

**«Методика
формирования понятия
«рациональное число» в
основной школе»**

ПЛАН

Введение

Глава 1. Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

- 1. Особенности формирования математических понятий**
- 2. Закономерности формирования понятия «рациональное число»**
- 3. О роли задачного материала в формировании понятия рационального числа**
- 4. Логико-дидактический анализ учебников**
 - 4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.**
 - 4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.**

Выводы по главе 1.

ПЛАН

Глава 2 Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

2.2 Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа»

Выводы по главе 2

Заключение

АКТУАЛЬНОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

- В настоящее время исследователи математического образования единогласно говорят о важности формирования этого важного математического понятия.

- Кроме того, согласно Концепции развития математического образования, предложенной в 2013 г., математическая подготовка выпускников должна быть «достаточна для продолжения образования ... и для практической деятельности». Таким образом, обучение измерению объектов, нахождению части от целого, перевод из одной величины в другую, нахождение концентрации, действие с пропорциями – все это ценный опыт осуществления уже известных обществу способов деятельности, который важно передать последующим поколениям
- Таким образом, можно заметить, что формирование у учащихся понятия «рациональное число» в основной школе – не только *актуальная* методическая задача, но и одно из важных требований Федерального стандарта образования.

ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования является процесс обучения математике, ориентированный на целостное развитие личности каждого ученика.

Предметом исследования являются закономерности формирования понятия «рациональное число» на уровне основного общего образования.

Целью выпускной квалификационной работы является выявление закономерностей формирования понятия «рациональное число» и их практическая реализация.

ВВЕДЕНИЕ

Для достижения поставленной цели нами были выделены следующие *задачи*:

-
- 1) провести анализ научной литературы с целью выявления особенностей формирования математических понятий;
 - 2) провести анализ методической литературы с целью выявления методических идей и закономерностей формирования понятия «рациональное число»;
 - 3) выполнить логико-дидактический анализ темы в современных школьных учебниках математики;
 - 4) сконструировать уроки с использованием выявленных закономерностей и методических идей.

ВВЕДЕНИЕ

Основным *методом исследования* стал теоретический анализ литературы.

Практическая значимость определяется возможностью использования результатов работы в учебном процессе на уроках математики.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

• 1. Особенности формирования математических понятий

Любое математическое понятие характеризуется объемом и содержанием. *Объем* понятия есть множество классов изучаемых объектов данного понятия. *Содержание* – множество всех существенных признаков (свойств) данного понятия – таких свойств изучаемого объекта, каждый из которых необходим, а все вместе достаточны для характеристики объекта.

Введение определения может осуществляться двумя методами: *конкретно-индуктивным* (на основе рассмотрения конкретных примеров или задач приходят к новому понятию и его определению) или *абстрактно-дедуктивным* (определение понятия формулируется сразу после объявления нового термина).

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

- 1. Особенности формирования математических понятий

Виды определений	Характеристика
Формально-логические	Определение вводится через указание ближайшего рода и видовых отличий
Конструктивные (генетические)	Определение вводится через описание или указание способа происхождения, образования, возникновения, построения объекта.
Индуктивные (рекурсивные)	Определение вводится через указание: а) исходных или элементарных объектов системы; б) правил или операций, позволяющих из имеющихся объектов образовывать новые объекты системы
Аксиоматические	Понятие и соответствующий класс математических объектов фиксируются системой аксиом

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

- 1. Особенности формирования математических понятий

Вывод: в формировании математического мышления роль понятий первостепенная.

Критерии сформированности понятия: речевое воспроизводство определения и умение решать задачи на применение этого понятия.

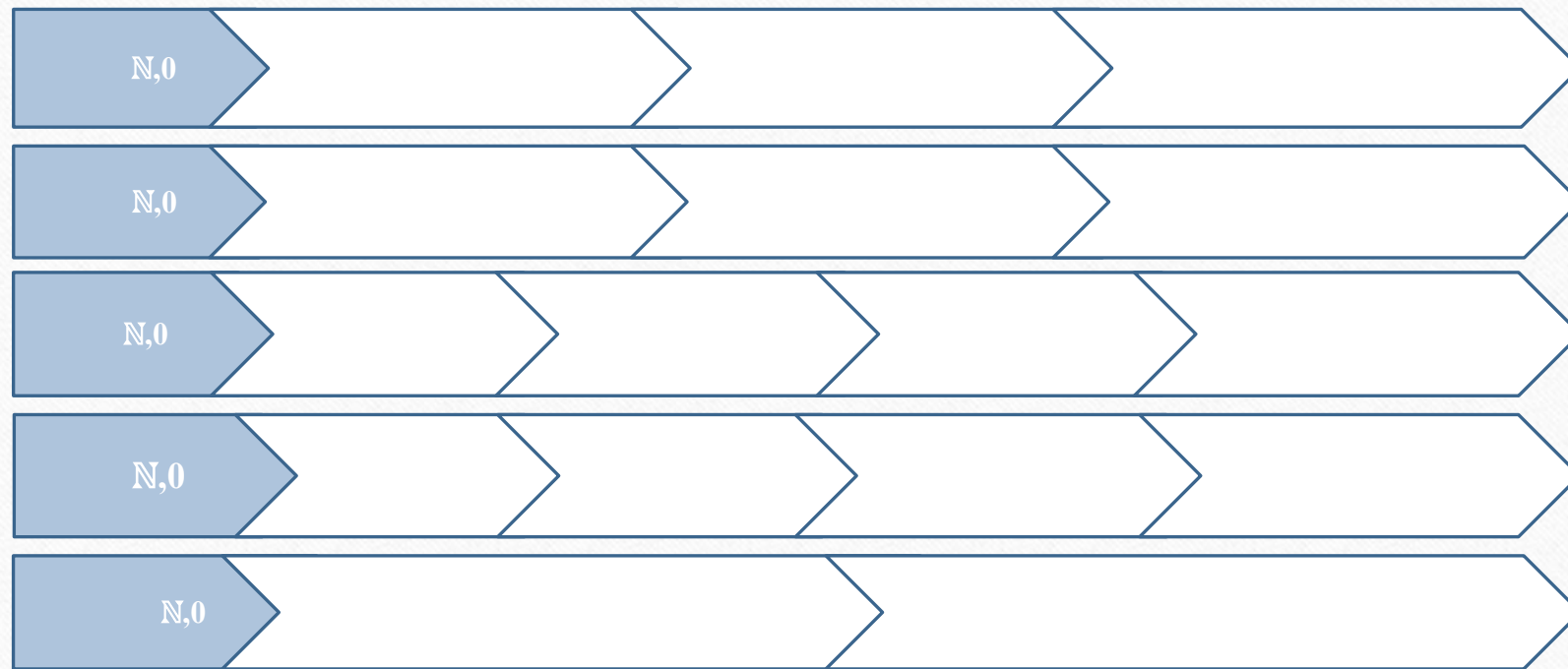
ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2. Закономерности формирования понятия «рациональное число»

