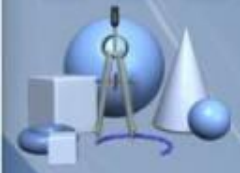


**Понятие конуса.
Площадь
поверхности конуса.
Усеченный конус**



Основные вопросы:

- Определение конической поверхности. Понятие конуса и его элементов.
- Площадь поверхности конуса.
- Понятие усеченного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.
- Сечение конуса плоскостями (*осевое, круговое*).
- Решение задач



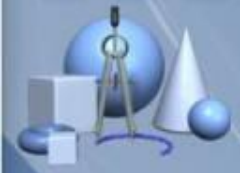
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

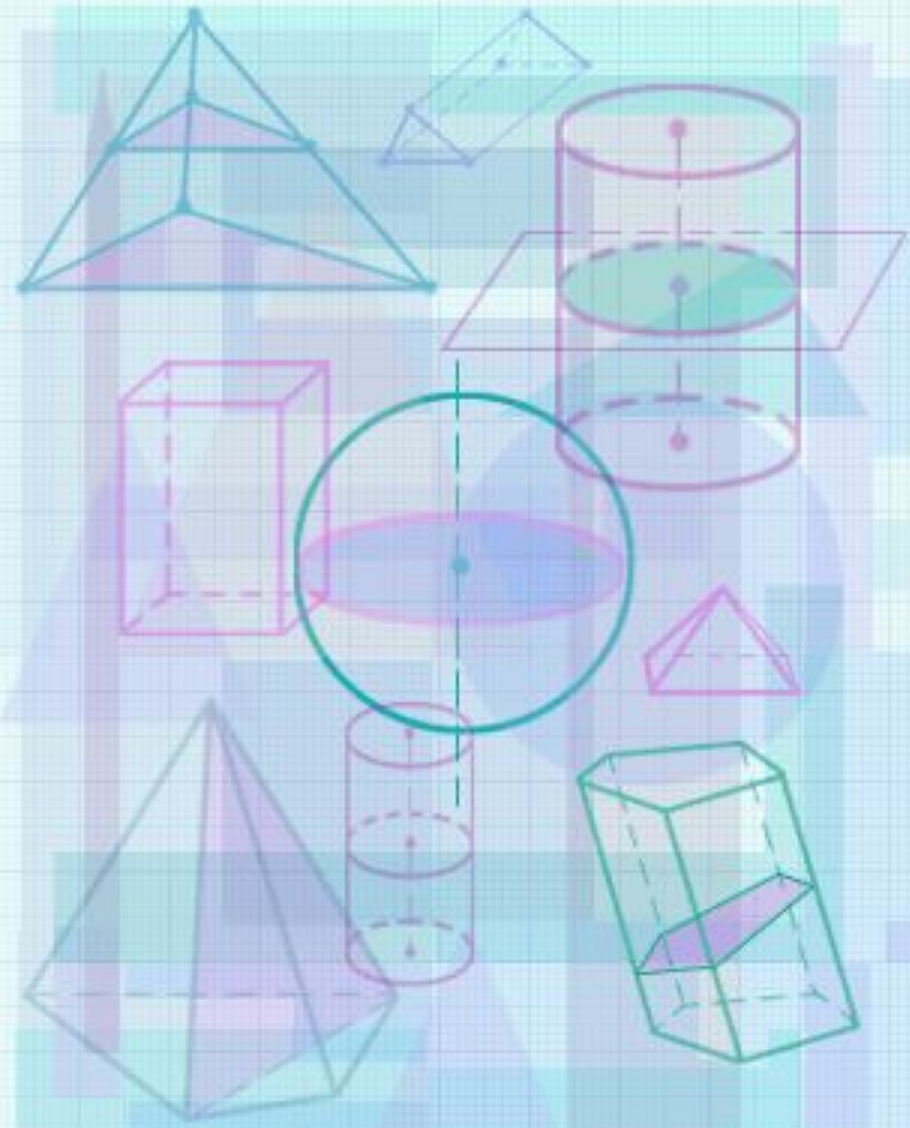
КОНУС

ШАР

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС



Определение конуса.

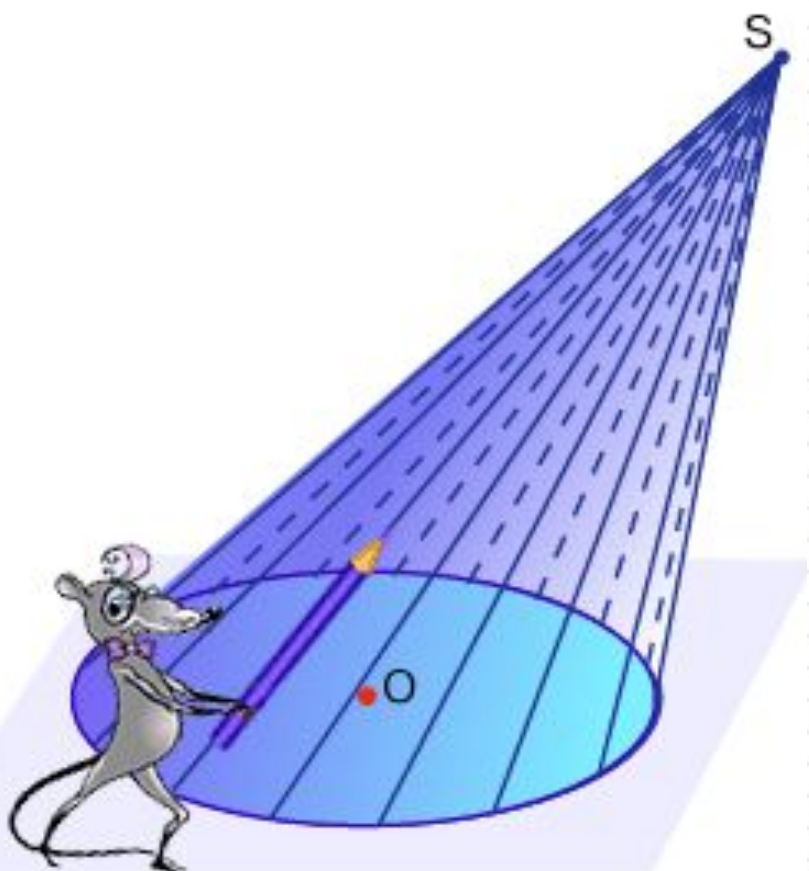




КОНУ С

Латинское слово **«conus»**
заимствовано из греческого языка
(konos - втулка, сосновая шишка)...

Круговым конусом



называется тело ограниченное *кругом* – основанием конуса, и *конической поверхностью*, образованной отрезками, соединяющими точку, вершину конуса, со всеми точками окружности, ограничивающей основание конуса.



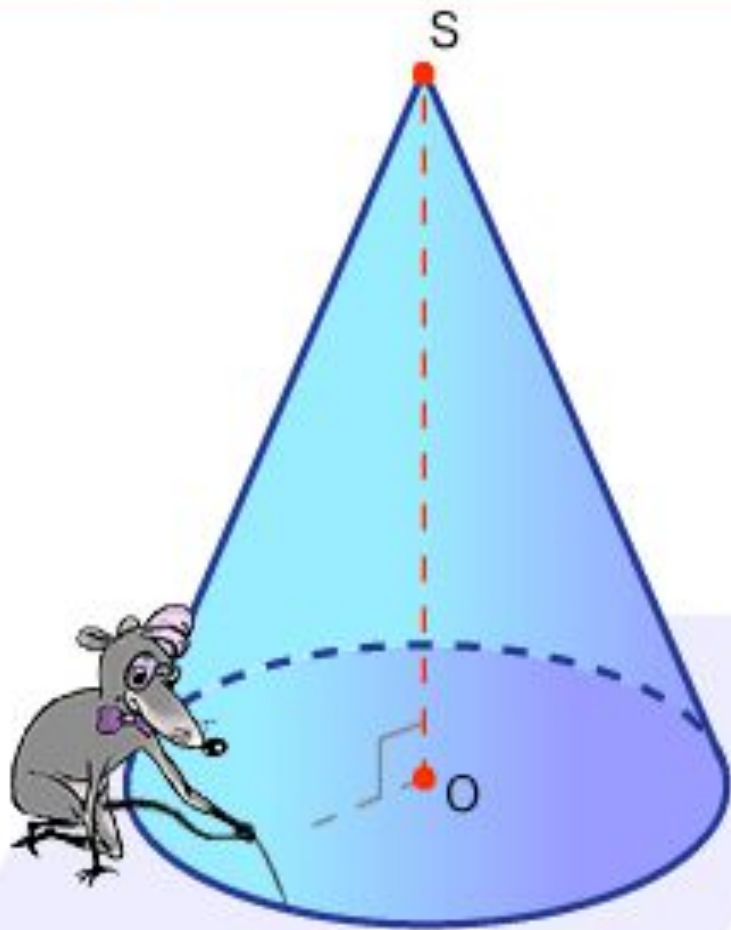
Элементы конуса.

- **Коническая поверхность** называется **боковой поверхностью конуса**, а **круг** — **основанием конуса**.
- **Высотой конуса** называется **перпендикуляр**, опущенный из вершины конуса на его основание.
- **Образующая конуса** — отрезок соединяющий вершину конуса с границей основания



Круговой конус

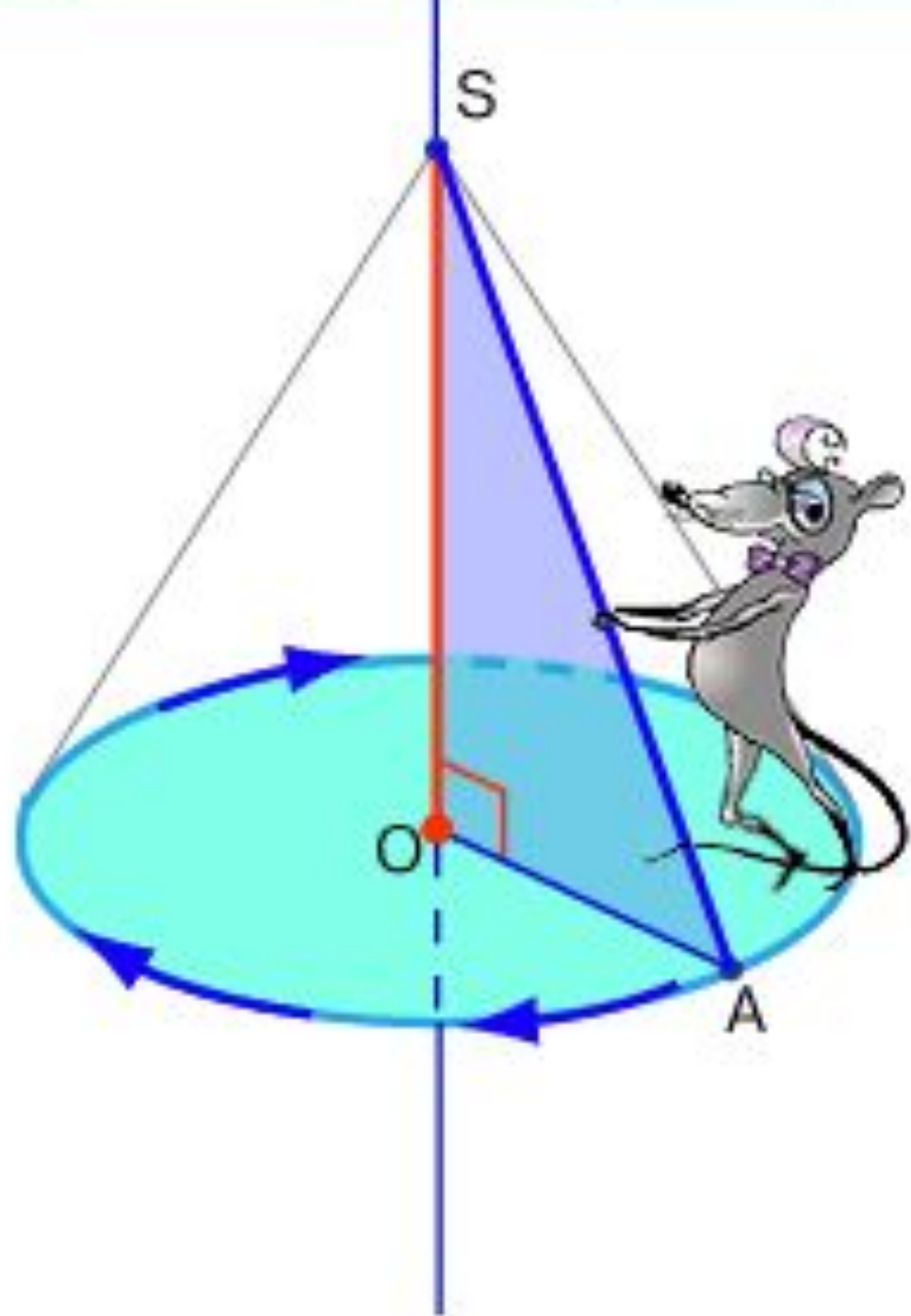
Прямой круговой конус.



