Прикладна статистика та ймовірнісні процеси

Лектор: доцент Сас Наталія Богданівна

Розділи

- Теорія ймовірності
- Математична статистика
- Ймовірнісні процеси

Лабораторні роботи

- **Комбінаторика** (Розміщення, перестановки, комбінації, біном Ньютона)
- **Дискретний випадковий процес з рівномірним розподілом.**
- **Моделювання випадкових чисел.**
- **Моделювання випадкових чисел з відомими законами розподілу**

Середовища

C/C++ (консольний проект)

- Code::Blocks IDE
- Microsoft Visual Studio IDE

Середовища

- Python
- Java
- C#

Звітність

- Лабораторний практикум – 50 балів
- Іспит – 50 балів

Іспит = Білет+ усна співбесіда

Тема: Комбінаторика. Основні поняття теорії ймовірності

ПРЕДМЕТ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Процес реалізації певного комплексу умов називається **експериментом**.

Випадкова подія - це подія, яка може відбутись або не відбутись в результаті здійснення деякого експерименту, тобто в результаті реалізації певного комплексу умов.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій.

Предмет математичної статистики - дослідження закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, на підставі статистичних даних - результатів спостережень.

СТАТИСТИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ.

Нехай деякий експеримент здійснюється ***n*** разів і при цьому в результаті ***m*** випробувань відбувається подія **А**. Відношення ***m/n*** називається відносною частотою появи події ***А*** в серії з ***n*** випробувань.

Ймовірністю події називається *об'єктивно існуюча величина,* навколо якої групуються відносні частоти цієї події при великій кількості випробувань. Позначаємо ***P(A)*** - ймовірність події ***A***.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n}.$$

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Комбінаторика - розділ математики, предметом якого є теорія скінченних множин.
Множина - сукупність об'єктів довільної природи, які володіють спільною для всіх них характеристичною властивістю.

Правило суми.

$$N(A) = m,\ N(B) = n,\ A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad N(A \cup B) = m + n.$$

Правило добутку (основне правило комбінаторики): якщо першу дію можна здійснити n_1 способами, другу, яка не залежить від першої, n_2 - способами, ..., k , яка не залежить від усіх попередніх, n_k - способами, то першу, другу, ..., k-ту дії послідовно можна здійснити $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Впорядковані множини

Множина ***M*** називається **впорядкованою**, якщо в ній встановлено відношення порядку, що має такі властивості:

1) $\forall a, b \in M$ *або* $a \prec b$, *або* $b \prec a$;

2) якщо $a \prec b,\ b \prec c,$ *то* $a \prec c.$

Розміщення, перестановки, комбінації

<u>Озн</u>. Нехай M – n-множина; $k \le n,\ k \in N$. ***Розміщенням*** з n елементів по k називають будь-яку *впорядковану* k-підмножину множини M.

Кількість розміщень з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

<u>Озн</u>. ***Перестановкою*** з n елементів називається розміщення з n елементів по n, тобто будь-яке впорядкування n-множини, яка складається з різних елементів.

$$P_n = n! \quad \left(P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! \right).$$

<u>Озн</u>. Нехай M – n-множина; $k \le n,\ k \in N$. ***Комбінацією*** з n елементів по k називають будь-яку k-підмножину множини M.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Розміщення з повтореннями

Озн. Нехай M – n-множина; $k \in N -$ довільне натуральне число. ***Розміщенням з повтореннями*** з n елементів по k називають будь-яку *впорядковану* множину вигляду $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, де a_i, $i = \overline{1,k} -$ елементи множини M, не обов'язково різні.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою: $\overline{A_n^k} = n^k$.

Приклади. 1) M={1, 2}; n=2, k=3; $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$. Справді, можливі розміщення такі:

(2,1,1), (1;2,1), (1,1,2), (1,2,2), (2,1,2), (2;2,1), (1,1,1), (2,2,2) – всього вісім.

Перестановки з повтореннями

<u>*Озн*</u>. ***Перестановкою з повтореннями*** з *n* елементів називається будь-яке впорядкування *n*-множини, серед елементів якої є однакові.