- В методике обучения математике (МОМ) сформировалась отдельная содержательно-методическая линия – линия развития числа.
- Основными этапами изучения любой числовой системы являются:
 - введение «новых» чисел;
 - сравнение чисел;
 - изучение действий с числами;
 - изучение законов и свойств этих действий.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Варианты последовательности построения множества рациональных чисел в ШКМ



ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2. Закономерности формирования понятия «рациональное число»

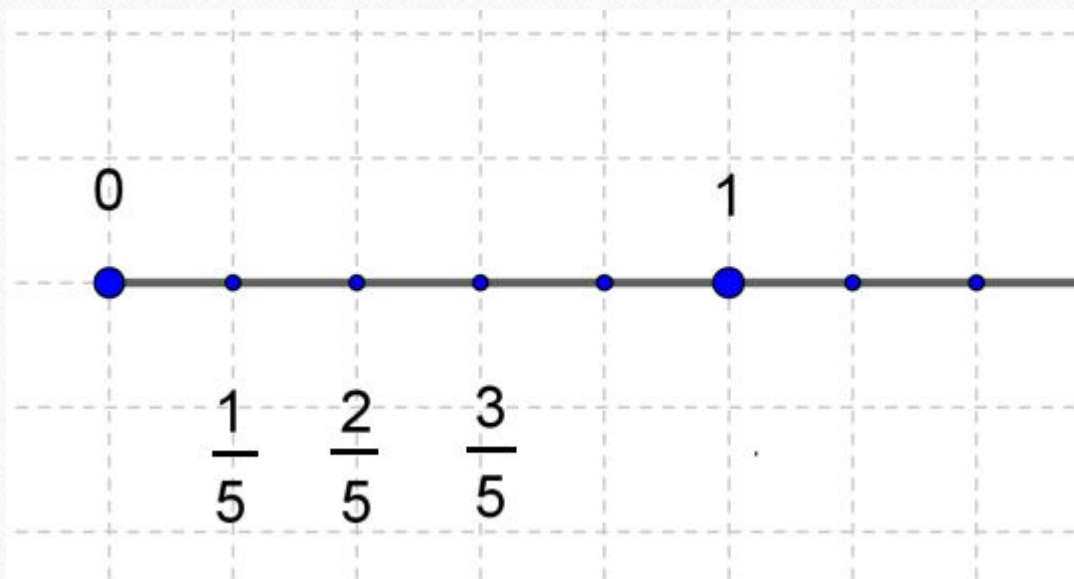
Большое значение придается моделям \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .

Система \mathbb{Q} в общеобразовательном курсе математики представлена тремя моделями:

- *геометрической*
- *алгебраической*
- *арифметической*

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Представление рациональных чисел на числовом луче
(геометрическая модель \mathbb{Q})



ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Алгебраическая модель \mathbb{Q}

Уравнение вида $a \cdot x = b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$) разрешимо, то есть на множестве рациональных чисел существует его корень $x = a^{-1} \cdot b$. Этот корень формально обозначается как $\frac{b}{a}$ и называется обыкновенной дробью.

Тогда множеством рациональных чисел будем называть множество вида

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \mid b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N} \right\},$$

на котором рассматривается отношение равносильности:

$$\frac{b}{a} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \cdot d = a \cdot c.$$

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Арифметическая модель \mathbb{Q}

Любое рациональное число q может быть представлено в виде систематической записи его разложения по положительным и отрицательным степеням основания системы счисления:

$$q = a_0 a_1 \dots a_n, b_0 b_1 \dots b_k = \\ a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot 10^1 + a_n \cdot 10^0 + \\ + b_0 \cdot 10^{-1} + b_1 \cdot 10^{-2} + \dots + b_k \cdot 10^{-(k+1)}$$

-представление конечной десятичной дроби.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Единая теория, объединяющей все три модели

Возникает проблема соответствия представлений одного и того же числа в арифметической и алгебраической записи, например $\frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1}$

$$3x = 2$$

$$x = 0,66666 \dots$$

Попытка установления такого соответствия приводит к понятию бесконечной периодической десятичной дроби:

$$q = a_0 a_1 \dots a_n, b_0 b_1 \dots b_k (c_1 \dots c_m), \text{ где } (c_1 \dots c_m)\text{- период.}$$

А значит, в арифметической модели \mathbb{Q} рациональное число – это конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

**Единая теория, объединяющей все три модели
свойства множества \mathbb{Q} :**

1) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, а сложение и умножение являются алгебраическими операциями;

2) $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ – поле.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

**Единая теория, объединяющей все три модели
свойства множества \mathbb{Q} :**

- 1) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, а сложение и умножение являются алгебраическими операциями;
- 2) $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ – поле.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

- **Вывод.** Формирование понятия рационального числа целесообразно осуществлять в *закономерной* последовательности построения модельных представлений и последующего построения теории \mathbb{Q} . Таким образом, модельно-теоретический подход к проектированию учебной математической деятельности в пространстве чисел выступает методической закономерностью теории \mathbb{Q} в общеобразовательном курсе математики.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

3. О роли задачного материала в формировании понятия рационального числа

Задача 3 (Барыбин К.С.). Найти изменение температуры за каждые два часа от 8 до 22 ч по следующей таблице

Время (ч)	8	10		12	14	16	18	20	22
Температура (°C)	8	11		15	16	16	13	10	8

Примем начальную температуру за начало отсчета (за нуль). Нуль характеризует отсутствие изменения температуры. Тогда таблица примет вид:

Время (ч)	8	10	12	14	16	18	20	22
Изменение температуры (°C)	0	Больше на 3	Больше на 4	Больше на 1	Не измен.	Меньше на 3	Меньше на 3	Меньше на 2

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

3. О роли задачного материала в формировании понятия рационального числа

Чтобы не употреблять слов «больше», «меньше», будем характеризовать направление знаками «+» и «-», где увеличению температуры соответствует плюс, а уменьшению – минус. Тогда таблица примет вид:

Время (ч)	8	10	12	14	16	18	20	22
Изменение температуры (°C)	0	+3	+4	+1	0.	-3	-3	-2

В последней таблице удобно судить и о количественной стороне и о направлении изменения температуры.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Содержание некоторых тем программы по математике в учебнике Мордковича А.Г., Зубаревой И.И. для 5 класса