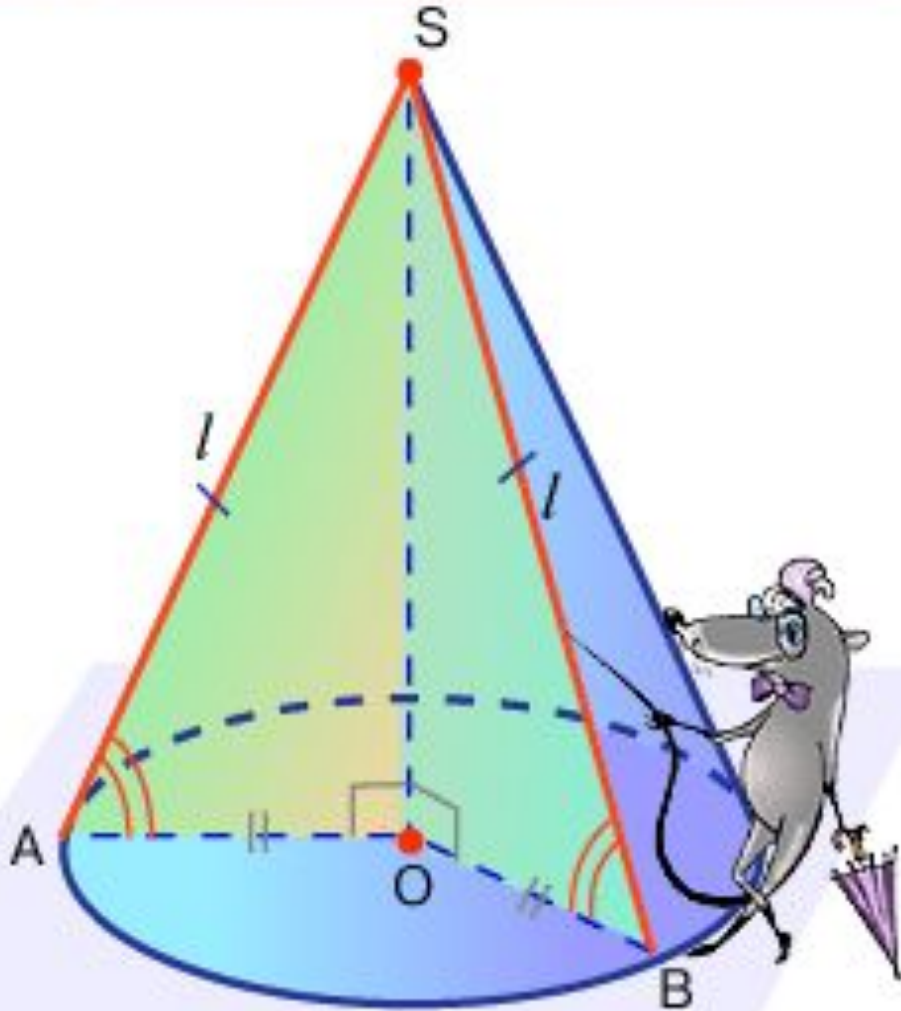
Круговой конус называется прямым, если его высота попадает в центр круга, и перпендикулярна плоскости основания.



- *Конус можно получить, вращая **прямоугольный треугольник** вокруг одного из катетов.*
- *При этом осью вращения будет прямая, содержащая высоту конуса. Эта прямая так и называется – **осью конуса**.*



Все образующие конуса равны между собой и составляют один угол с основанием.



$$\Delta SOA = \Delta SOB$$

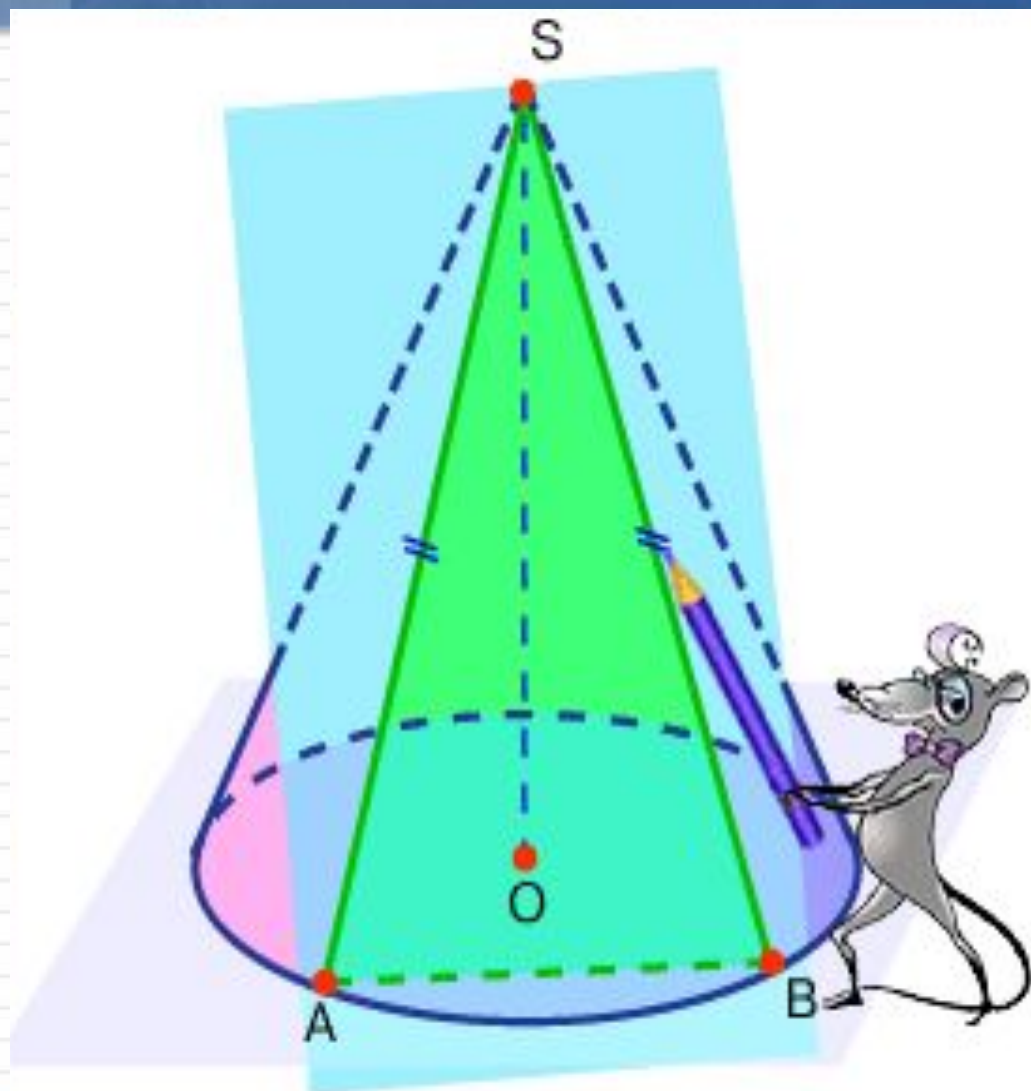
$$SA = SB = l$$



$$\angle SAO = \angle SBO$$

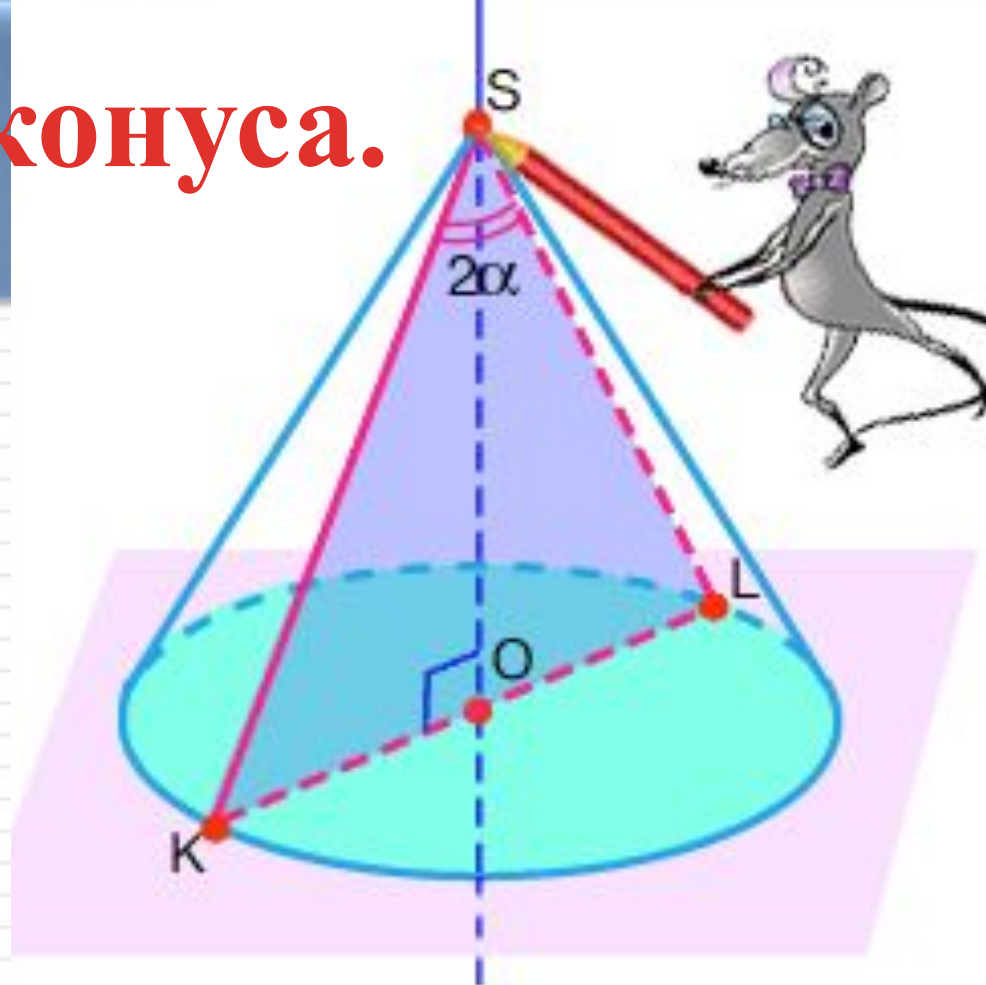
Сечения конуса.

- Если через вершину конуса провести плоскость, пересекающую основание, то в сечении получится равнобедренный треугольник.



Сечения конуса.

- Сечение конуса, **проходящее через ось**, называется осевым.
- В основании осевого сечения лежит **диаметр** – **максимальная хорда**, поэтому угол при вершине осевого сечения – это **максимальный угол** между образующими конуса. (Угол при вершине конуса).