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

<u>*Приклад*</u>. $M=\{1, 2, 2\}$; $n=3$, $n_1=1$, $n_2=2$, $k=2$; $P_3(1,2) = \frac{3!}{1!2!} = 3$. Справді, можливі перестановки такі: (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1) – всього три.

Комбінації з повтореннями

<u>*Озн*</u>. Нехай M – n-множина; $k \in N$ – довільне натуральне число. ***Комбінацією з повтореннями*** з n елементів по k називають будь-яку k-множину вигляду $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, де $a_i, i = \overline{1,k}$ – елементи множини M, не обов'язково різні.

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

<u>*Приклади*</u>. 1) M={1, 2}; n=2, k=3; $\overline{C_2^3} = C_4^3 = \frac{4!}{1!3!} = 4.$ Справді, можливі комбінації такі: {2,1,1}, {1,2,2}, {1,1,1}, {2,2,2} – всього чотири.

2) M={1, 2, 3}; n=3, k=2; $\overline{C_3^2} = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$ Справді, можливі комбінації такі: {1;2}, {1;3}, {2;3}, {1;1}, {2;2}, {3;3} – всього шість.

Біноміальні коефіцієнти

Кількість сполучень без повторень , ще називають ***біноміальними коефіцієнтами***

$$C_n^k = C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Симетричність:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Доведення:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\left[n-(n-k)\right]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Біноміальні коефіцієнти

2. Рівність Паскаля:

рекурентне співвідношення

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Зауваження:
Для чисел Стрілінга 2-го роду існує подібне рекурентне співвідношення:

$$\Phi(n,k) = \Phi(n-1,k-1) + k\Phi(n-1,k)$$

$$\Downarrow$$

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

Біноміальні коефіцієнти

Трикутник Паскаля:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$n \backslash k$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
0		1										…
1		1	1									…
2		1	2	1								…
3		1	3	3	1							…
4		1	4	6	4	1						…
5		1	5	10	10	5	1					…
6		1	6	15	20	15	6	1				…
7		1	7	21	35	35	21	7	1			…
8		1	8	28	56	70	56	28	8	1		…
9		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	…
…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Біноміальні коефіцієнти

Трикутник Паскаля:

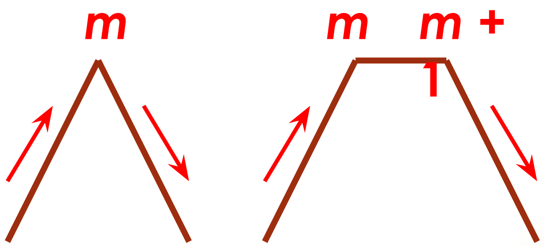
$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$

Біноміальні коефіцієнти

Унімодальна послідовність:

Послідовність (p_n) дійсних чисел називають ***унімодальною***, якщо існує такий натуральний номер m, що $p_0 < p_1 < \dots < p_m; p_m \geq p_{m+1} > p_{m+2} > \dots > p_n$, тобто:

- послідовність строго зростає на відрізку $[0, m], m > 0$;
- послідовність строго спадає на відрізку $[m+1, n], m+1 < n$;
- максимальне значення досягається не більше ніж у двох точках: m і, можливо, $m+1$.



Біноміальні коефіцієнти

Унімодальна послідовність:

Теорема. За фіксованого n послідовність біноміальних коефіцієнтів $(C_n^k), k = 0, 1, 2, \ldots, n$ - *унімодальна.*

У разі парного n максимум досягається в точці $m = \frac{n}{2}$.

У разі непарного – у двох точках: $m = \frac{n-1}{2}$ та $m + 1 = \frac{n+1}{2}$.

3. Рівність Вандермонда:

Нехай m, n, r – невід'ємні цілі числа, причому $r \le \min\{m, n\}$.

Тоді $C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^{r} C_m^{r-k} C_n^k$.

