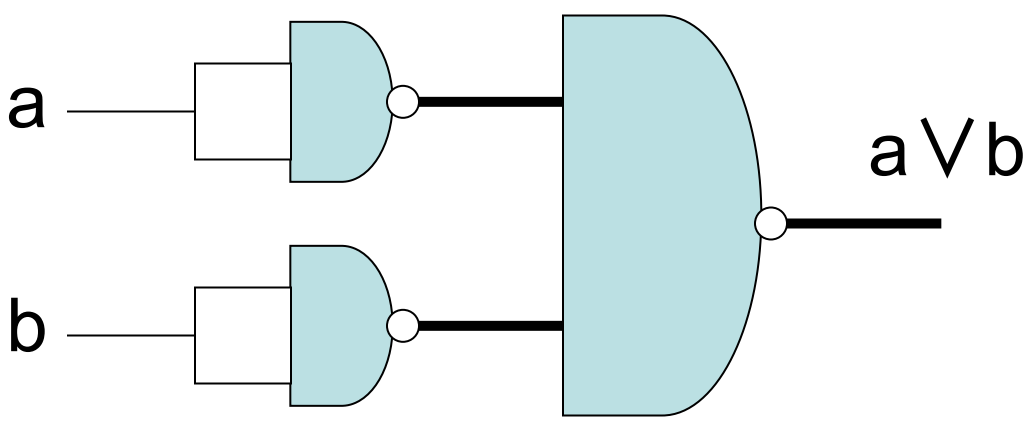
שער NAND:



שער NOR:



דוגמא:



צורות נורמאליות

אם p הוא פסוק אטומי, אז p ו-¬p הם ליטרלים.

הגדרה. נוסחה בצורה דיסיונקטיבית נורמאלית (DNF) היא דיסיונקציה של קוניונקציות של ליטרלים.

דוגמא: $(r \wedge \neg q \wedge r) \vee (r \wedge p) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg p)$

מסקנה 1. כל נוסחה שקולה לנוסחה בצורת DNF.

הוכחה. אם f היא פונקצית אמת המוגדרת ע"י נוסחה B, אז הנוסחה A_f שבנינו בהוכחת משפת שלמות פונקציונאלי שקולה ל-B , והיא בצורת DNF.

דואליות

הגדרה: תהי A נוסחה שמכילה T , ⊥ , ∧ , ∨ , ו- ¬ בלבד.

נוסחה דואלית ל- A מתקבלת ממנה בהחלפת כל ∧ ב- ∨ וכל ∨ ב- ∧ , כל T ב- ⊥ וכל ⊥ ב-T

נוסחה	נוסחה דואלית
$R\wedge(P\vee Q)$	$R\vee(P\wedge Q)$
$\neg(P\vee Q)\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg S))$	$\neg(P\wedge Q)\vee(P\wedge(\neg Q\vee\neg S))$

למת עזר. השלילה של נוסחה שקולה לנוסחה דואלית שבה כל משתנה מוחלף בשלילה שלו. [למה?]

דוגמא: $\neg(R\wedge(P\vee Q)) \equiv \neg(P\vee Q)\vee\neg R \equiv (\neg P\wedge\neg Q)\vee\neg R$

צורות נורמליות - המשך

פסוקית (clause) היא דיסיונקציה של ליטרלים:

$r \vee \neg q \vee \neg p$

הגדרה. נוסחה בצורה קוניונקטיבית נורמאלית (CNF) היא קוניונקציה של פסוקיות.

דוגמא: $(r \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (r \vee p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

מסקנה 2. כל נוסחה שקולה לנוסחה בצורת CNF.

הוכחה. נניח ש- f היא פונקציית אמת המוגדרת ע"י נוסחה $\neg B$, ו- A_f היא הנוסחה המקבילה ב- DNF. אז $\neg A_f$ שקולה ל-B, וניתן להפוך $\neg A_f$ לנוסחה דואלית בצורת CNF[?].

CNF

p	q	A	
F	F	F	$p \vee q$
F	T	T	
T	F	T	
T	T	F	$\neg p \vee \neg q$

$$A \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

כל פסוקית מתאים לשורה עם ערך F בטבלת אמת.

לכל משתנה p אנו רושמים p אם ערכו F ו- ¬p אם ערכו T בשורה זו.

אלגוריתמים לבניית DNF ו-CNF

- סילוק $\rightarrow$ ו- ;$\leftrightarrow$
- הכנסת שלילה פנימה (צורת NNF)
- פריסה של $\vee$ או $\wedge$.

דוגמה.

$$s \rightarrow ((q \wedge r)\neg\vee (p \wedge q))$$

$$s \vee ((q \wedge r)\neg\vee (p \wedge q))\neg$$

$$s \vee ((q \wedge r)\wedge (p \wedge q)\neg)$$

$$s \vee ((q \wedge r)\wedge (p \vee \neg q\neg))$$

$$(s \vee (q \wedge r))\wedge (p \vee \neg q \vee s\neg)$$

$$(r \vee s) \wedge (q \vee s)\wedge (p \vee \neg q \vee s\neg)$$

פסוקיות הורן

פסוקית הורן (Horn clause) היא פסוקית שמכילה לא יותר מליטרל חיובי אחד.

$$p \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_n \quad (\equiv (q_1 \wedge \ldots q_n) \rightarrow p)$$

$$q_1 \vee \ldots \vee \neg q_n \quad (\equiv (q_1 \wedge \ldots q_n) \rightarrow \bot)\neg$$

$$p \quad (\equiv T \rightarrow p)$$

נוסחת הורן היא קוניונקציה של פסוקיות הורן.

אלגוריתם הכרעה לנוסחאות הורן

אלגוריתם HORN להכרעת ספיקות:

נסמן אטומים בנוסחת הורן לפי כללים הבאים:

1. נסמן T אם הוא קיים בנוסחה.
2. אם יש פסוקית $P \rightarrow (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n)$ בנוסחה כך שכל Q_i בו מסומן, נסמן גם P ונחזור ל-2, אחרת נעבור ל-3.
3. הנוסחה היא ספיקה אם ורק אם $\perp$ לא מסומן.

משפט. אלגוריתם HORN מכריע בעיית ספיקות לנוסחאות הורן.

הוכחה. אם בנוסחת הורן A יש n אטומים, האלגוריתם מסיים בלא יותר מ-(n+1) צעדים. נוכיח:

כל P מסומן הוא אמיתי בכל מודל של A באינדוקציה על מספר הצעדים של האלגוריתם. *בסיס* (צעד 1): T אמיתי בכל מודל.

אם בפסוקית $P \rightarrow (Q_1 \wedge \ldots Q_n)$ כל Q_i מסומן, אז גם הפסוקית וגם כל Q_i (בהנחת אינדוקציה) חייבים להיות אמיתיים בכל מודל של A. לכן גם P חייב להיות אמיתי בכל מודל של A[?].

(א) אם $\perp$ מסומן, A לא ספיקה, כי $\perp$ לא יכול להיות אמיתי.

(ב) אם $\perp$ לא מסומן, נגדיר פירוש I שבו האטומים המסומנים, ורק הם, אמיתיים. נניח ש-I הוא לא מודל של A. אז קיימת פסוקית $P \rightarrow (Q_1 \wedge \ldots Q_n)$ של A שהיא שקרית ב-I. אבל זה אפשרי רק כאשר כל Q_i אמיתי (מסומן) ו-P שקרי (לא מסומן) – סתירה[?]. לכן I הוא מודל של A ומכאן A ספיקה.