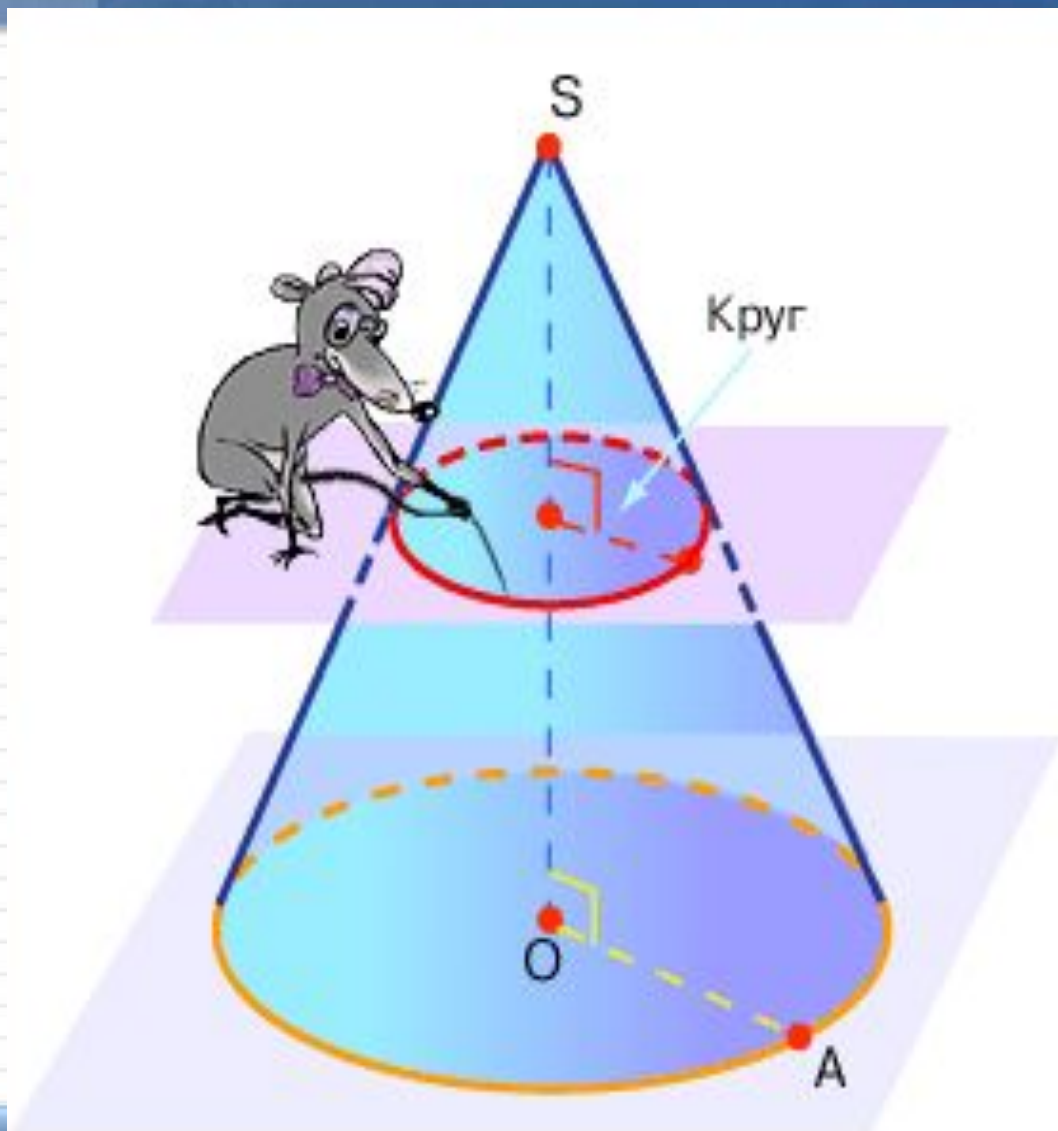
ΔSKL – осевое сечение

$KL = 2R$ – диаметр

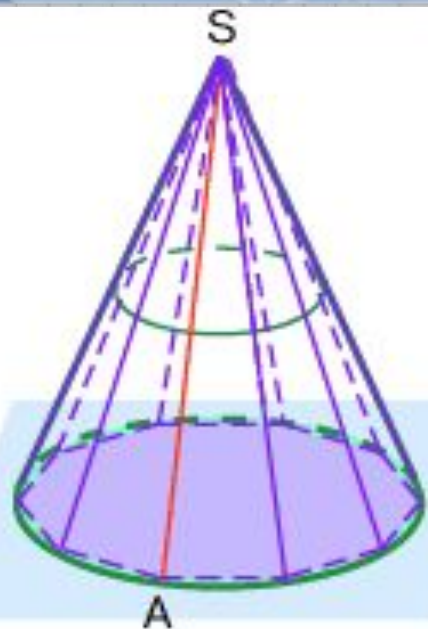
$\angle KSL = 2\alpha$ – угол при
вершине конуса.

Сечения конуса.

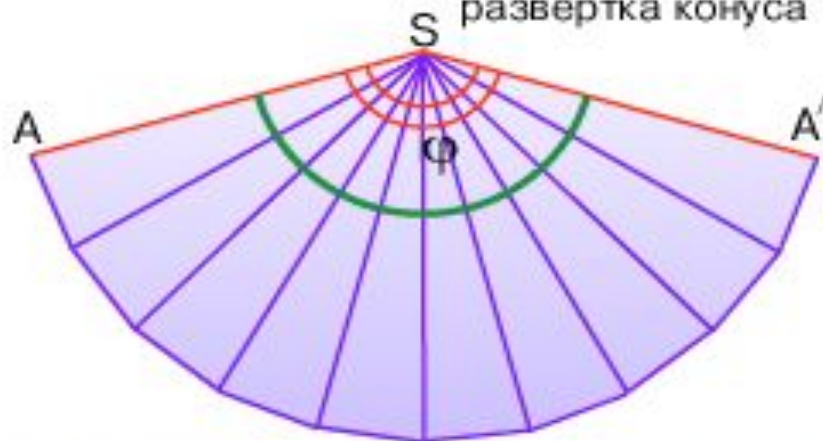
- Любое сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, - это круг.



Развертка конуса.



Сектор SAA' –
развертка конуса

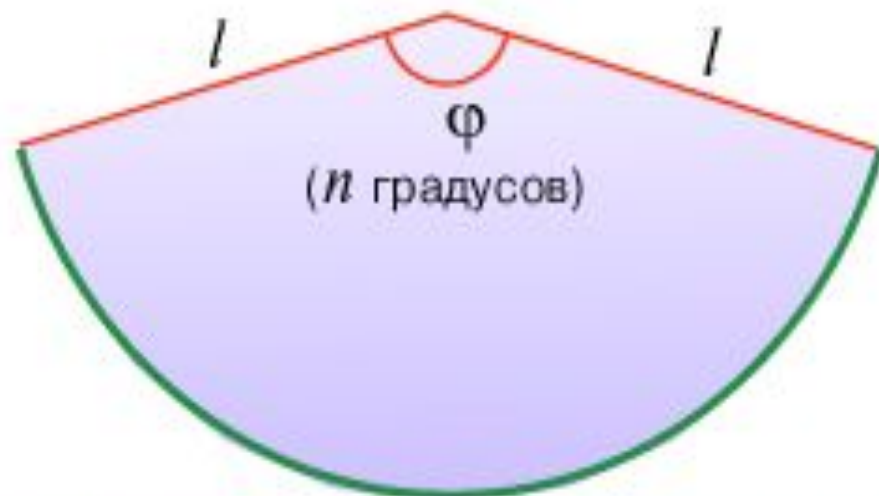


*Развертка конуса – это
круговой сектор.*

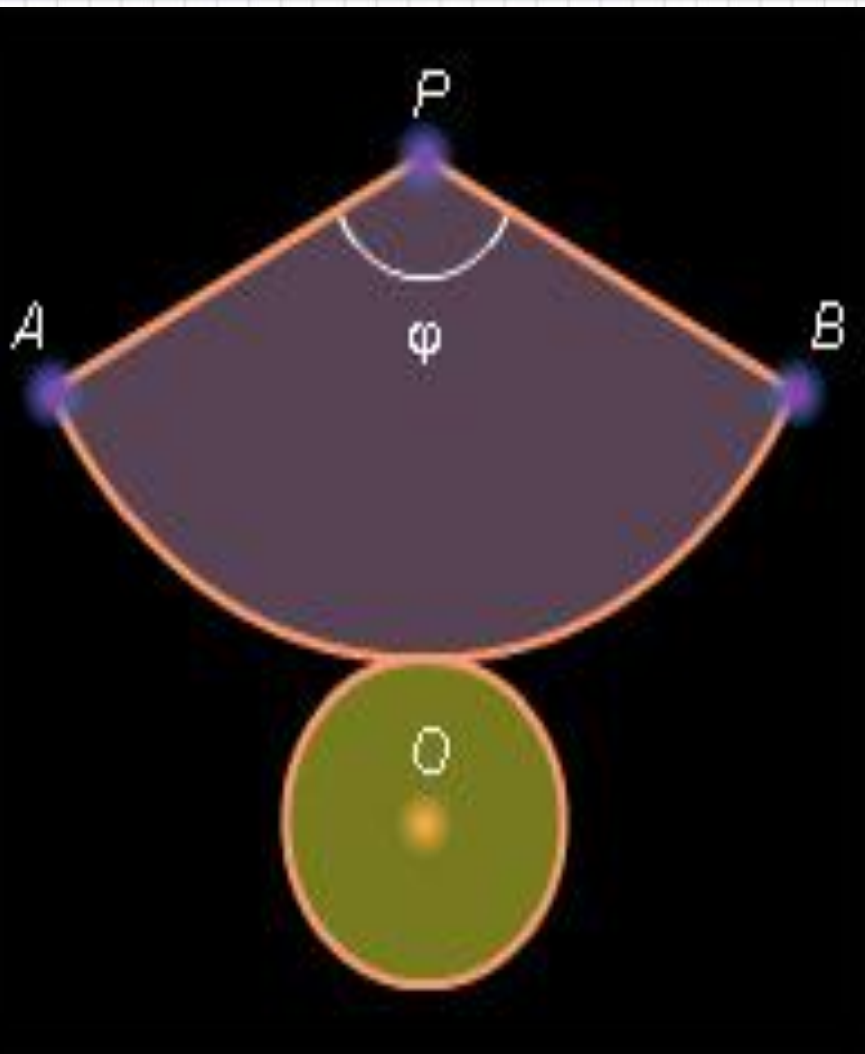
Радиус которого равен
образующей конуса, а
длина дуги сектора –
длине окружности
основания конуса.



- *Найдем выражение для градусной меры угла развертки конуса.*



Развертка конуса.

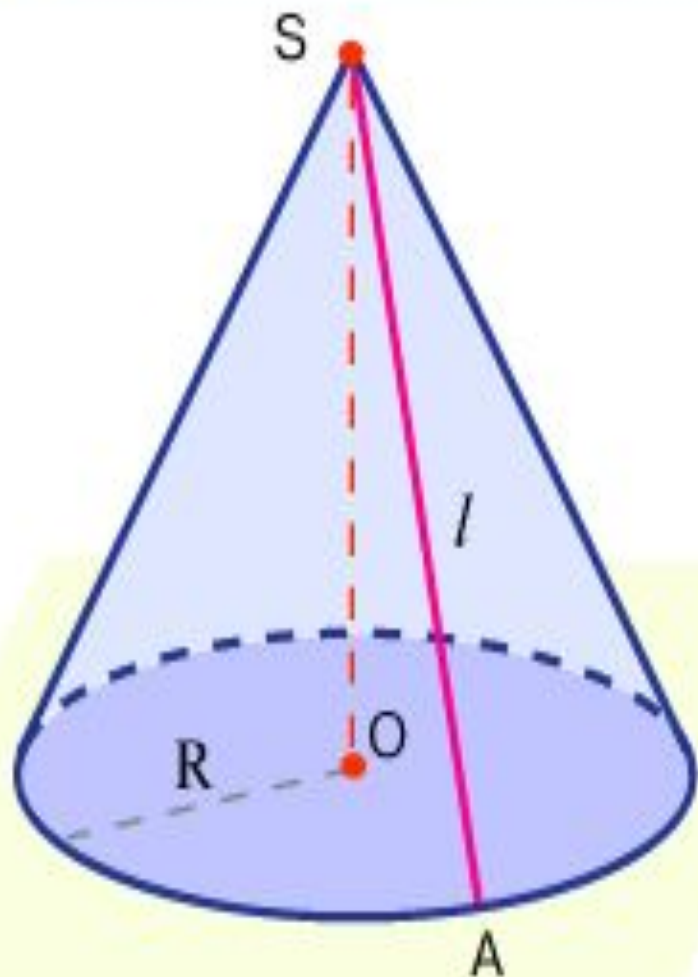


- За *площадь боковой поверхности конуса* принимается площадь его развертки (конической поверхности).

$$1) S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{360} \alpha$$

$$2) S_{\text{бок}} = \pi r l$$

Теорема.



