Лекция 3.

Закон сохранения момента импульса

Вопросы:

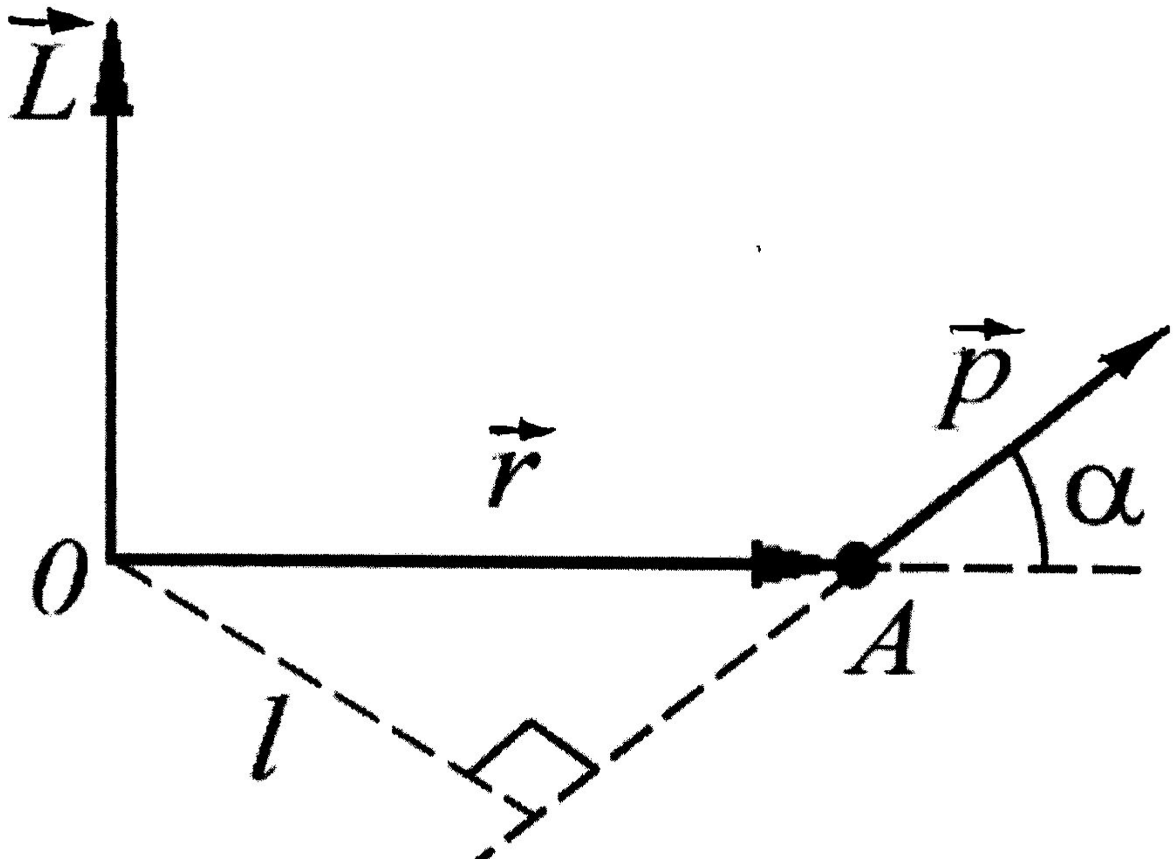
- Закон сохранения момента импульса системы частиц
- Система центра масс
- Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси
- Плоское движение твердого тела

Закон сохранения момента импульса системы частиц

- Трехмерность пространства обуславливает еще один закон сохранения, связанный с изотропностью пространства.
- Этот закон называется законом сохранения момента импульса системы частиц.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

Определение момента импульса частицы *A* относительно точки *O*.