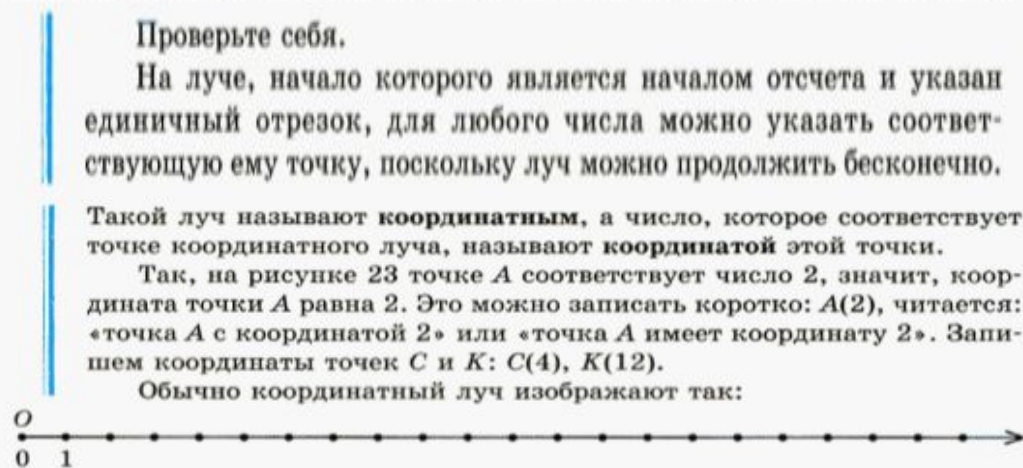
Название темы	Содержание темы	Количество часов
Обыкновенные дроби	Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями: сложение и вычитание дробей с одинаковыми и разными знаменателями (простейшие случаи), умножение и деление обыкновенной дроби на натуральное число. Нахождение части от целого и целого по его части в два приема.	32
Десятичная дробь	Сравнение десятичных дробей. Арифметические действия с десятичными дробями. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и обыкновенной в виде десятичной.	28
Проценты	Нахождение процента от величины, величины по ее проценту	7
Координаты	Координатный луч. Изображение чисел точками координатного луча	2

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Учебник для 5 класса



Представление геометрической модели \mathbb{N} Мордковича А.Г., Зубаревой И.И. для 5 класса

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Учебник для 5 класса

387. Запишите двумя способами, в виде смешанного числа и в виде неправильной дроби, какая часть фигур закрашена на рисунке 66.

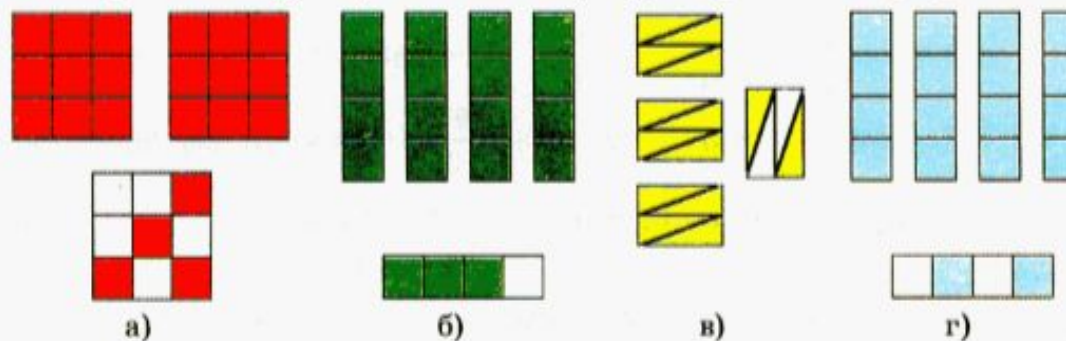


Рис. 66

Задание 387 из учебника
Мордковича А.Г., Зубаревой И.И. для 5 класса

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Содержание некоторых тем программы по математике в учебнике Мордковича А.Г., Зубаревой И.И. для 6 класса

Название темы	Содержание темы	Количество часов
Рациональные числа	Целые числа: положительные, отрицательные и нуль. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий: переместительный, сочетательный, распределительный. Проценты. Нахождение процента от величины, величины по проценту, процентного отношения. Задачи с разными процентными базами. Отношение, выражение отношения в процентах. Пропорция. Пропорциональные и обратно пропорциональные величины.	40
Дроби	Арифметические действия с обыкновенными дробями: сложение и вычитание дробей с разными знаменателями (случаи, требующие применения алгоритма отыскания НОК), умножение и деление обыкновенных дробей. Нахождение части от целого и целого по его части в один прием.	40
Координаты	Координатная прямая. Изображение чисел точками координатной прямой. Геометрический смысл модуля числа. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч. Формула расстояния между точками координатной прямой. Декартовы координаты на плоскости.	8

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

2) Чтобы найти значения данных выражений с помощью координатной прямой, рассматриваем перемещение точки в первом задании от точки с координатой $(+6)$ (рис. 45), во втором — от точки с координатой (-4) (рис. 46).

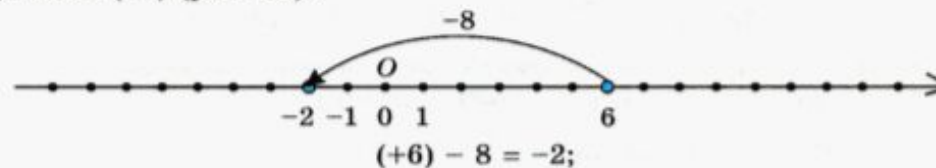


Рис. 45

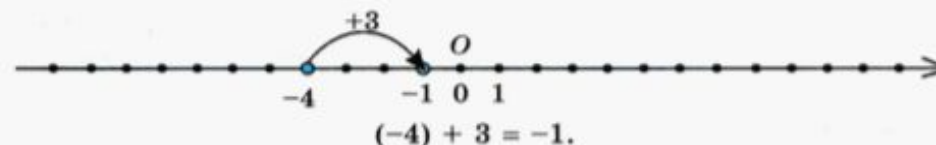


Рис. 46

Действия на координатной прямой (фрагмент учебника Мордковича А.Г., Зубаревой И.И. для 6 класса)

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

1) Если слагаемые имеют одинаковые знаки, то сумма имеет тот же знак, что и слагаемые, а модуль суммы равен сумме модулей слагаемых.

2) Если слагаемые имеют разные знаки, то сумма имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем, а модуль суммы равен разности модулей слагаемых при условии, что из большего модуля вычитается меньший.