*Площадь боковой
поверхности конуса
равна половине
произведения длины
окружности
основания на
образующую.*

$$S_{\text{бок.кон.}} = \pi Rl$$



Теорема.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi RL$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{полн}} = \pi RL + \pi R^2$$

$$S_{\text{полн}} = \pi R(L + R)$$

- *Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания.*

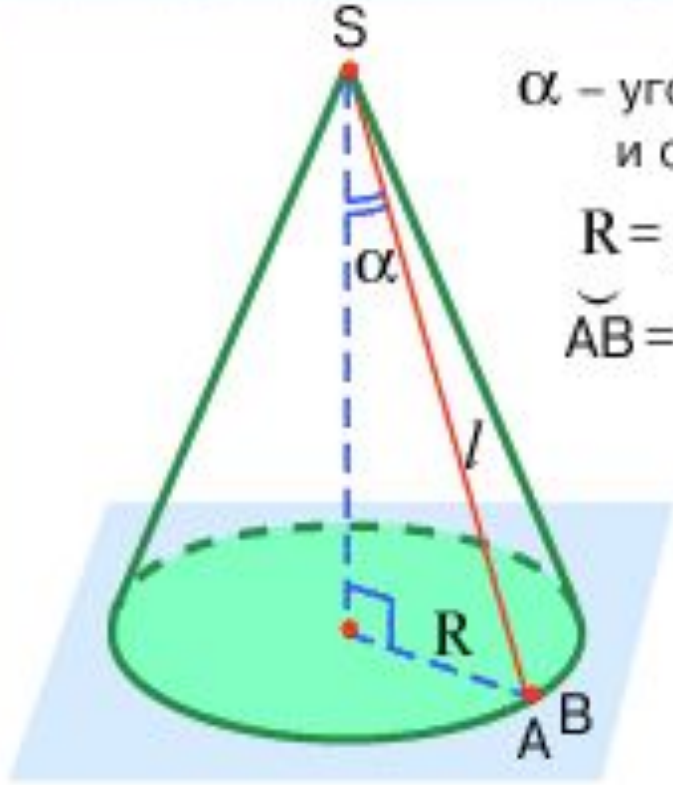


Усеченный конус.





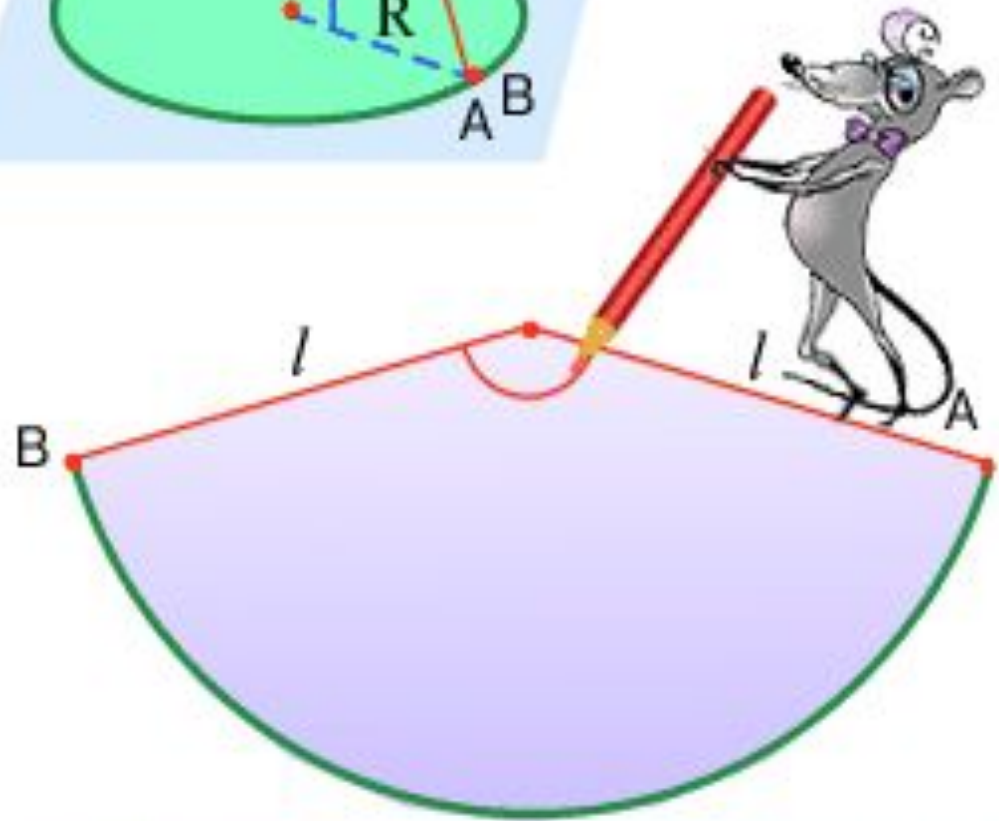
- **Зная угол, образованный высотой и образующей конуса, можно вычислить угол сектора, полученного при развертке конуса, и наоборот.**



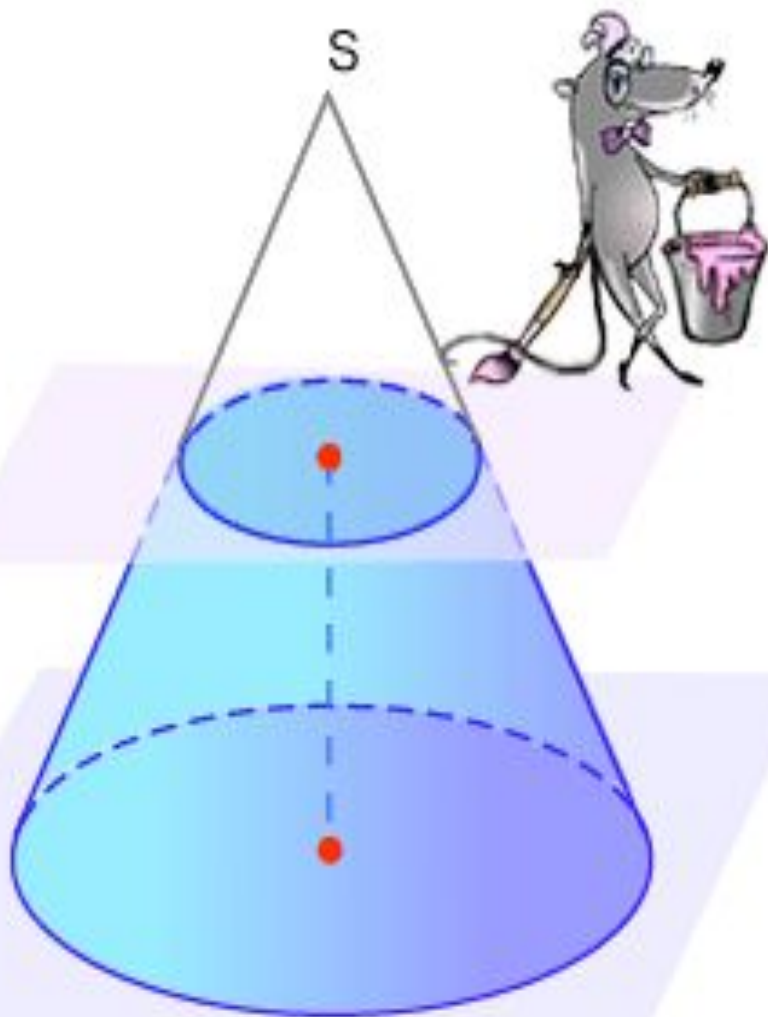
α – угол между высотой и образующей

$$R = l \sin \alpha$$

$$\overset{\frown}{AB} = 2\pi R = 2\pi l \sin \alpha$$

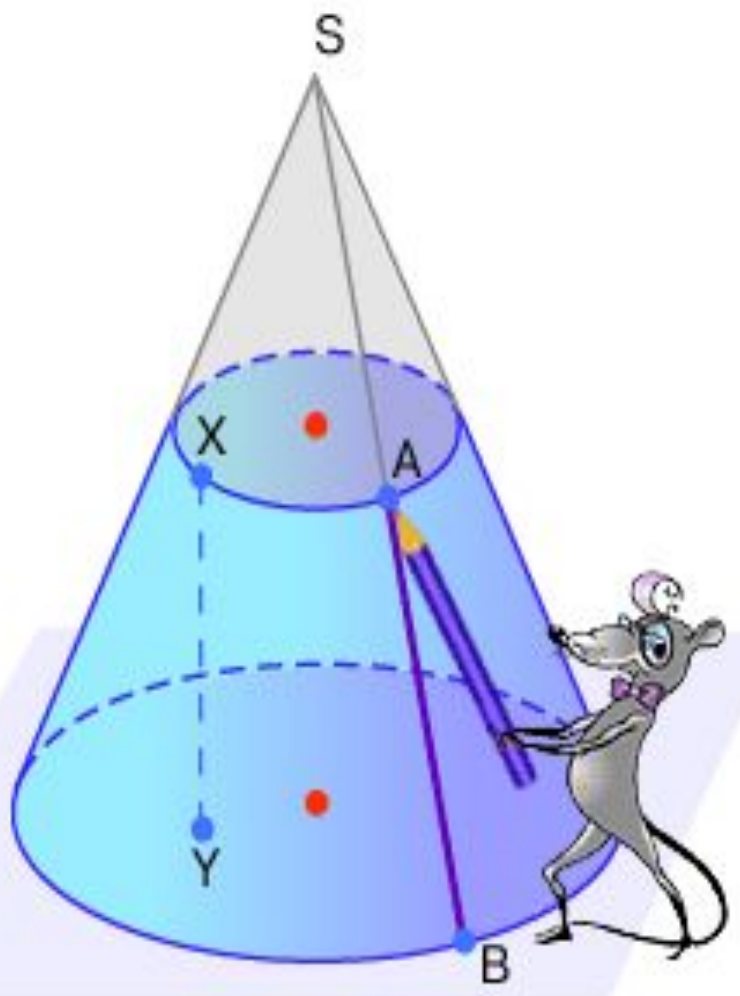
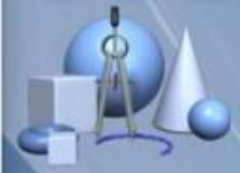


Усеченным конусом



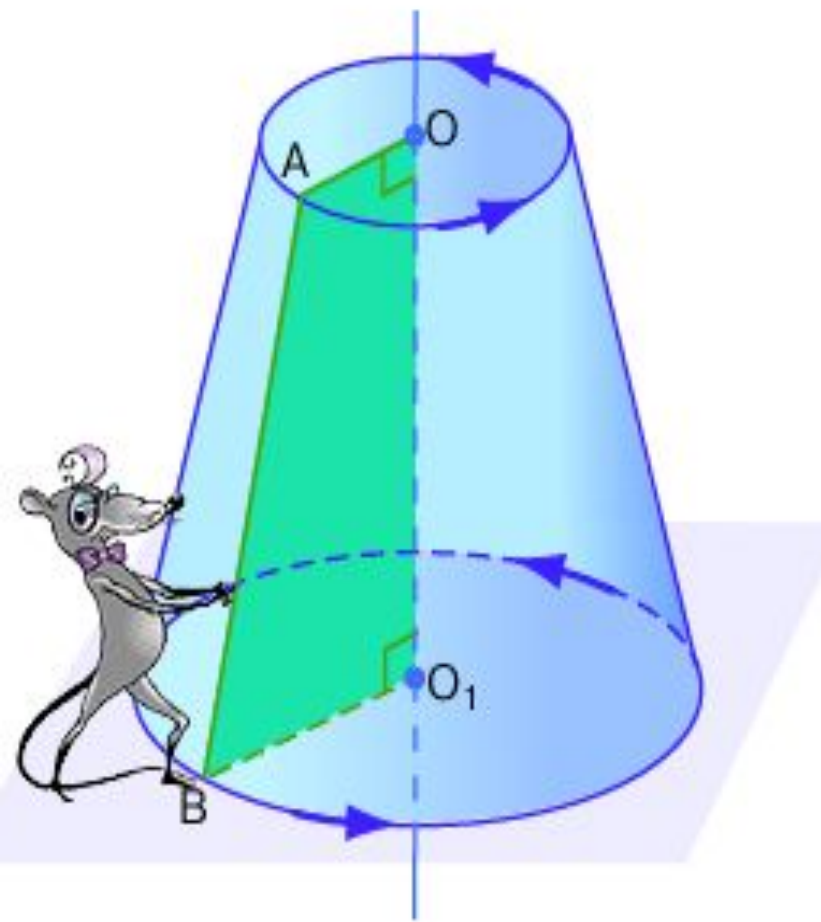
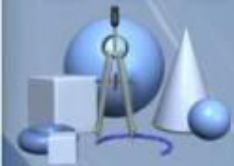
называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями усеченного конуса*.