Біном Ньютона

Теорема (біноміальна). Нехай *x* та *y* – змінні, *n* – додатне ціле число. Тоді:

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{j=0}^{n}C_n^j x^j y^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}C_n^j x^{n-j} y^j$$

Легко переконатись, що:

$$\left(x-y\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^j C_n^j x^{n-j} y^j$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x\pm y\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\left(\pm 1\right)^j C_n^j x^{n-j} y^j$$

Біном

Приклад.

Знайдемо розклад виразу $(x-y)^4$. Скориставшись біноміальною теоремою, можемо записати:

$$(x-y)^4 = C_4^0 x^4 - C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 - C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4 =$$
$$= x^4 - 4x^3 y + 6x^2 y^2 - 4xy^3 + y^4.$$

Біноміальні коефіцієнти можна брати з трикутника Паскаля чи обчислювати за формулою для кількості сполучень без повторень.

Приклад.

Визначимо коефіцієнт при $x^{12}y^{13}$ в розкладі $(x+y)^{25}$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює

$$C_{25}^{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5200300.$$

Біном Ньютона

Властивість 4.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Доведення:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

Зауваження:

Для заданої множини A можна розглянути *множину всіх її підмножин*, зокрема порожню множину $\varnothing$ і саму множину A. Цю множину позначають 2^A чи $P(A)$ й називають ***множиною-степенем***, чи ***булеаном*** множини A. Для скінченної множини A множина 2^A містить $2^{|A|}$ елементів.

Приклад. Нехай $A = \{0,1,2\}$. Тоді

$2^A = \{\{\varnothing\},\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$. Ця множина містить $2^3 = 8$ елементів.

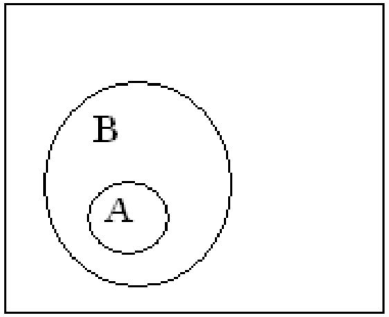
Простір елементарних подій. Операції над випадковими подіями

Простором елементарних подій (Ω) назвемо множину, елементами якої є всі елементарні події, пов'язані з даним випробуванням.

Під *елементарними* подіями (ω) ми розуміємо всі нерозкладні результати даного випробування, які взаємно виключають один одного.

Подію Ω називатимемо *вірогідною*, вона обов'язково відбудеться в результаті випробування, а подію $\varnothing$ – *неможливою*, вона обов'язково не відбудеться в результаті випробування.

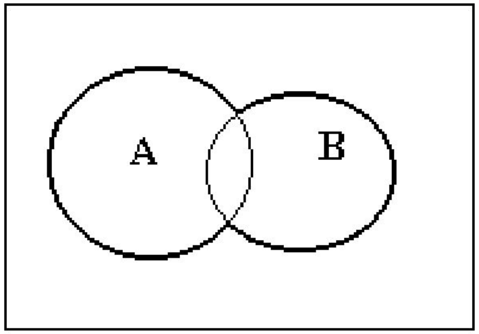
Означення. *Кажуть, що подія A є* ***окремим випадком*** *події B (або подія A тягне за собою B, або B є наслідком A), якщо множина A є підмножиною множини B.*



$A \subset B$ або $B \supset A$.

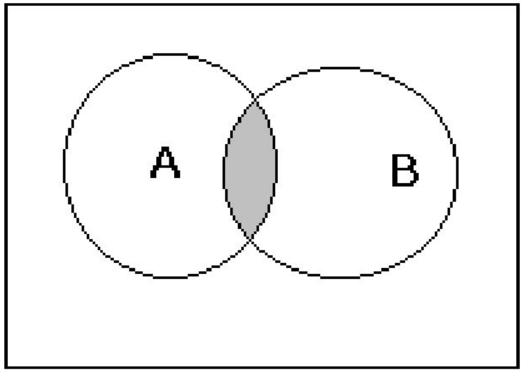
Означення. *Події A і B називаються* ***рівносильними***, *якщо* $A \subset B$ *і* $B \subset A$. *Рівносильність подій позначають так:* $A=B$.