Правило вычисления значения алгебраической суммы

(фрагмент учебника Мордковича А.Г., Зубаревой И.И. для 6 класса)

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников


4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Группы задач	Номера заданий	Примеры задач
Задачи на пропорции	1035-1036, 1052-1065, 1068-1070, 1072, 1077	1052. За 6 кг товара заплатили 420 р. Какова стоимость 20,4 кг этого товара? Ответьте на вопросы и выполните задания. 1) О каких величинах идет речь в задаче? Есть ли среди них пропорциональные или обратно пропорциональные величины? 2) Обозначьте стоимость 20,4 кг товара буквой x и составьте уравнение. 3) Решите полученное уравнение и ответьте на вопрос задачи.
Задачи на проценты, смеси и сплавы	609, 803, 844, 972, 974, 979, 984, 987, 988, 1046, 1083, 1084, 1091, 1092	974. Со склада в первый день отпустили угля на 12 т, или в 1,3 раза меньше, чем во второй день, а в третий день — 37,5% того, что было отпущено за первые два дня. Сколько тонн угля отпускали каждый день?
Задачи на движение	599, 600, 972, 928, 940-941, 971, 1030, 1033, 1037(1), 1038, 1042, 1049, 1074, 1078, 1085-1089	 927. Составьте уравнение по условию задачи. Катер прошел 15 км по течению реки и вернулся обратно, затратив на весь маршрут 1 ч 30 мин. Какова скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 19 км/ч? <i>Подсказка.</i> 1) Обозначьте буквой x скорость течения реки. 2) Выразите: скорость катера по течению; скорость катера против течения; время в пути по течению; время в пути против течения; время, затраченное на весь маршрут.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Задачи на работу	874, 875, 1016, 1039-1040, 1090	875. Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из резервуара за 6 ч. Первый насос, работая один, может откачать эту воду за 15 ч. За сколько часов сможет откачать воду из резервуара второй насос, если будет работать только он?
Задачи с геометрическим содержанием	738, 760, 802, 871, 872, 986, 1032	802. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, длина которого 6 дм, ширина — 4 дм, а высота — 2,5 дм, наполнен водой на 80%. Когда воду из этого аквариума перелили в другой, длина основания которого 0,8 м, а ширина — 0,2 м, то второй аквариум оказался полностью заполнен водой. Найдите высоту второго аквариума. 
Разные задачи	595-598, 601-603, 730, 731, 733, 734, 761-763, 801, 804, 843, 942, 943, 975, 978, 985, 1031, 1037(2), 1073, 1075, 1079-1080, 1093	1079. Продано 34 кг яблок и хурмы. Определите, сколько продано яблок и сколько хурмы, если известно, что яблоки дороже хурмы в 2,4 раза и за все яблоки выручено столько же денег, сколько за хурму. 985. За ремонт станка рабочий и его ученик получили 180 р. Сколько получил каждый, если рабочий получил в 2 раза больше, чем ученик?
Задачи на нахождение чисел по результатам операций над ними	766-767, 806, 845, 847-849, 857-859, 989, 1050	989. Пять чисел относятся между собой как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Найдите эти числа, зная, что: а) сумма первого числа и третьего равна 40; б) разность пятого и второго чисел равна 51.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

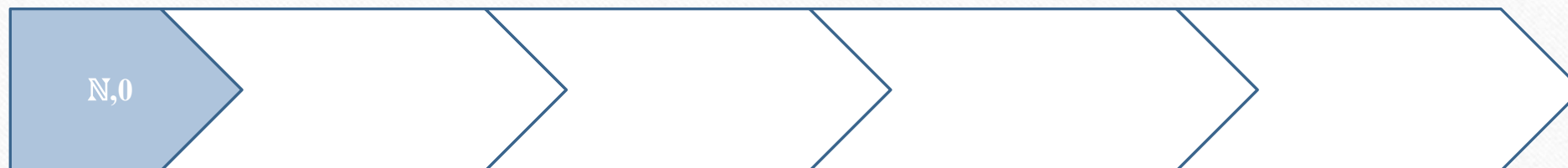
4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Задачи на анализ и составление диаграмм	1022-1028	<p>1027. Постройте столбчатую диаграмму, отражающую результаты ответов на вопрос «Сколько времени в день вы уделяете чтению художественной литературы?», отмечая по вертикальной оси время, а по горизонтальной — возраст опрашиваемых:</p> <table border="1" data-bbox="1312 668 1875 865"><thead><tr><th>Возраст, лет \ Пол</th><th>10—15</th><th>16—20</th><th>21—25</th><th>26—30</th></tr></thead><tbody><tr><th>Мужской</th><td>1 ч</td><td>1,5 ч</td><td>2,3 ч</td><td>2,7 ч</td></tr><tr><th>Женский</th><td>2,5 ч</td><td>2,9 ч</td><td>1,2 ч</td><td>0,8 ч</td></tr></tbody></table> <p>Проанализируйте построенную диаграмму.</p>	Возраст, лет \ Пол	10—15	16—20	21—25	26—30	Мужской	1 ч	1,5 ч	2,3 ч	2,7 ч	Женский	2,5 ч	2,9 ч	1,2 ч	0,8 ч
Возраст, лет \ Пол	10—15	16—20	21—25	26—30													
Мужской	1 ч	1,5 ч	2,3 ч	2,7 ч													
Женский	2,5 ч	2,9 ч	1,2 ч	0,8 ч													
Задачи на нахождение части от целого и целого по его части	614-637, 645-647, 681, 688-689, 729, 1017, 1018	<p>614. Длина туристического маршрута — 84 км. В первый день туристы прошли $\frac{2}{7}$ всего пути. Какое расстояние прошли туристы в первый день?</p>															

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.



Последовательность построения множества рациональных чисел в учебниках Мордковича А.Г. и Зубаревой И.И

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.1 Анализ линии учебников Мордковича А.Г.

Вывод: в учебниках Мордковича А.Г. и Зубаревой И.И. большое внимание уделяется пропедевтике понятия рационального числа. Для введения понятий предлагаются целесообразные задачи. В целом, задачный материал учебника отличается разнообразием, в особенности это касается текстовых задач, направленных на оперирование рациональными числами. В теоретическом материале представлены все модели системы \mathbb{Q} . Авторы учитывают закономерности формирования понятия «рациональное число», заключающейся в движении его исследования от модельных представлений к теоретическим. Однако, развитие этого понятия не находит своего отражения на уровне теории \mathbb{Q} . Теоретические особенности пространства \mathbb{Q} не выделены. Предполагается их интуитивное восприятие и осознание учащимися в процессе учебной математической деятельности.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.