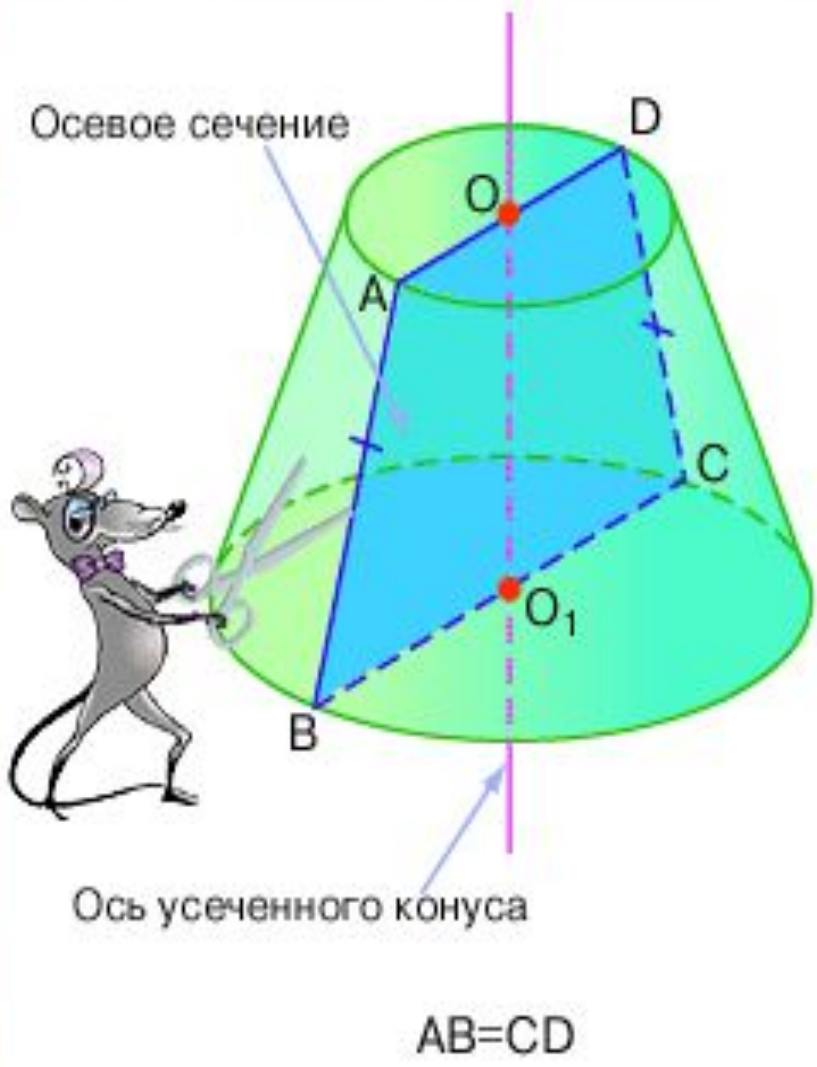
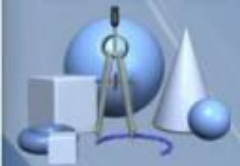
Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между основаниями.



ABO_1O – прямоугольная трапеция

Усеченный конус
можно рассматривать
как тело, *полученное*
при вращении
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основанию.



Прямая, соединяющая центры оснований, называется *осью* усеченного конуса.

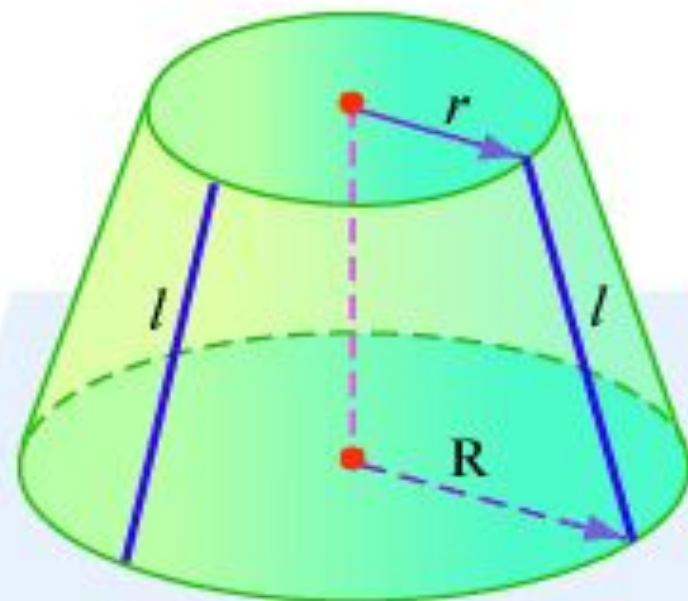
Сечение, проходящее через ось, называется *осевым*.

Осевое сечение является *равнобедренной трапецией*.

Боковая поверхность усеченного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.



Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

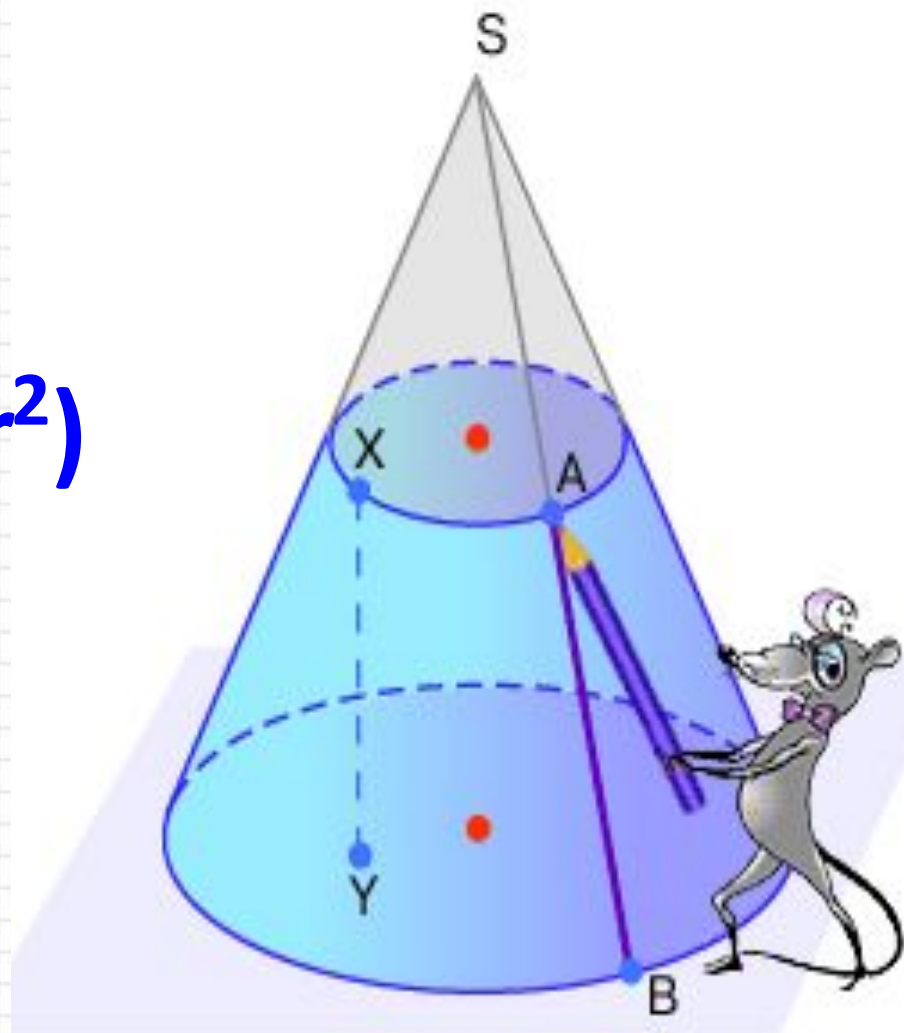


Дано: r – радиус меньшего основания
 R – радиус большего основания
 l – образующая

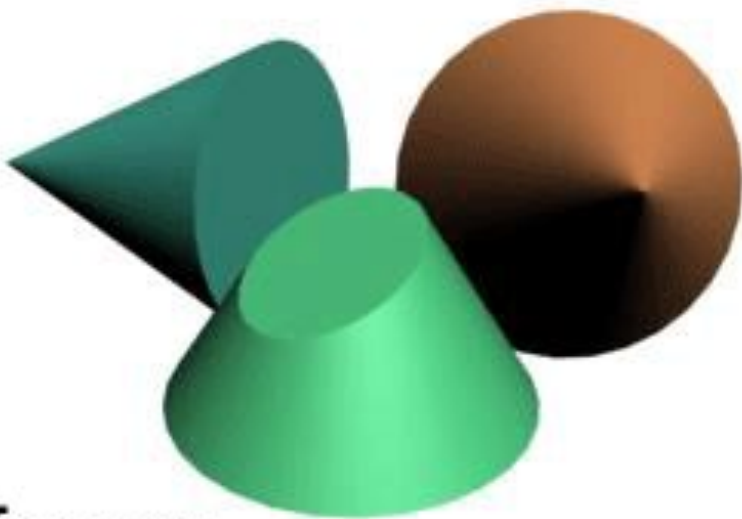
Докажем: $S_{\text{бок}} = \pi(R + r) \cdot l$

Площадь полной поверхности усеченного конуса

$$S_{\text{п}} = \pi(Rl + rl + R^2 + r^2)$$

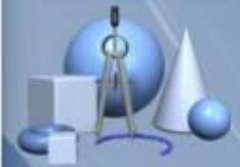


Решение задач



Конус

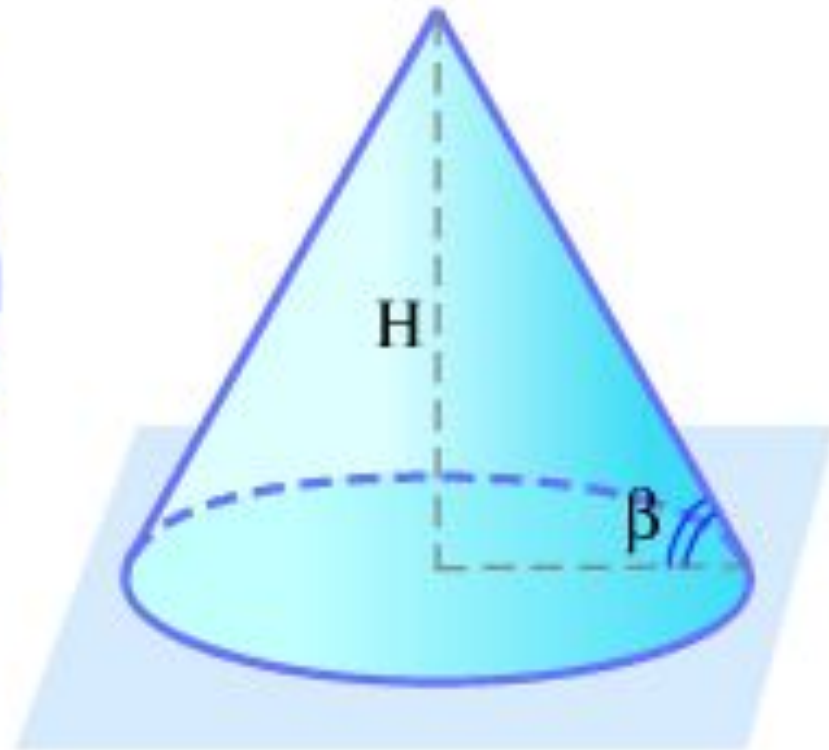
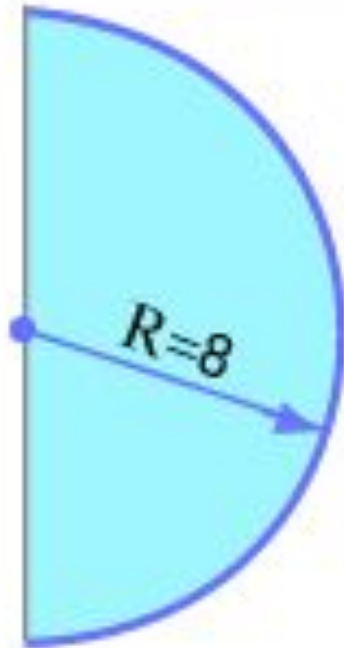