Закон сохранения момента импульса системы частиц

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Моментом импульса частицы *A* относительно точки *O* (см. рис) называют вектор , равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$

Закон сохранения момента импульса системы частиц

$\vec{L}$ - это аксиальный вектор. Вектор $\vec{r}$,

вектора $\vec{p}$ и $\vec{L}$ образуют правую тройку

векторов. Модуль вектора L равен

$$L=r*p*sin\ a,$$

где a - угол между векторами и $l=r*sin\ a$ - плечо вектора относительно точки O (см. рис.).

Единицей измерения момента импульса в системе СИ служит $кг \cdot м^2/с$, специального наименования эта единица не имеет.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

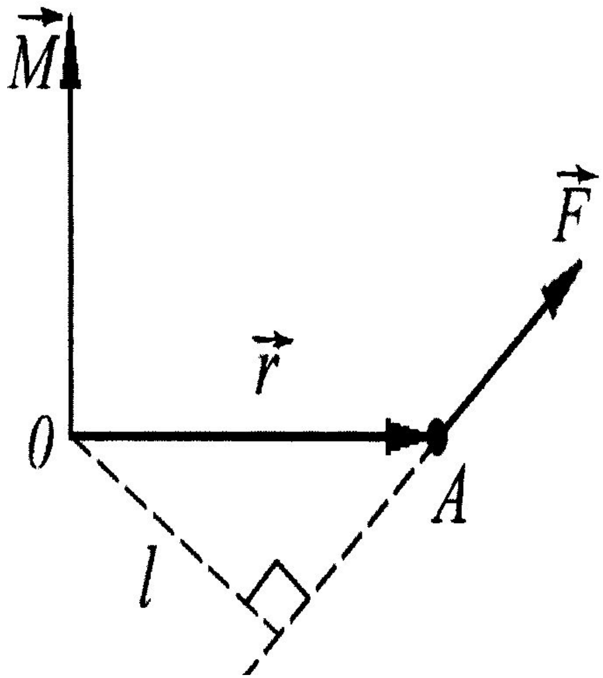
Уравнение, описывающее изменение вектора $\vec{L}$ называется *уравнением моментов*. Для вывода продифференцируем $\vec{L}$ по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Так как точка O неподвижна, то вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ равен скорости $\vec{v}$ частицы, т.е. Совпадает по направлению с вектором импульса, поэтому получаем

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] = 0.$$

Закон сохранения
момента импульса системы частиц

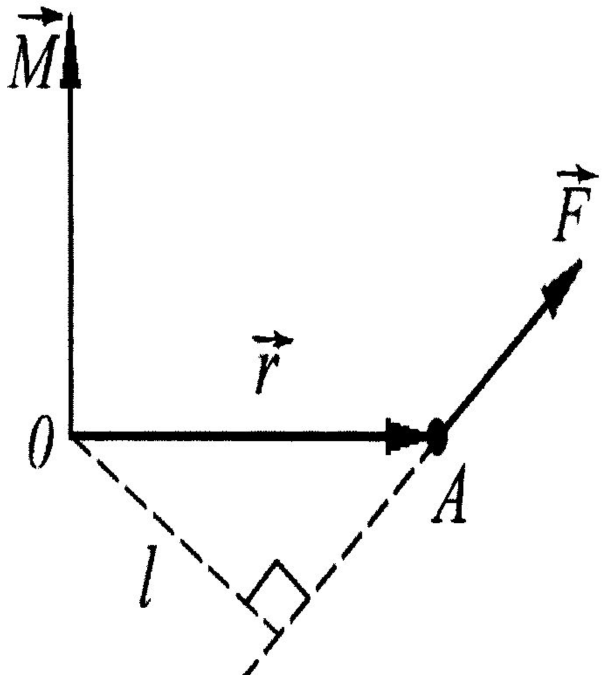


- По 2 закону Ньютона $d\vec{p}/dt = \vec{F}$
- где $\vec{F}$ векторная сумма всех сил, приложенных к частице. Следовательно, $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$
- Величину, стоящую в правой части, называют *моментом силы* относительно точки *O* (см. рис.).
- Обозначив ее буквой $\vec{M}$, запишем

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Вектор $\vec{M}$ является аксиальным. Модуль
- вектора *M* равен *l*F,* где *l* - плечо вектора относительно точки *O* . Единица измерения *M* в СИ обозначается *Н*м*.