Содержание темы «Обыкновенные дроби» учебника

Никольского С.М. и др. для 5 класса

Название темы	Содержание темы	Количество часов
Обыкновенные дроби	Равенство дробей. Задачи на дроби. Приведение дробей к общему знаменателю. Сравнение дробей. Сложение дробей. Законы сложения. Вычитание дробей. Умножение дробей. Законы умножения. Распределительный закон. Деление дробей. Нахождение части целого и целого по его части. Задачи на совместную работу. Понятие смешанной дроби. Сложение смешанных дробей. Вычитание смешанных дробей. Умножение и деление смешанных дробей. Представление дробей на координатном луче.	65

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.

На рисунке 162 изображён отрезок AB , разделённый на 9 равных частей. Если принять длину отрезка AB за 1, то $AC = \frac{2}{9}$, $CD = \frac{3}{9}$, $AD = \frac{5}{9}$. Длина отрезка AD равна сумме длин отрезков AC и CD :

$$AC + CD = AD, \text{ т. е. } \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}.$$

Рис. 162



Введение операции сложения двух дробей

с общим знаменателем (учебник Никольского С.М. и др. для 5 класса)

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.

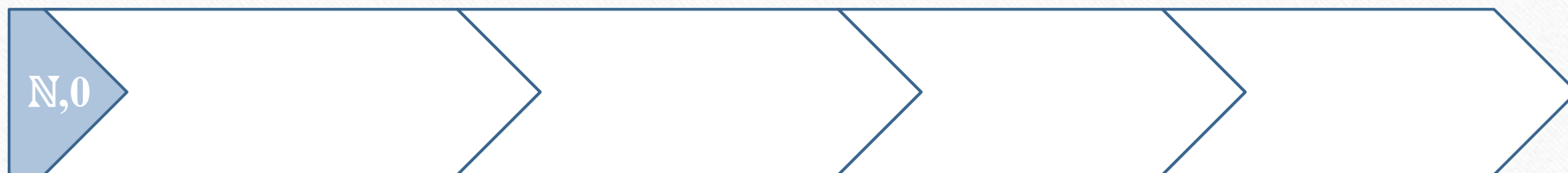
Содержание тем учебника Никольского С.М. и др. для 6 класса

Название темы	Содержание темы	Количество часов
Отношения, пропорции, проценты	Отношения чисел и величин. Масштаб. Деление числа в данном отношении. Пропорции. Прямая и обратная пропорциональность. Понятие о проценте. Задачи на проценты. Круговые диаграммы	26
Целые числа	Отрицательные целые числа. Противоположные числа. Модуль числа. Сравнение целых чисел. Сложение целых чисел. Законы сложения целых чисел. Разность, произведение, частное чисел. Распределительный закон. Представление целых чисел на координатной оси	34
Рациональные числа	Отрицательные дроби. Рациональные числа. Сравнение рациональных чисел. Сложение и вычитание, умножение и деление дробей. Законы сложения и умножения. Смешанные дроби произвольного знака. Изображение рациональных чисел на координатной оси. Решение задач с помощью уравнений	38
Десятичные дроби	Понятие положительной десятичной дроби. Сравнение положительных десятичных дробей. Сложение и вычитание, умножение и деление положительных десятичных дробей. Десятичные дроби и проценты. Сложные задачи на проценты. Десятичные дроби произвольного знака. Приближение десятичных дробей. Приближение суммы, разности, произведения и частного двух чисел	34
Обыкновенные и десятичные дроби	Разложение положительной обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь. Бесконечные периодические десятичные дроби. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби. Непериодические бесконечные десятичные дроби. Действительные числа. Координатная ось. Декартова система координат на плоскости.	24

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.



Последовательность построения множества рациональных чисел
в учебниках Никольского С.М. и др.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.

Группы задач	Номера заданий	Примеры задач
Задачи нахождение чисел по результатам операций над ними	на 630-633, 637-652, 1224	637. а) Одно число в 5 раз больше другого, а их сумма равна 42. б) Одно число в 3 раза меньше другого, а их сумма равна 28.
Задачи проценты	на 858-860, 862, 865-884, 922-934, 1235-1242	858. Масса сушёных яблок составляет 25 % массы свежих. Сколько сушёных яблок получили из 200 кг; 360 кг; 4,5 т свежих? Сколько процентов массы свежих яблок теряется при сушке?
Задачи движение	на 807, 808, 841, 844, 670, 772, 775-776, 1187-1193, 1206-1207, 1209, 1215, 1225, 1232, 1245-1246, 1256	1193. Расстояние, равное 3,6 км, проплыли по течению за 30 мин, а против течения за 40 мин. Определите скорость течения реки. За сколько часов это же расстояние проплывут плоты?

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.

Группы задач	Номера заданий	Примеры задач																														
Занимательные задачи	707-723, 846, 651, 941-955, 1040-1043, 1090-1095	<p>723 Три пирата Джон, Джек и Билл откопали кувшин с золотыми. Джон хотел взять себе треть всех золотых и половину остатка дать Джеку. Джек хотел взять себе половину всех золотых и треть остатка дать Джону. На каком варианте дележа они остановились. Билл не помнит, но он точно знает, что ему досталось 50 золотых. Сколько золотых было в кувшине?</p>																														
Разные задачи	771, 773, 774, 811-813, 840, 842, 845, 1177, 1178, 1179, 1191, 1201, 1205, 1211-1212, 1216-1223, 1226-1229, 1231, 1243-1244, 1250-1255, 1257-1287	<p>1178 В булочную привезли 654 кг чёрного и белого хлеба. После того как продали 215 кг чёрного и 287 кг белого хлеба, того и другого сорта осталось поровну. Сколько чёрного и белого хлеба в отдельности привезли в булочную?</p> <p>812 Масса 1 см³ алюминия 2,7 г, масса 1 см³ свинца 11,3 г. Какой кубик тяжелее — алюминиевый с ребром 3 см или свинцовый с ребром 2 см?</p>																														
Задачи на анализ или построение диаграмм и графиков	1072-1078	<p>1076 На рисунке 132 приведён график изменения температуры воздуха в течение суток. Измерения проводились через 2 ч.</p> <p>а) Какая температура была в 4 ч, 8 ч, 12 ч, 21 ч, 23 ч?</p> <p>б) В какие часы температура была выше 0 °С?</p> <p>в) В какие часы температура была ниже 0 °С?</p> <p>1077 По данным, приведённым в таблице, постройте график изменения температуры воздуха: T — температура воздуха в градусах по Цельсию, t — время в часах.</p> <table border="1" data-bbox="1210 1168 2262 1216"> <tr> <td>t, ч</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> <td>11</td> <td>12</td> <td>13</td> <td>14</td> <td>15</td> <td>16</td> <td>17</td> <td>18</td> <td>19</td> <td>20</td> <td>21</td> </tr> <tr> <td>T, °С</td> <td>-6</td> <td>-5</td> <td>-4</td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>-2</td> <td>-4</td> </tr> </table> <p>Сколько часов температура была выше 0 °С? ниже 0 °С?</p>	t , ч	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	T , °С	-6	-5	-4	-2	0	1	2	5	4	3	1	0	-2	-4
t , ч	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21																		
T , °С	-6	-5	-4	-2	0	1	2	5	4	3	1	0	-2	-4																		

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

4. Логико-дидактический анализ учебников

4.2 Анализ линии учебников Никольского С.М. и др.