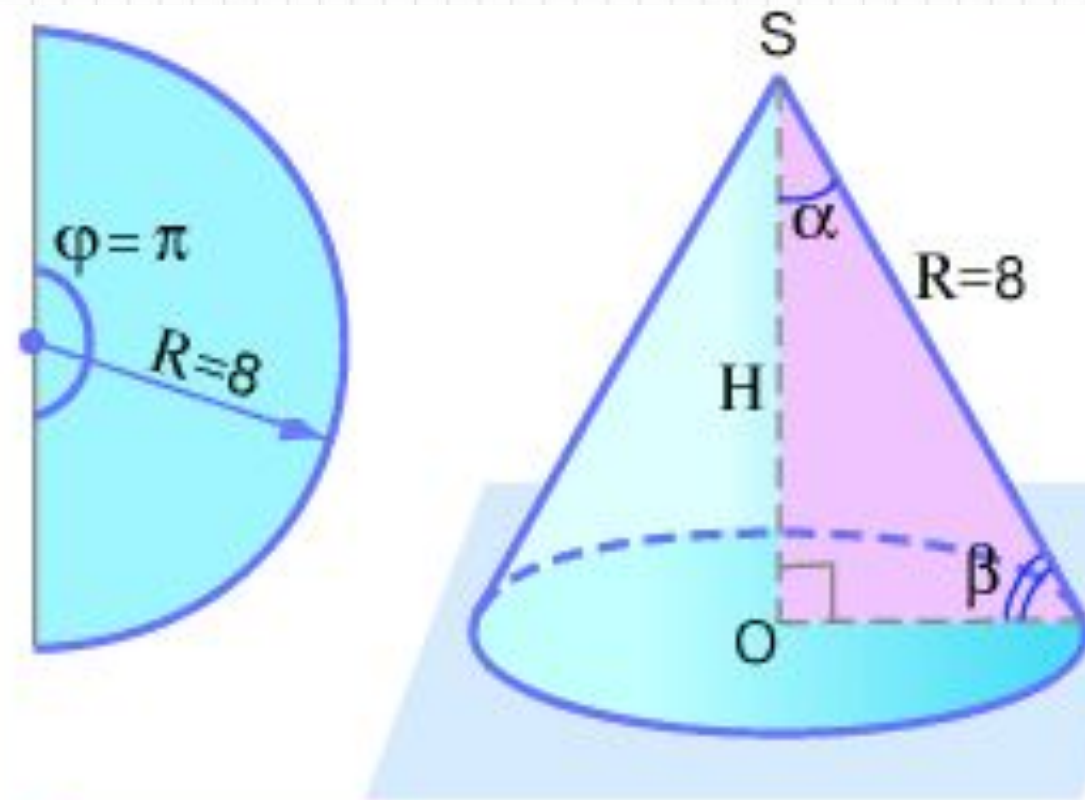
Задача.

Дано: полукруг
радиусом $R = 8$.

Найти: H ,
 β (угол между
образующей и
основанием.)



1) Используем формулу, связывающую угол кругового сектора развертки с углом между высотой и образующей конуса. Получим угол между высотой и образующей, а затем найдем угол между образующей и основанием конуса.



$$\varphi = \pi$$

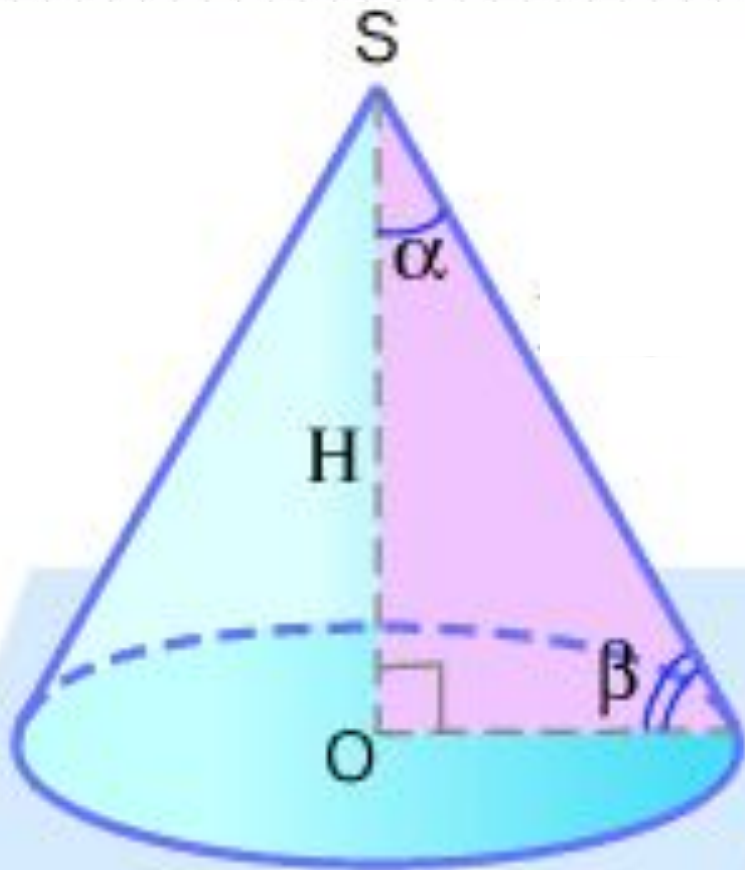
$$\pi = 2\pi \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^{\circ}$$

$$\beta = 90^{\circ} - \alpha = 60^{\circ}$$

2) Найдем высоту конуса, используя определение тангенса угла в прямоугольном треугольнике.

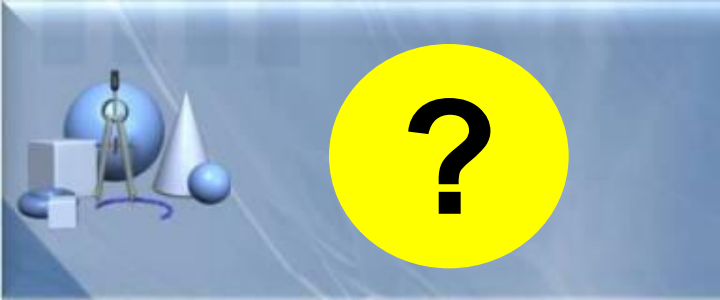


$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{R}$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

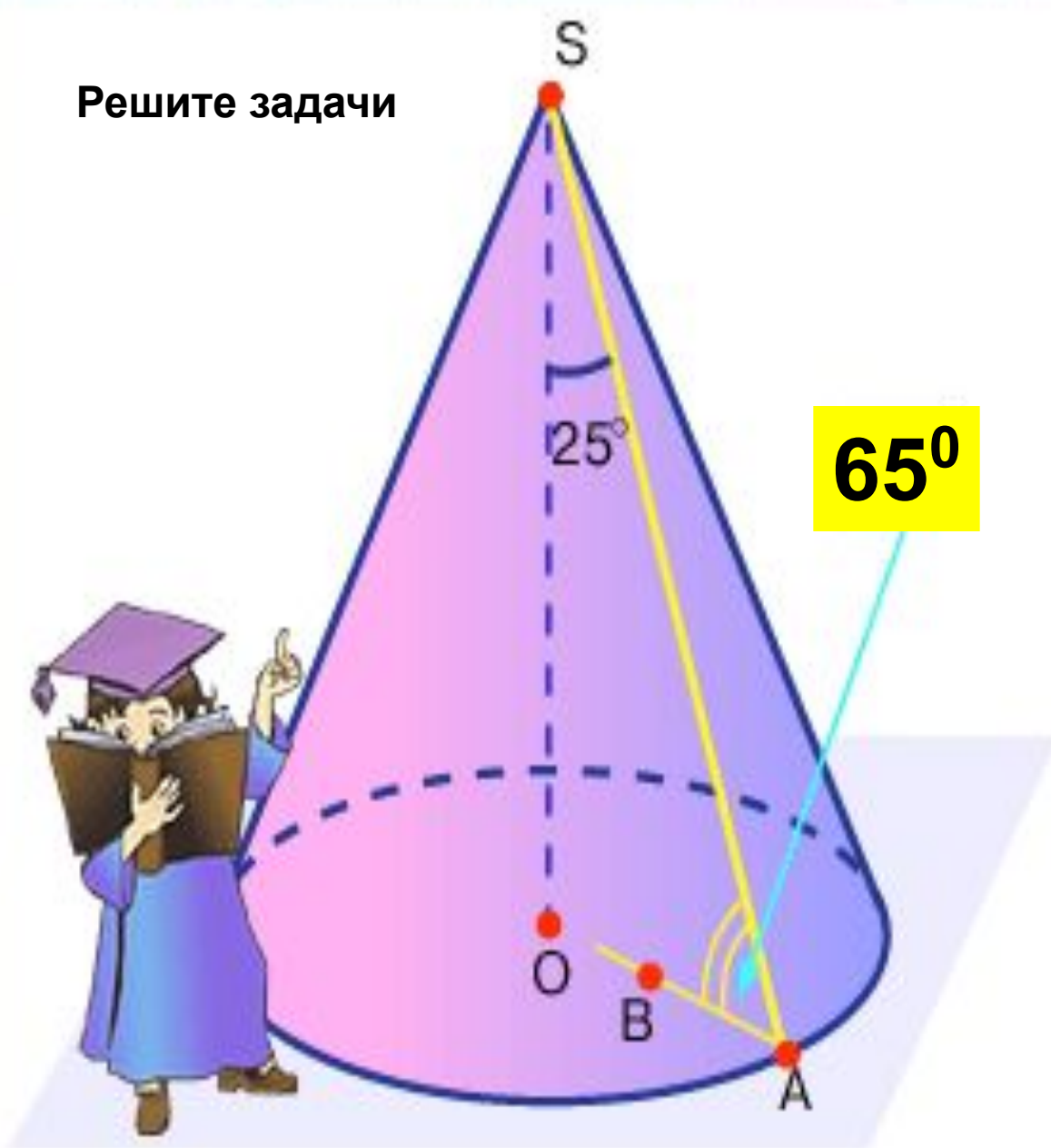
$$H = R \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$H = 8\sqrt{3}$$