Закон сохранения момента импульса системы частиц



- Уравнение моментов - производная по времени от момента импульса частицы
- $\vec{L}$ относительно некоторой неподвижной точки *O* выбранной системы отсчета равна моменту $\vec{M}$ равнодействующей силы относительно той же точки *O*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

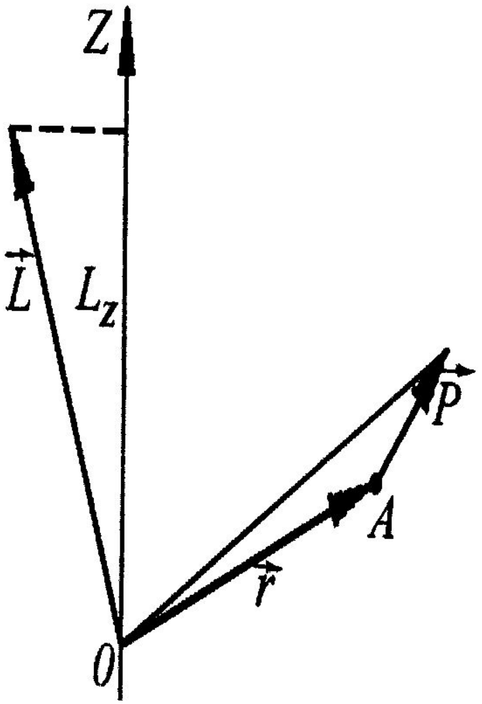
Закон сохранения момента импульса системы частиц

Из уравнения моментов, проинтегрировав его по времени, найдем приращение вектора $\vec{L}$ за конечный промежуток времени *t*:

$$\overrightarrow{L_2} - \overrightarrow{L_1} = \int_0^t \vec{M} dt.$$

Величину справа называют ***импульсом момента силы***. В итоге имеем: приращение момента импульса частицы за любой промежуток времени равно импульсу момента силы за тот же промежуток.

Закон сохранения момента импульса системы частиц



Рассмотрим момент импульса и момент силы относительно оси Z.

Выберем в ИСО любую неподвижную ось Z. Относительно некоторой точки *O* на оси момент импульса частицы *A* равен $\vec{L}$, а момент силы, действующей на частицу, $\vec{M}$.

- *Моментом импульса относительно оси Z* называют проекцию на эту ось вектора $\vec{L}$. Аналогично вводят момент силы относительно оси. Их обозначают соответственно L_Z и M_Z . Далее покажем, что их значения не зависят от выбора точки *O* на оси *Z*.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

Если уравнение моментов записать в проекциях на ось Z, то получим

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z$$

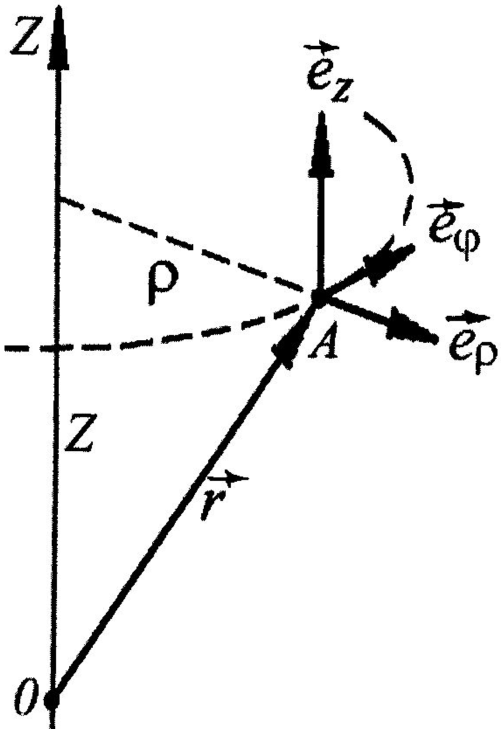
т. е. производная по времени от момента импульса частицы относительно оси Z равна моменту силы относительно этой оси.