Вывод: в учебниках С. М. Никольского и др. реализуется подход, согласно которому представления пространства числовой системы \mathbb{Q} формируются на моделях. В сравнении с предыдущей линией учебников изложение материала более строгое. В теоретическом материале представлены все модели системы \mathbb{Q} . Для введения понятий предлагаются целесообразные задачи. Подчёркивается, что десятичные дроби — это другая форма записи рациональных чисел, позволяя формировать корректные модельные представления множества \mathbb{Q} . Задачный материал направлен на оперирование рациональными числами учебника и отличается разнообразием. В целом, авторы учитывают закономерности формирования понятия «рациональное число», заключающейся в движении его исследования от модельных представлений к теоретическим. При работе с данной линией целесообразно проведение обобщения и систематизации знаний о множестве \mathbb{Q} для формирования у учащихся представлений об этом пространстве как *о единой структуре*, элементы которой подчинены определенному ряду законов.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Выводы по главе 1.

Анализ научной и методической литературы убедил, в формировании математического мышления роль понятий первостепенная, и что понятийные представления множества рациональных чисел необходимо целенаправленно формировать у учащихся. Определены три модели рациональных чисел: алгебраическая, арифметическая и геометрическая. Выявлено, что формирование понятия рационального числа целесообразно осуществлять в закономерной последовательности построения модельных представлений и последующего построения теории \mathbb{Q} . Таким образом, *модельно-теоретический подход* (Горбачев В.И.) к проектированию учебной математической деятельности в пространстве чисел выступает методической закономерностью теории \mathbb{Q} в общеобразовательном курсе математики.

Кроме того, обнаружено, что знание учащимся определения не означает сформированность во внутреннем плане самого понятия. Важен также факт умения пользоваться им при решении задач, апеллирующих к этому понятию. Поэтому при формировании понятия рационального числа важную роль играют задачи. И наибольшее значение на уровне 5-6 классов имеют именно текстовые задачи.

ГЛАВА 1: Теоретические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Выводы по главе 1.

Анализ популярных учебников по математике Мордковича А.Г., Никольского С.М. показал, что авторы, в целом, учитывают закономерности формирования понятия «рациональное число». В учебнике Мордковича А.Г. большее внимание уделено работе с моделями \mathbb{Q} . Оба учебника предлагают разнообразные текстовые задачи по теме. Однако на наш взгляд, при работе с данными учебниками целесообразно провести систематизацию модельных представлений, понятийное исследование свойств \mathbb{Q} и теоретическое обоснование закономерностей расширения числовых систем. Это можно сделать в рамках урока обобщения и систематизации знаний о множестве \mathbb{Q} , что позволит зафиксировать представления об этом пространстве как о *единой структуре*, элементы которой подчинены определенному ряду законов.

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

Цели урока:

- 1) дальнейшая отработка умений, навыков по решению заданий на действия с обыкновенными дробями;
- 2) воспитание умения работать в команде, настойчивости в достижении коллективной цели;
- 3) развивать у учащихся умение к самоконтролю

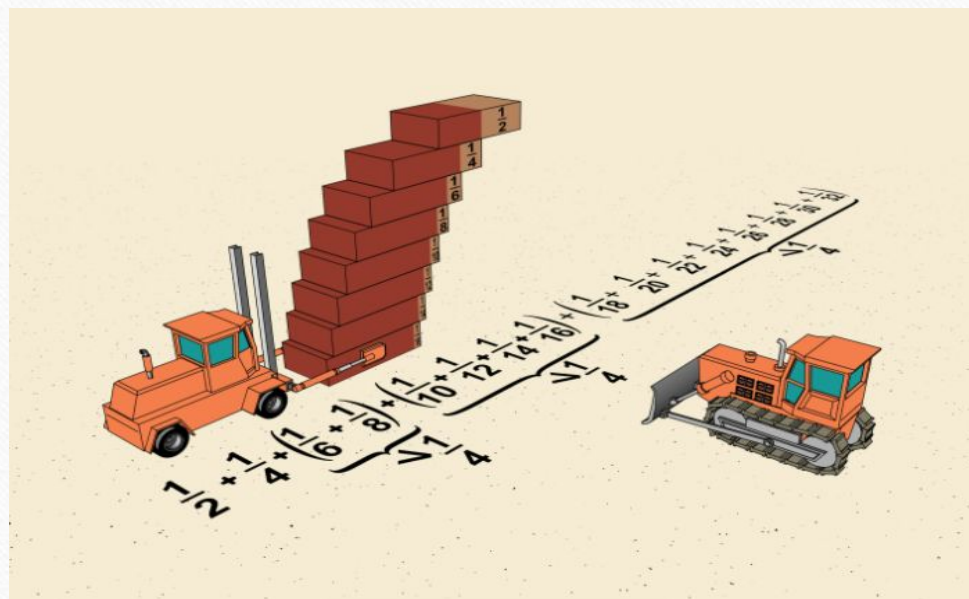
План урока:

1. Актуализация знаний, просмотр видеоролика
2. Проверка теоретических знаний по теме «Обыкновенные дроби».
3. Практическая работа
 - a. Решение уравнений
 - b. Работа с выражениями
 - c. Решение задач
4. Выполнение самостоятельной работы
5. Домашнее задание.

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

1. Актуализация знаний, просмотр видеоролика



ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

2. Проверка теоретических знаний по теме действия с обыкновенными дробями.