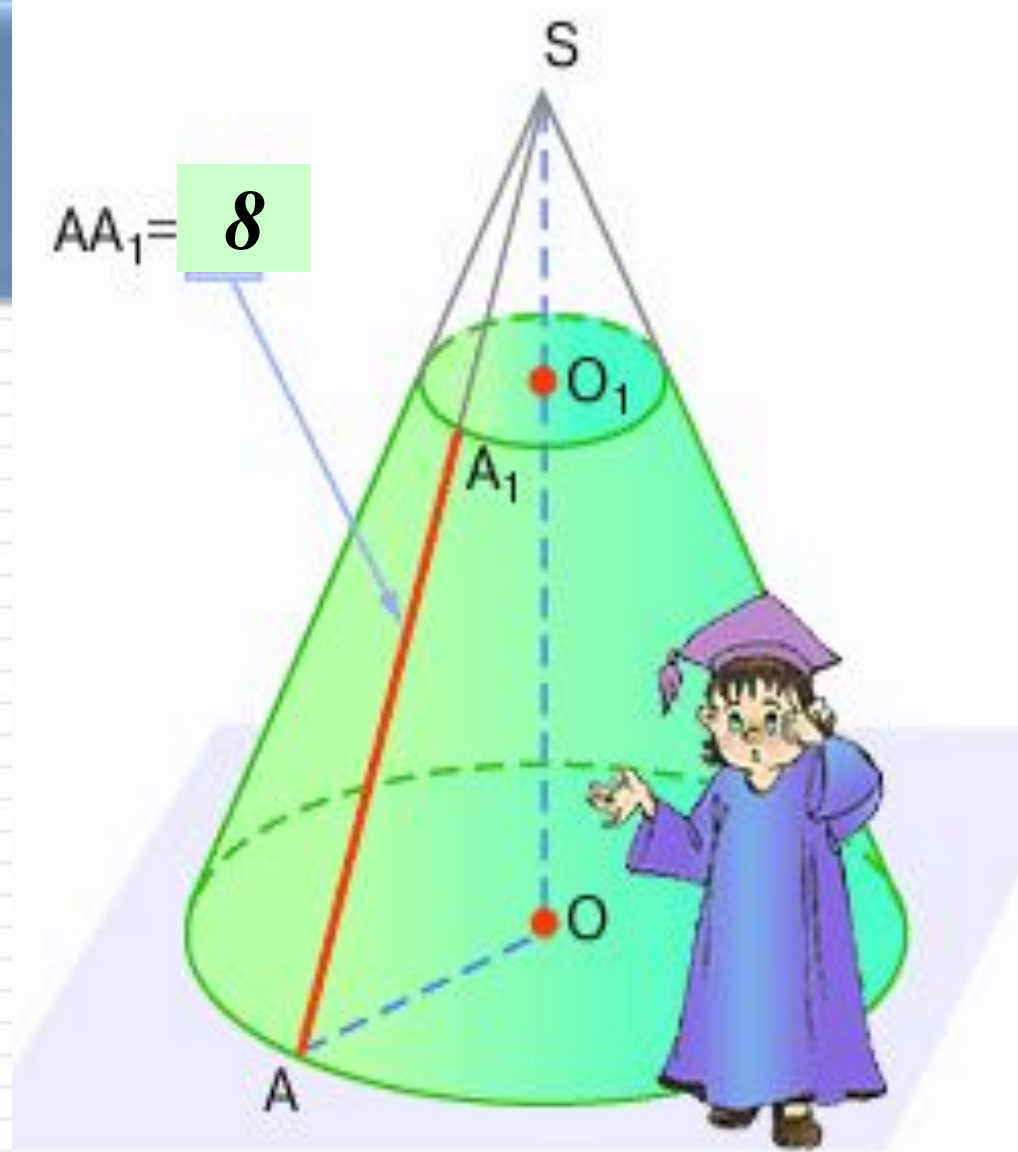
- *Чему равен угол между образующей и основанием конуса, если известен угол между высотой и образующей.*

Решите задачи





Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. *Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?*



$$AA_1 = h$$

$$SO = 9$$

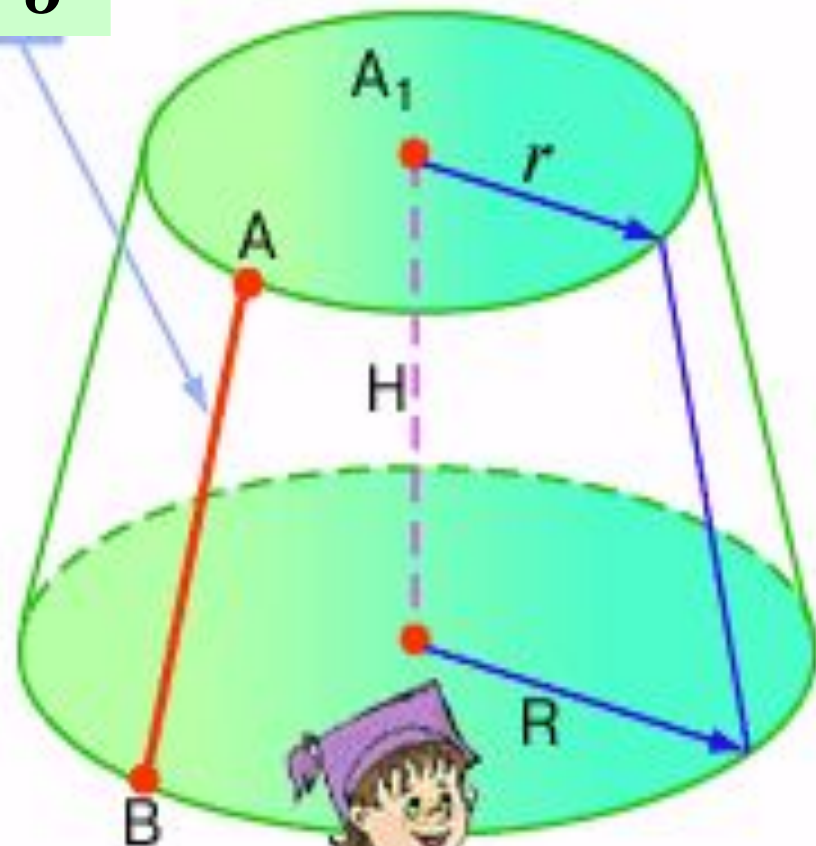
$$SO_1 = 3$$

$$SA = 12$$



$$AB = 8$$

Пусть дан
усеченный конус,
радиусы оснований
и высота которого
известны. *Найдите
образующую
усеченного конуса.*

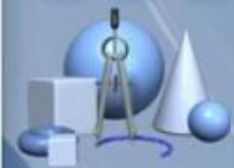


$$r = 5$$

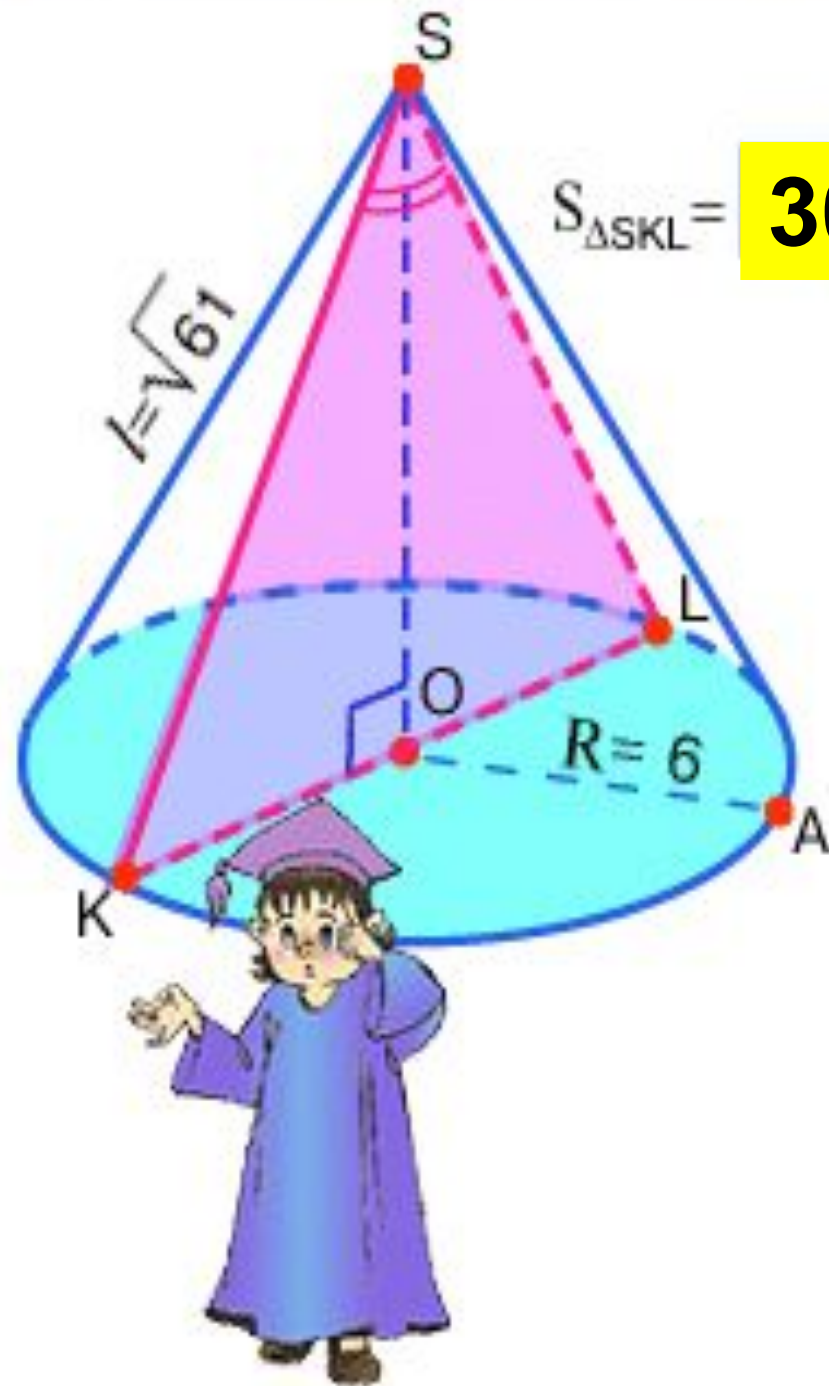
$$R = 7$$

$$H = \sqrt{60}$$



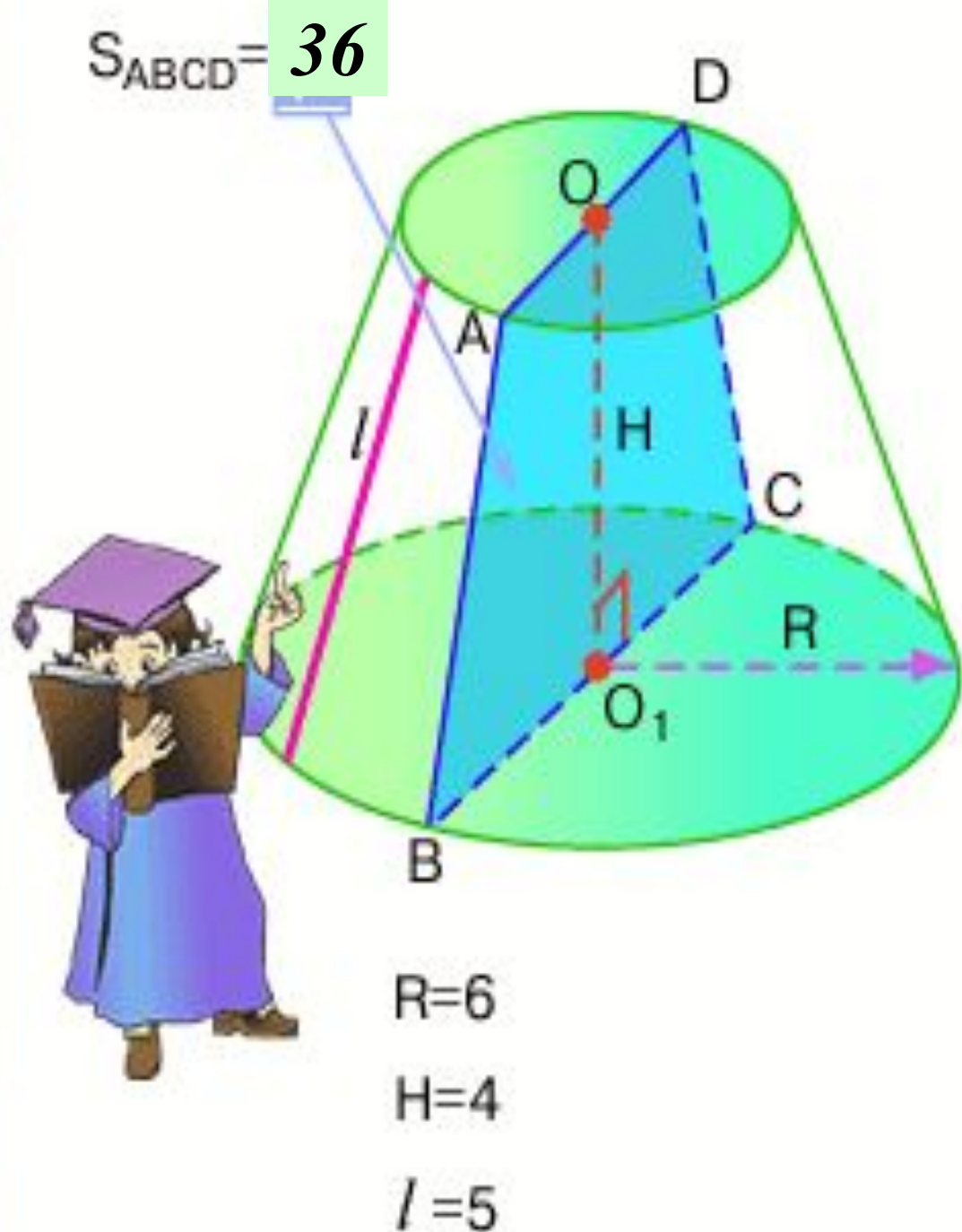


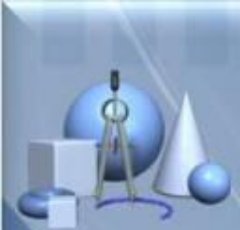
- *Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус основания конуса и образующая.*