Если момент силы относительно некоторой неподвижной оси Z равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой оси остается постоянным, но сам вектор L может при этом меняться.

Найдем теперь аналитические выражения для L_Z и M_Z. Для этого определим проекции на ось Z векторных произведений

$\vec{r} \times \vec{p}$ и $\vec{r} \times \vec{F}$.

Закон сохранения момента импульса системы частиц



- Воспользуемся, цилиндрической системой координат (ρ, φ, z), связав с частицей *A* орты
- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ направленные в сторону возрастания соответствующих координат.
- В этой системе координат радиус-вектор $\vec{r}$ и импульс частицы $\vec{p}$ записывают так:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$\vec{p} = p_\rho \vec{e}_\rho + p_\varphi \vec{e}_\varphi + p_z \vec{e}_z$$

- где p_ρ, p_φ, p_z - проекции вектора $\vec{p}$ на соответствующие направления.
- Из векторной алгебры известно, что векторное произведение $\vec{r} \times \vec{p}$ можно представить определителем.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_\rho} & \overrightarrow{e_\varphi} & \overrightarrow{e_z} \\ \rho & 0 & z \\ p_\rho & p_\varphi & p_z \end{vmatrix}$$

Отсюда получаем, что момент импульса частицы относительно оси Z равен $L_z = \rho\, p_\varphi$, где ρ - расстояние частицы от оси z. Т.к. $p_\varphi = mv_\varphi = m\rho\omega_z$, получим $L_z = m\,\rho^2\omega_z$, где ω_z - проекция угловой скорости, с которой поворачивается радиус-вектор частицы.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

Величина $I_z = m\rho^2$ называется *моментом инерции частицы относительно оси* Z. С помощью момента инерции выражение для момента импульса записывается аналогично проекции импульса $L_z = I_z\omega_z$ (для сравнения $p_z = m v_z$). Также записывается и момент силы относительно оси z : $M_z = \rho F_\varphi$, где F_φ - проекция вектора силы $\vec{F}$ на направление, задаваемое ортом $\vec{e}_\varphi$.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

- Момент импульса произвольной системы частиц $\overrightarrow{L_C}$ - это векторная сумма моментов импульсов ее отдельных частиц: $\overrightarrow{L_C} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{L_i}$,

где $\overrightarrow{L_C}$ и все векторы $\overrightarrow{L_i}$ определены относительно одной и той же точки O выбранной инерциальной системы отсчета, N - число частиц в системе.

Момент импульса системы $\overrightarrow{L_C}$ - величина аддитивная, т.е. момент импульса системы равен сумме моментов

Закон сохранения момента импульса системы частиц

Определим изменение момента импульса системы. Для этого продифференцируем $\overrightarrow{L_C}$ по времени: $\frac{d\overrightarrow{L_C}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt}$.

Производная $\frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt}$ равна моменту всех сил, действующих на i –ю частицу. Приравняем эту производную сумме моментов внутренних и внешних сил, т.е. $\overrightarrow{M_i'} + \overrightarrow{M_i}$.