Основное свойство дроби

$$\frac{a^n}{b} = \frac{an}{bn} \quad \begin{matrix} n \neq 0 \\ m \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix} \quad \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$$

Сравнить $\left(\frac{5}{8} > \frac{3}{8}, \frac{4}{7} < \frac{4}{5}\right)$ $\frac{a^d}{b} > \frac{c^b}{d}$
если $ad > bc$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{an \pm ck}{m} \quad m = \text{НОК}(b, d)$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Взаимно обратные $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \left(\frac{4}{9} \text{ и } \frac{9}{4}\right)$

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

Практическая часть

$$\frac{2}{7} + b = \frac{15}{28};$$

$$2\frac{3}{4} + y = 3\frac{1}{7};$$

$$1 - = \frac{4}{21};$$

$$12 - b - 3\frac{7}{9};$$

$$y - \frac{1}{3} = \frac{2}{5};$$

$$x - 2\frac{3}{8} = 6\frac{5}{6};$$

$$a \cdot \frac{5}{14} = 1\frac{2}{7};$$

$$1\frac{1}{15} \cdot y = 6\frac{1}{20};$$

$$y : \frac{3}{5} = \frac{10}{27};$$

$$a + \frac{1}{6} = \frac{15}{24};$$

$$x + 3\frac{7}{8} = 4\frac{2}{3};$$

$$1 - m = \frac{7}{13};$$

$$1 - c = 2\frac{3}{7};$$

$$x - \frac{1}{5} = \frac{4}{3};$$

$$c - 4\frac{4}{9} = 7\frac{11}{12};$$

$$\frac{3}{7} \cdot y = 1\frac{5}{7};$$

$$x \cdot 1\frac{5}{6} = 4\frac{7}{12};$$

$$b : \frac{2}{5} = \frac{15}{25};$$

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

Практическая часть

Пример карточки:

Карточка №3

Упростить:

$$\begin{array}{cccc} \frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 3c & \frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 7k & 3\frac{1}{7} \cdot 2\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{22} & 13\frac{1}{3} - 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{3}{5}b \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x + 2x & \frac{1}{4v} - \frac{1}{8}y + 5y & 7b - 2\frac{1}{3}b + 3\frac{1}{8}b & 10m - 7\frac{1}{5}m + 4\frac{1}{6} \end{array}$$

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

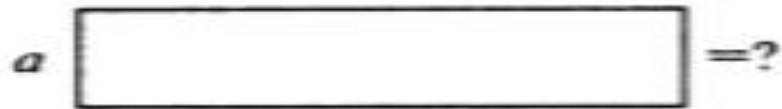
Практическая часть

Пример карточки:

Карточка №7

Решить задачи:

1) $P, S = ?$



$$b = 7 \frac{1}{2} \text{ м}$$

a в 3 раза <

1)

1 час	2 час	3 часа
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$?

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.1 Урок закрепления знаний «Действия с обыкновенными дробями»

Выполнение самостоятельной работы


Решить задачу:

Стороны треугольника А, В, С
Найти периметр треугольника, если:

$A = 5\frac{1}{3}$ м ←

в 2 раза <

С в 3 раза >



Домашнее задание: № 641-645

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.2 Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа»

Цели урока:

1. Обобщить и систематизировать знания о множестве рациональных чисел как единой структуры.
2. Развитие абстрактного мышления, наблюдательности, умения обобщать, делать выводы, выявлять закономерности.
3. Введение задачи для расширения построенного числового множества \mathbb{Q}

План урока:

1. Актуализация знаний
2. Практическая работа (выполнение заданий и получение выводов).
3. Формулировка общих выводов о свойствах \mathbb{Q}
4. Рассмотрение задачи для расширения построенного числового множества \mathbb{Q} .

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.2 Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа»

Вычислите рациональным способом:

а). $-7+10-13+25-28+35=$

б). $0,5+2\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-15-2\frac{2}{6}=$

в). $-2 \cdot (-6) \cdot 40 \cdot (-0,5)=$

г). $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{11}) \cdot (-4) \cdot (\frac{11}{3})=$

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.2 Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа»

Запишем на доске кратко: на \mathbb{Q} определена операция

$$a + b \equiv \frac{m_a}{n_a} + \frac{m_b}{n_b} = \frac{m_a \cdot n_b + m_b \cdot n_a}{n_a \cdot n_b}$$

$$a + b = b + a \quad (\text{для любых рациональных } a \text{ и } b)$$

$$a \cdot b \equiv \frac{m_a}{n_a} \cdot \frac{m_b}{n_b} = \frac{m_a \cdot m_b}{n_a \cdot n_b}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{для любых рациональных } a \text{ и } b)$$

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.2 Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа»

Вычислите рациональным способом:

а) $(\frac{2}{7} + \frac{5}{21}) \cdot 21$

б) $(\frac{7}{12} - \frac{5}{9}) \cdot 12$

в) $(\frac{3}{8} + \frac{5}{12}) \cdot 24$

г) $(\frac{8}{11} - \frac{3}{22}) \cdot 44$

а) $(\frac{2}{7} + \frac{5}{21}) \cdot 21 = \frac{2}{7} \cdot 21 + \frac{5}{21} \cdot 21 = 6 + 5 = 11;$

б) $(\frac{7}{12} - \frac{5}{9}) \cdot 12 = \frac{7}{12} \cdot 12 - \frac{5}{9} \cdot 12 = 7 - \frac{20}{3} = \frac{1}{3};$

в) $(\frac{3}{8} + \frac{5}{12}) \cdot 24 = \frac{3}{8} \cdot 24 + \frac{5}{12} \cdot 24 = 9 + 10 = 19;$

г) $(\frac{8}{11} - \frac{3}{22}) \cdot 44 = \frac{8}{11} \cdot 44 - \frac{3}{22} \cdot 44 = 32 - 6 = 26.$

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.2 Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа»

Вычислите рациональным способом:

- А) $56,2 + (-6,2 + 39)$
- Б) $(-52 + 17,3) - 16,6$
- В) $-13 + (-8 + 25)$
- Г) $0,9 * (10/9 * 38)$
- Д) $(78/3 * 0,5) * 2$

В \mathbb{Q} действует сочетательный закон для сложения и умножения, то есть: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(a + b) + c = a + (b + c)$ Для любых рац-х чисел a, b, c .