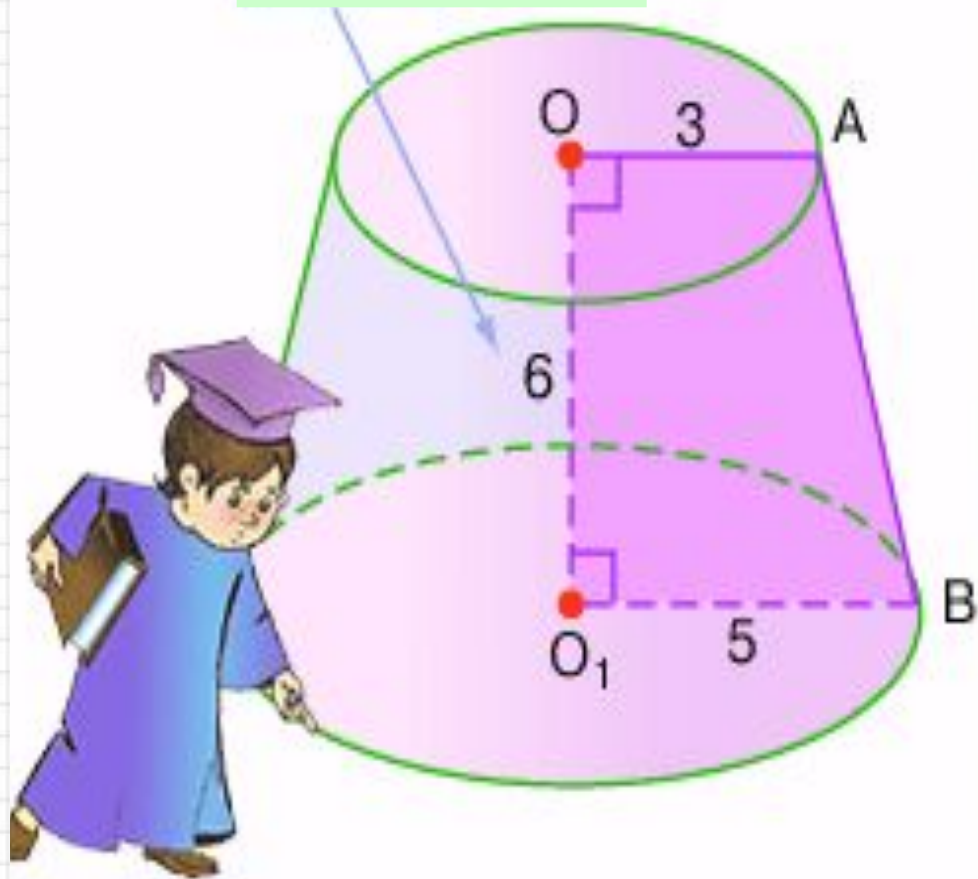
Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус нижнего основания, высота и образующая.





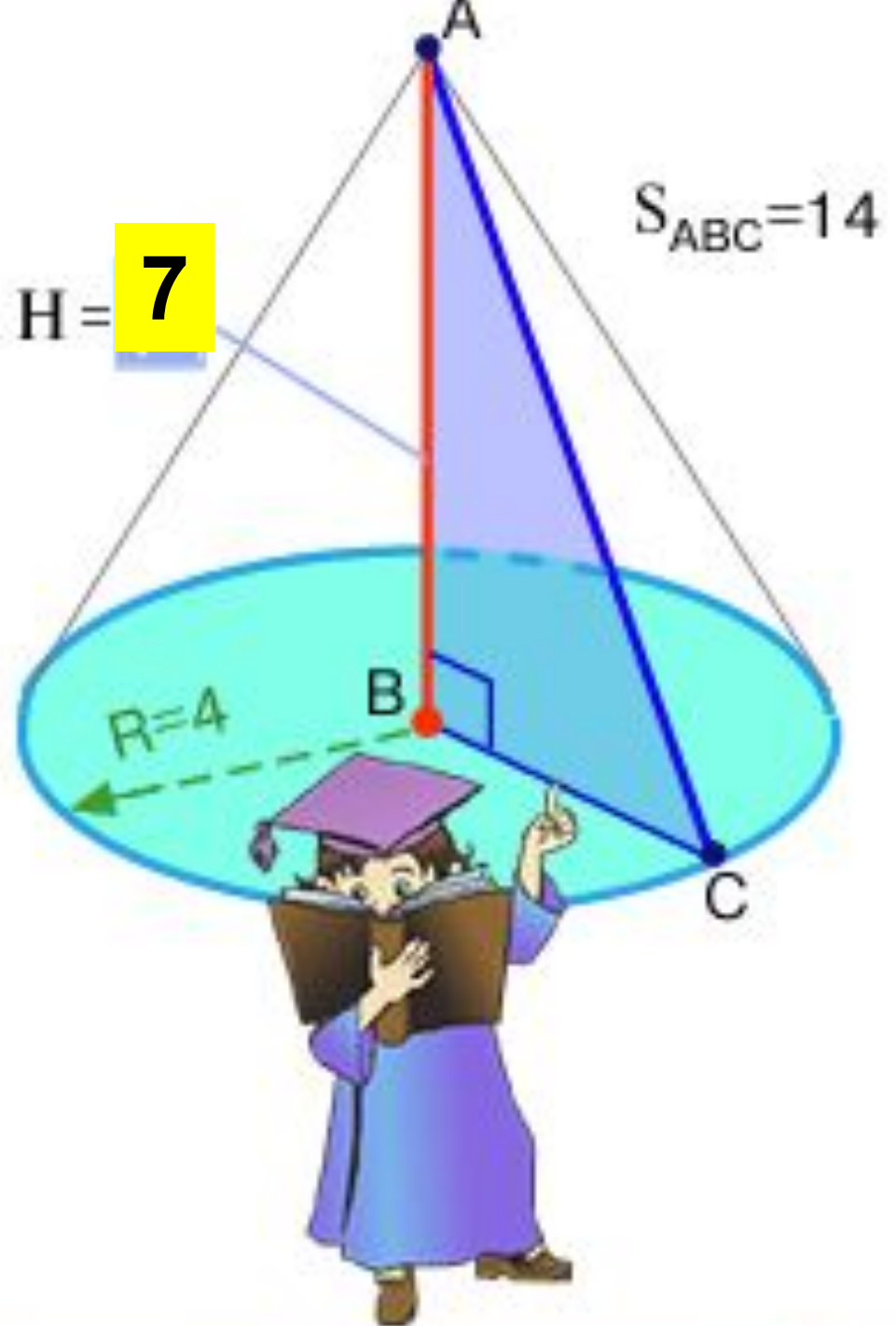
Усеченный конус
получен от вращения
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основаниям. *Найдите
площадь боковой
поверхности усеченного
конуса*, если известны
основания и боковая
сторона трапеции.

$$S_{\text{бок. пов.}} = 16\sqrt{10} \cdot \pi$$





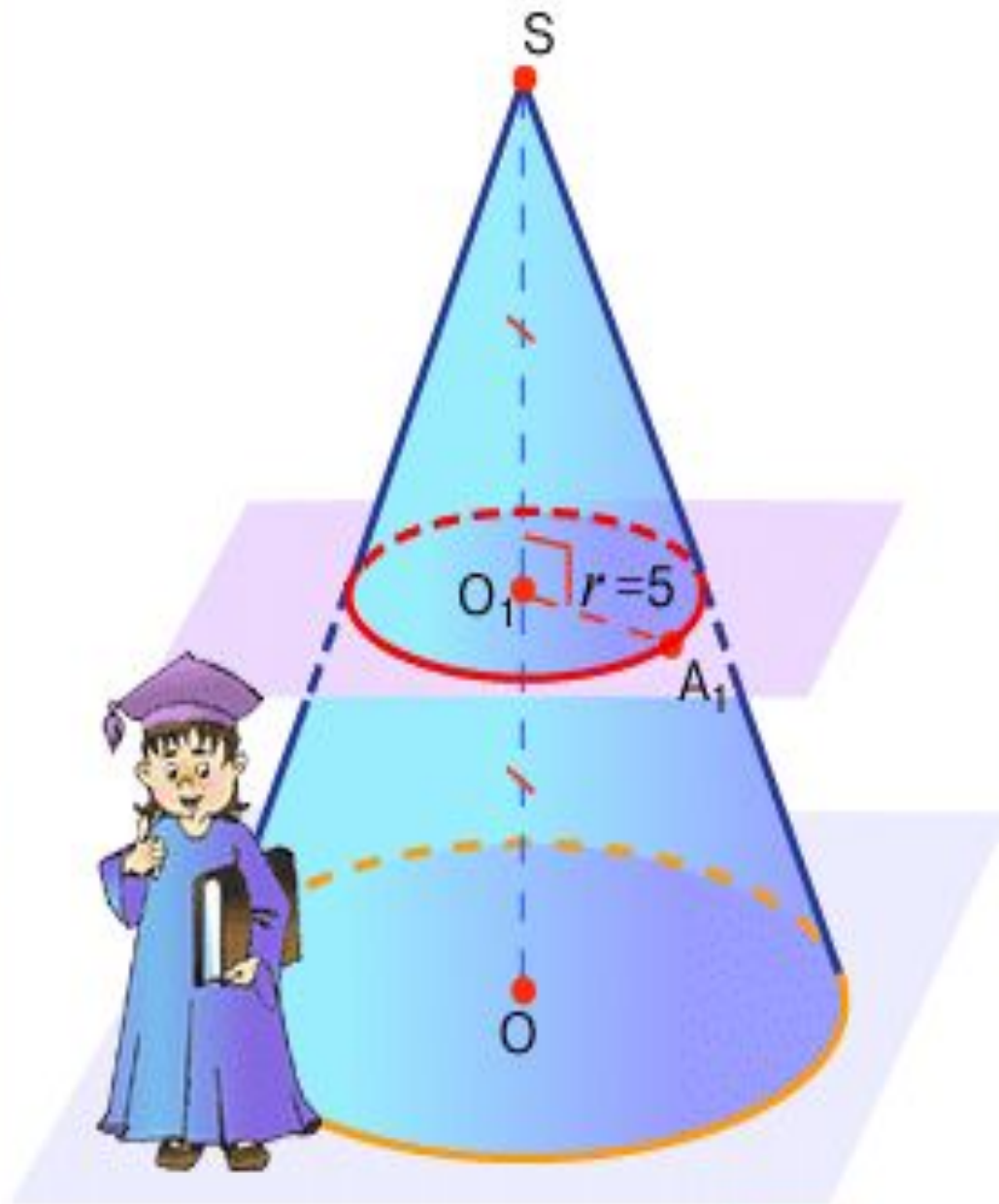
- *Конус получен при вращении прямоугольного треугольника $S = 14$. Радиус основания конуса равен 4. Определите высоту этого конуса.*





?

- *Через середину высоты конуса провели плоскость, перпендикулярную оси, и получили круг $R = 5$. Чему равна площадь основания конуса?*



$$S_{\text{осн}} = 100\pi$$



- Пусть конус будет получен от вращения прямоугольного треугольника с известными катетами.
Найдите боковую поверхность этого конуса.

$$S_{\text{бок.кон}} = 20\pi$$