Тогда $\frac{d\overrightarrow{L_C}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_i'} + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_i}$. Здесь первая сумма – это суммарный момент всех внутренних сил относительно точки O, вторая сумма – суммарный момент всех внешних сил относительно той же точки.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

Суммарный момент всех внутренних сил относительно любой точки равен нулю. По определению, внутренние силы - это силы взаимодействия между частицами данной системы. По 3-му закону Ньютона эти силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой, т. е. имеют одинаковое плечо. Поэтому моменты сил каждой пары взаимодействия равны по модулю и противоположны по направлению, т. е. уравновешивают друг друга, и, значит, суммарный момент всех внутренних сил всегда равен нулю.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

В результате *уравнение моментов для системы частиц* принимает вид:

$$\frac{d\overrightarrow{L_C}}{dt} = \vec{M},$$

Где $\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_i}$ - суммарный момент всех внешних сил. Это уравнение формулируется так: производная момента импульса системы по времени равна суммарному моменту всех внешних сил. Оба момента, $\vec{L}$ и $\vec{M}$, здесь определены относительно одной точки O инерциальной системы отсчета.

Закон сохранения
момента импульса системы частиц

Из уравнения моментов для системы частиц следует, что приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени равно импульсу суммарного момента всех внешних сил за соответствующий промежуток времени $\vec{L}_{C2} - \vec{L}_{C1} = \int_0^t \vec{M} dt.$. Моменты $\vec{L}_C$ и $\vec{M}$ определены относительно одной и той же точки O выбранной системы отсчета.

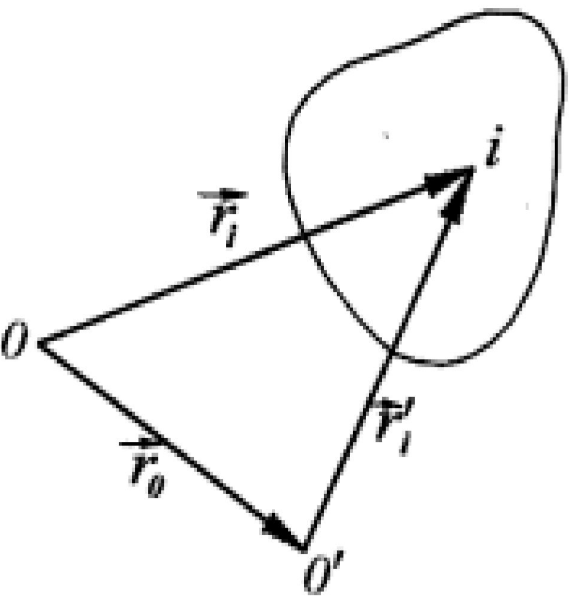
Отсюда вытекает *закон сохранения момента импульса*: в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным, то есть, не меняется со временем. Причем это справедливо для момента импульса, взятого относительно любой точки инерциальной системы отсчета.

Закон сохранения момента импульса системы частиц

Момент импульса $\vec{L}$ может сохраняться для незамкнутых систем: если относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета, суммарный момент внешних сил $\vec{M} \equiv 0$ в течение интересующего нас промежутка времени, то момент импульса системы относительно точки O сохраняется за это время.

В некоторых случаях у незамкнутых систем может сохраняться не сам момент импульса $\vec{L}$, а его проекция на некоторую неподвижную ось z. Это бывает тогда, когда проекция суммарного момента M_z всех внешних сил на эту ось z равна нулю.

Система центра масс



Пусть $\vec{M}$ - суммарный момент сил относительно точки O, а $\overrightarrow{M'}$ - относительно точки $\acute{O}$, радиус-вектор которой $\overrightarrow{r_0}$. Найдем связь между этими моментами. Радиус-векторы $\overrightarrow{r_i}$ и $\overrightarrow{r'}$ точки приложения силы $\vec{F}$ связаны соотношением $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{r'}$. Поэтому вектор $\vec{M}$ можно представить так:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \left[\overrightarrow{r_i}, \overrightarrow{F_i}\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{F_i}\right] + \sum_{i=1}^{N} \left[\overrightarrow{r'_i}, \overrightarrow{F_i}\right]$$

Или $\vec{M} = \overrightarrow{M'} + \left[\overrightarrow{r_0}, \vec{F}\right]$, где $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i}$ - результирующая всех внешних сил.