Означення. ***Сумою*** двох подій A і B ($A+B$ або $A \cup B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться хоча б одна з подій A або B (або лише A, або лише B, або і A, і B).



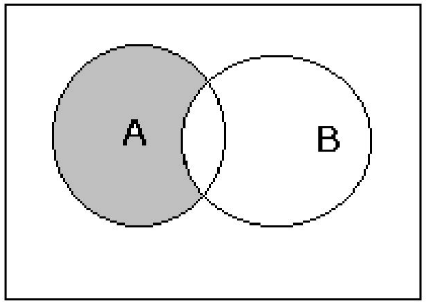
$A+B$ або $A \cup B$

Означення. ***Добутком*** *двох подій A і B (AB або $A \cap B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться як подія A, так і подія B.*



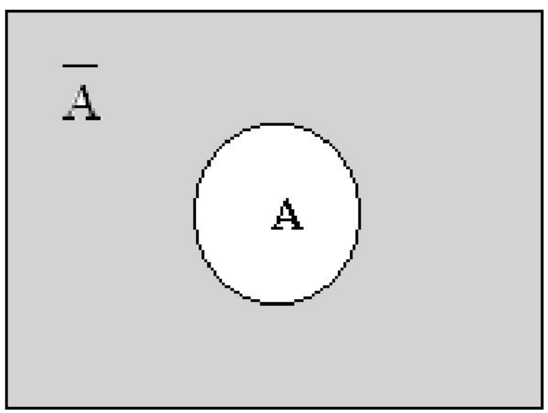
AB *або* $A \cap B$

Означення. ***Різницею*** *двох подій A і B (A–B або $A \setminus B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться подія A, але не відбудеться подія B.*



A–B або $A \setminus B$

Означення. ***Протилежною*** *подією $\overline{A}$ до події A називається подія Ω–A, вона означає, що подія A не відбулася.*



Ω–A

Алгебра і σ-алгебра подій.

Аксіоматичне означення ймовірності

Означення. *Нехай Ω – довільний простір елементарних подій, а S – деяка сукупність випадкових подій. Сукупність подій S називається* ***алгеброю подій,*** *якщо виконуються умови:*

1) $\Omega \in S$;

2) якщо $A \in S,\ B \in S$, *то* $A + B \in S,\ A - B \in S$.

Означення. *Алгебра подій* $\mathcal{F}$ *називається* ***σ-алгеброю*** *або борелівською алгеброю, якщо з того, що* $A_i \in \mathcal{F}$, $i=1,2,\ldots$, *випливає, що* $\bigcup\limits_{i}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Зауважимо, що у випадку скінченної множини Ω будь-яка алгебра подій є σ-алгеброю.

Означення. *Числова функція P, визначена на σ-алгебрі подій $\mathcal{F}$, називається* ***ймовірністю,*** *якщо*

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3$_а$) $AB=\varnothing \;\Rightarrow\; P(A+B) = P(A) + P(B)$ (скінченна адитивність);

3$_б$) якщо в послідовності подій $A_1, A_2, \ldots$ всі події попарно несумісні, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ (зліченна адитивність);}$$

4) Нехай для зростаючої послідовності подій $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ або для спадної послідовності подій $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$ і $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, тоді $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ (аксіома неперервності).

Трійку $(\Omega,\mathcal{F},P)$, де $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, а P – ймовірність, визначена вище, називатимемо *ймовірнісним простором*.

Наслідки з аксіом

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

2) $P(\varnothing)=0.$

3) $\forall\ A, B \quad P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ – теорема додавання ймовірностей.

4) $P(A+B) \le P(A) + P(B);\qquad P(A_1 + \cdots + A_n) \le P(A_1) + \cdots + P(A_n).$

5) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \le P(B).$

6) $\forall\ A \qquad 0 \le P(A) \le 1.$

Класичне та геометричне означення ймовірності

Ймовірністю *події A називається відношення кількості сприятливих для події A елементарних подій до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування.*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)};$$

Означення. ***Геометричною ймовірністю*** *події A називається відношення міри* $\mu(A)$ *до міри* $\mu(\Omega)$, *тобто* $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!