

Линейная алгебра

Лекция 1
Введение

Контакты

Лектор:

Фаизова Анна Андреевна,

ассистент каф. Управления рисками и
страхования

a.faizova@spbu.ru

faizova.anna@gmail.com

ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ КУРСА

- Матрицы. Определители. Обратные матрицы
- Системы линейных уравнений
- Векторы
- Базисы и размерность
- Примеры экономических приложений

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

- З.И.Боревич. Определители и матрицы. М.2004.
- Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. Москва. 1997.
- Д.К.Фаддеев. Лекции по алгебре.Наука. М.1984.
- Учебные и контрольные задания по математике (высшая алгебра). Изд. ЭСФ СПбГУ. 2005.

Дополнительная

- Н.А.Вавилов, В.Г.Халин. «МАТНЕМАТИСА 5.* для нематематика.» Выпуски 1 и 2. СПб.: СПбГУ. 2005.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ И НАВЫКОВ

1. Письменные контрольные работы (1 и 2).
2. Индивидуальные контрольные задания.

ЭКЗАМЕН

- Теоретическая часть: знание всех определений и формулировок;
- Практическая часть: навыки решения задач, предусмотренных программой.

Использование пособий, учебников, конспектов и технических устройств не допускается.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

- Экзамен письменный. 10 заданий: 5 теоретических вопросов и 5 задач. Каждый оценивается из 7 баллов - итого 70 баллов
- Правильное выполнение индивидуальных контрольных заданий –10 баллов (5 работ по 2 балла каждая)
- Письменные контрольные работы – 20 баллов (по 10 баллов каждая)

Дополнительно:

Активность на практических занятиях, решение задач повышенной сложности, выполнение домашних заданий

ШКАЛА ОЦЕНОК

«отлично» (А) – 90-100 баллов,

«очень хорошо» (В) – 80-89 баллов,

«хорошо» (С) – 70-79 баллов,

«удовлетворительно» (D) – 60-69 баллов,

«посредственно» (Е) – 50-59 баллов,

**«неудовлетворительно» (F) – менее 50
баллов**

Линейная алгебра

Лекция 1

Матрицы. Действия над
матрицами

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- Матрицы.
- Матрицы специального вида.
- Операции над матрицами:
 - сложение матриц;*
 - умножение матрицы на число;*
 - умножение матриц;*
 - транспонирование матриц.*
- Свойства операций над матрицами.

МАТРИЦЫ. Пример.

Определение

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица

из чисел a_{ij} (элементов матрицы),

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения:

$$A = (a_{ij})$$

$$A = \{a_{ij}\}$$

Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1,2 & 2,25 & 0,5 \\ 30 & -6,7 & 2 \\ 0,4 & 0,22 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 3,3 \end{pmatrix}; \quad D = (1 \ 2 \ 0 \ -1).$$

КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение

Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**.

Примеры.

$$B = \begin{pmatrix} -1,2 & 2,25 & 0,5 \\ 30 & -6,7 & 2 \\ 0,4 & 0,22 & -1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ТРЕУГОЛЬНАЯ МАТРИЦА

Определение

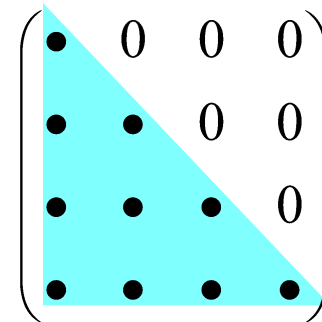
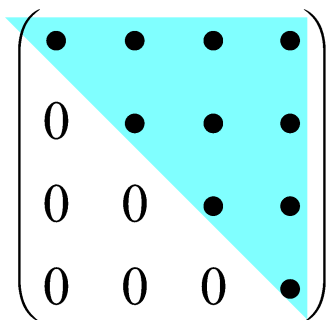
Пусть A – квадратная матрица.

Если $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$ либо для всех $i < j$,
то матрица называется **треугольной**.

В частности, матрица называется

верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$,

и **нижнетреугольной**, если $a_{ij} = 0$ для всех $i < j$.



ДИАГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА

Определение

Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **диагональной**.

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА

Для квадратных матриц определена единичная матрица порядка n – квадратная матрица $n \times n$, все диагональные элементы которой равны единице, а остальные – нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

СИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА

Определение.

Пусть A – квадратная матрица.

Если $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется **симметрической**.

Примеры

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$


СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Суммой $A+B$ матриц размера $m \times n$ $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m, \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{array}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0,5 \\ 0 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A + B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0,5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА МАТРИЦУ

Произведением λ A числа λ и матрицы $A = (a_{ij})$

называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на λ :

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m, \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{array}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 9 & 18 & 6 \\ 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Произведением **AB** матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и матрицы $B = (b_{ij})$ размера $n \times k$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times k$, элемент которой равен сумме произведений соответственных элементов i -ой строки матрицы **A** и j -го столбца матрицы **B** :

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}, \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,k. \end{matrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

НЕКОММУТАТИВНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Для матриц, вообще говоря, **$AB \neq BA$**

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Если **$AB = BA$** , матрицы **A** и **B** называются
коммутирующими.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

- 1) $A+B = B+A$
- 2) $(A+B)+C = A+(B+C)$
- 3) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- 4) $A(B+C) = AB + AC$
- 5) $(A+B)C = AC + BC$
- 6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 7) $A(BC) = (AB)C$

СВОЙСТВО ЕДИНИЧНОЙ МАТРИЦЫ

Для любой квадратной матрицы \mathbf{A} выполнено:

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A - матрица размера $m \times n$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A' - матрица размера $n \times m$,
называется
транспонированной
для A

Обозначения: A' , A^T

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ МАТРИЦ

$$A'' = (A')' = A$$

$$(A \cdot B)' = B' \cdot A'$$