Система центра масс

Рассмотрим C - систему: систему отсчета, жестко связанную с центром масс системы частиц и перемещающуюся поступательно по отношению к инерциальным системам. В С-системе система частиц как целое покоится. Это значит, что сумма всех сил, включая и силы инерции, $\vec{F} = \vec{F}_{вз} + \vec{F}_{инер} = 0.$ Поэтому получаем два важных вывода: 1) в С-системе суммарный момент всех внешних сил, включая силы инерции, не зависит от выбора точки O. 2) в С-системе суммарный момент сил инерции относительно центра инерции всегда равен нулю.

Система центра масс

Доказательство 2-го вывода. Сила инерции, действующая на каждую частицу системы, $\overrightarrow{F_i} = -m_i\overrightarrow{a_0}$, где $\overrightarrow{a_0}$ - ускорение C-системы. Поэтому суммарный момент всех этих сил относительно центра инерции C $\overrightarrow{M_C^i} = \sum_{i=1}^{N}[\overrightarrow{r_i}, -m_i\overrightarrow{a_0}] = -\left[\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{r_i}\right), \overrightarrow{a_0}\right]$. Исходя из определения радиуса-вектора центра масс $\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{r_i} = m\overrightarrow{r_C}$, а так как в нашем случае $\overrightarrow{r_C} = 0$, то и $\overrightarrow{M_C^i} = 0$.

Система центра масс

3-й важный вывод: в С-системе момент импульса системы частиц не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Этот момент будем называть *собственным моментом импульса* системы и обозначать $\vec{L}_C$.

(Доказательство – далее).

Система центра масс

При переносе точки определения моментов импульсов на расстояние $\vec{r_0}$ новые радиус-векторы частиц определяются через старые формулой $\vec{r_i} = \vec{r_i'} + \vec{r_0}$. Поэтому момент импульса системы относительно точки O можно представить так:

$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r_i}, \vec{p_i}] = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r_i'}, \vec{p_i}\right] + \sum_{i=1}^{N}[\vec{r_0}, \vec{p_i}]$. Обозначим $\vec{L'}$ - момент импульса системы относительно точки Ó, тогда $\vec{L} = \vec{L'} + [\vec{r_0}, \vec{p_C}]$, где $\vec{p_C} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p_i}$ - полный импульс системы.

Система центра масс

Установим связь между $\vec{L}$ и $\overrightarrow{L_C}$. Пусть $\vec{L}$ - момент импульса системы частиц относительно точки O K-системы отсчета. Так как собственный момент импульса в C-системе не зависит от выбора точки Ó, возьмем точку Ó совпадающей в данный момент с точкой O K-системы. Тогда радиус-векторы каждой частицы в обеих системах отсчета будут одинаковы в этот момент ($\overrightarrow{r_i'} = \vec{r_i}$). Скорости частиц связаны формулой $\vec{v_i} = \overrightarrow{v_i'} + \overrightarrow{v_C}$, где $\overrightarrow{v_C}$ - скорость C-системы относительно K-системы. Поэтому можно записать:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r_i}, \vec{v_i}] = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r_i}, \overrightarrow{v_i'}\right] + \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r_i}, \overrightarrow{v_C}].$$

Система центра масс

Первая сумма в правой части этого равенства – собственный момент импульса $\overrightarrow{L_C}$. Вторую сумму представим как $M[\overrightarrow{r_C},\overrightarrow{v_C}]$ или $[\overrightarrow{r_C},\overrightarrow{p_C}]$, где M – масса всей системы, $\overrightarrow{r_C}$ - радиус-вектор ее центра масс в K-системе, $\overrightarrow{p_C}$ - суммарный импульс системы. В результате получим $\vec{L} = \overrightarrow{L_C} + [\overrightarrow{r_C},\overrightarrow{p_C}]$, т.е. момент импульса системы частиц $\vec{L}$ складывается из ее собственного момента импульса $\overrightarrow{L_C}$ и момента $[\overrightarrow{r_C},\overrightarrow{p_C}]$, обусловленного движением системы частиц как целого.

Система центра масс

Рассмотрим уравнение моментов в C-системе. $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C$, где $\vec{M}_C$ - суммарный момент внешних сил в C-системе. Так как C-система в общем случае неинерциальная, то в $\vec{M}_C$ входит помимо моментов внешних сил взаимодействия и момент сил инерции. С другой стороны, ранее было показано, что момент сил $\vec{M}_C$ в C-системе не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Обычно в качестве такой точки берут точку C - центр масс системы. Целесообразность выбора именно этой точки в том, что относительно ее суммарный момент сил инерции равен нулю, поэтому следует учитывать только суммарный момент внешних сил взаимодействия $\vec{M}_{вз}$.

Итак, $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_{вз}$, т. е. производная по времени от собственного момента импульса системы равна суммарному моменту всех внешних сил взаимодействия относительно центра инерции данной системы.

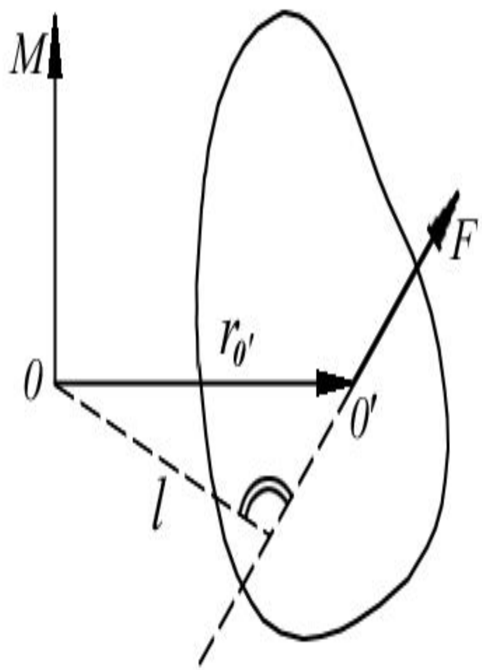
Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела в общем случае определяется двумя векторными уравнениями:

- уравнением движения центра масс $m\frac{d\vec{v_C}}{dt} = \vec{F};$
- уравнением моментов в C-системе $\frac{d\vec{L_C}}{dt} = \vec{M}.$

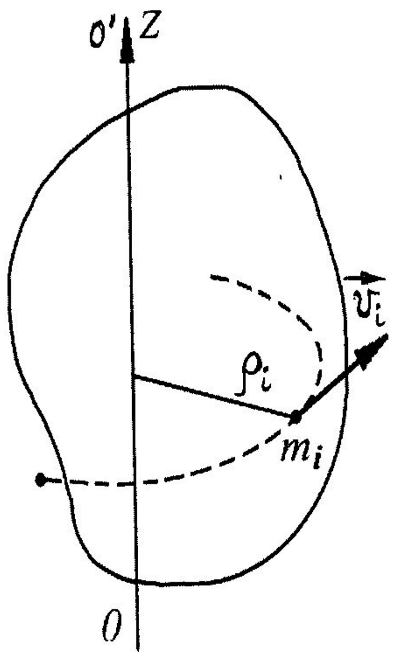
Приведем некоторые соображения, прямо вытекающие из вида самих уравнений. Если перенести силы вдоль направления их действия, то ясно, что не изменятся ни их результирующая $\vec{F}$, ни их суммарный момент $\vec{M}$. При этом уравнения тоже не изменятся, а, следовательно, не изменится и движение твердого тела. Поэтому *точки приложения внешних сил можно переносить вдоль направления действия сил*.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



- Рассмотрим теперь понятие *равнодействующей силы*. Когда суммарный момент всех внешних сил оказывается перпендикулярным результирующей силе, т. е. $\vec{M} \perp \vec{F}$, все внешние силы могут быть сведены к *одной* силе $\vec{F}$, действующей вдоль определенной прямой. Если относительно точки O суммарный момент $\vec{M} \perp \vec{F}$, то всегда можно найти такой вектор $\vec{r_0} \perp \vec{M}$, что при заданных $\vec{M}$ и $\vec{F}$
- $\vec{M} = \vec{r_0} \times \vec{F}$. При этом выбор $\vec{r_0}$ неоднозначен, т.к. прибавление к нему любого вектора, параллельного $\vec{F}$, не изменит последнего равенства. Это означает, что данное равенство определяет не точку приложения силы , а линию ее действия. Зная модули M и F соответствующих векторов, можно найти плечо силы l. Поэтому систему сил, действующих на отдельные точки твердого тела, можно заменить одной равнодействующей силой, которая равна результирующей и создает момент, равный суммарному моменту всех внешних сил.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. и найдем выражение для момента импульса твердого тела относительно оси OO': $L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{zi} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)\omega_z$, где m_i и r_i^2 - масса и квадрат расстояния от оси вращения $i-й$ частицы твердого тела, $\omega_я$ - его угловая скорость. Обозначив величину, стоящую в круглых скобках, через I, получим $L_z = I\omega_z$, где I - момент инерции твердого тела относительно оси OO':. Момент инерции твердого тела вычисляют по формуле $\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{r}^2 \boldsymbol{dm} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}^2 \boldsymbol{dV}$, где dm и dV - масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии r от интересующей нас оси z, $\rho(\vec{r})$ - плотность тела в данной точке, в правом равенстве интегрирование проводится по всему объему тела.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел относительно оси z_c, проходящей через центр масс тела

Вид твердого тела	Положение оси z_c	Момент инерции I_C
Тонкий стержень длины L	Перпендикулярно стержню	$mL^2/12$
Сплошной цилиндр радиуса R	Совпадает с осью цилиндра	$mR^2/2$
Тонкий диск радиуса R	Совпадает с диаметром диска	$mR^2/4$
Шар радиуса R	Проходит через центр шара	$2mR^2/5$
Тонкий обруч радиуса R	Проходит через центр обруча	mR^2

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Нахождение момента инерции упрощается при использовании *теоремы Гюйгенса-Штейнера*: момент инерции I относительно произвольной оси z равен моменту инерции I_C относительно оси параллельной данной и проходящей через центр масс C тела, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$I = I_c + ma^2.$$

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Запишем *основное уравнение динамики вращения твердого тела* с неподвижной осью вращения. Оно получается, как следствие из уравнения $\frac{dL_{cz}}{dt} = M_z$, если подставить в него $L_z = I\omega_z$, *и* продифференцировать по времени, тогда

$$I\varepsilon_z = M_z,$$

где $\varepsilon_z = d\omega_z/dt$ – угловое ускорение тела относительно оси z.

Плоское движение твердого тела

Плоское движение твердого тела описывают двумя уравнениями:

$$ma_c = F; \quad I_c \epsilon_z = M_{Cz},$$

где m – масса тела, F – результирующая всех внешних сил, I_c и M_{Cz} – момент инерции и суммарный момент всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр инерции тела.

Плоское движение твердого тела

Ось вращения тела, направление которой в пространстве остается неизменным без действия на нее каких-либо сил извне, называют *свободной осью* тела. Для любого твердого тела существуют три взаимно перпендикулярные проходящие через центр инерции тела оси, которые могут служить свободными осями. Их называют *главными осями инерции* тела. Нахождение главных осей инерции очень упрощается для тел, обладающих той или иной симметрией, т.к. положение центра инерции и направление главных осей инерции обладают в этом случае той же симметрией. Важной особенностью главных осей инерции тела является то обстоятельство, что при вращении тела вокруг любой из них момент импульса $\vec{L}$ тела совпадает по направлению с угловой скоростью $\vec{\omega}$ тела и определяется формулой

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega},$$

где I – момент инерции тела относительно данной главной оси инерции.