Так же для любых рац-х чисел a, b, c справедливо:

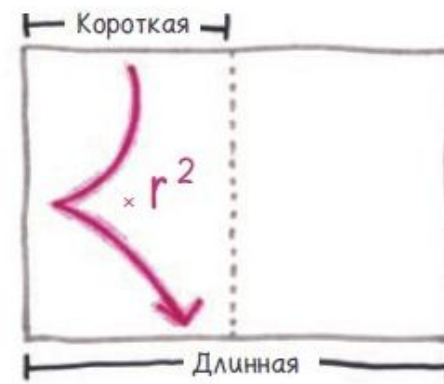
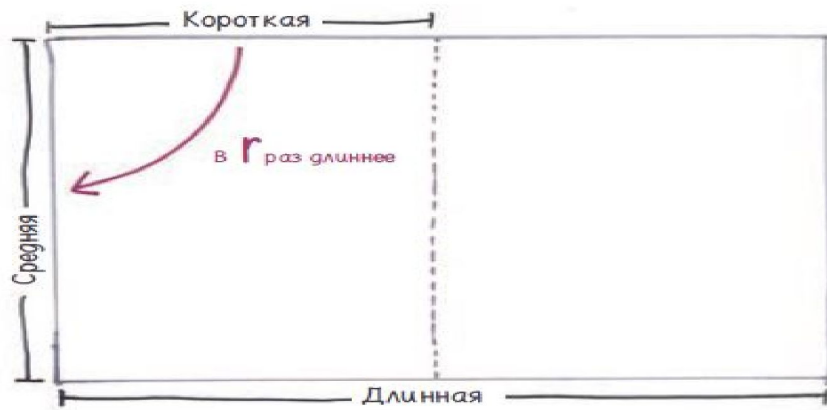
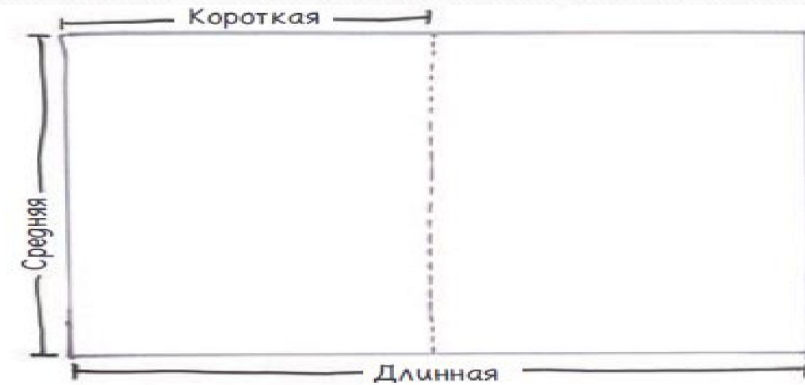
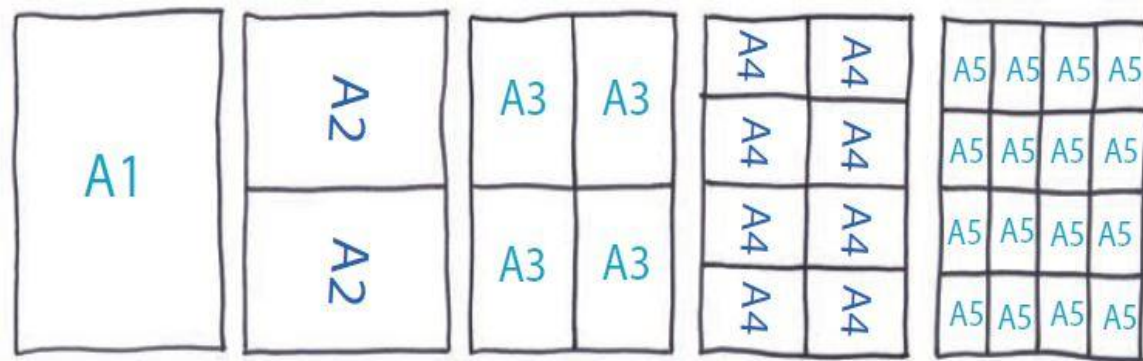
$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c;$$

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

2.2 Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа»



ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Выводы по главе 2

В ходе работы над практической главой были подготовлены уроки: закрепления знаний и умений по теме «Обыкновенные дроби» и обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа».

При планировании уроков сделан акцент на использовании текстовых задач. Так, на этапе актуализации в уроке № 1 предлагается задача о строительстве бесконечной лестницы из кирпичей, сложенных друг на друга. Применяется прием просмотра видеоролика. Это требует усилия учащихся в осознании действий по строительству лестницы, тем самым развивается логическое мышление.

Во втором уроке самым интересным для учащихся моментом должно стать решение задачи о форматах бумаги, где ребята предлагают различные варианты, начинают использовать калькулятор для больших чисел, но вскоре обнаруживается, что ни один из вариантов не дает точного ответа. Важность в использовании текстовых задач на уровне 6 класса мы обнаружили при работе с первой главой. Они повышают мотивацию к изучению темы.

ГЛАВА 2: Практические аспекты формирования понятия «рациональное число» в основной школе

Выводы по главе 2

Также в ходе первого урока предполагается деление учеников на команды и выполнение заданий на время, что помогает повышать мотивацию к выполнению заданий, которые подобраны с учетом дифференциации обученности учащихся в классе. Это позволяет реализовывать личностно-ориентированный подход.

В ходе урока обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа» предполагается понятийное исследование свойств \mathbb{Q} и обоснование закономерностей расширения этой числовой системы. Необходимость в проведение такого урока возникла в результате выявления закономерностей формирования представлений множества рациональных чисел во внутреннем плане и анализа популярных учебников по математике. Основная задача, которую мы ставили при разработке этого урока - зафиксировать представления учащихся о пространстве \mathbb{Q} как о *единой структуре*, элементы которой подчинены определенному ряду законов. В сущности, на уроке устанавливается структура \mathbb{Q} как поля, однако этот новый термин не вводится. Именно такого подведения итогов, «проговаривания» не хватает традиционной программе по математике, на наш взгляд. Все законы \mathbb{Q} известны учащимся, но зачастую они ими пользуются, не отдавая себе в том отчета. Кроме того, ребята часто путают понятия, например, рациональных чисел и действительных. Мы полагаем, что реализация этого урока позволит обобщить и, главное, структурировать представления учащихся об этом математическом пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **В ходе написания выпускной квалификационной работы нами были решены следующие задачи:**
 - Проведен анализ научной литературы с целью выявления особенностей формирования математических понятий. Анализ показал, что формирование научных понятий – сложный психический процесс развития мышления, протекающий не одномоментно, а с течением времени. Кроме того, признаками сформированности у субъекта некоторого математического понятия выступает речевое воспроизводство определения и умение применять понятие при ориентировке в предметной действительности.
 - Проведен анализ методической литературы с целью выявления идей и закономерностей формирования понятия «рациональное число». Выявлено, что формирование понятия рационального числа целесообразно осуществлять в закономерной последовательности построения модельных представлений и последующего построения теории \mathbb{Q} . Таким образом, модельно-теоретический подход (Горбачев В.И.) к проектированию учебной математической деятельности в пространстве чисел выступает методической закономерностью теории \mathbb{Q} в курсе математики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **В ходе написания выпускной квалификационной работы нами были решены следующие задачи:**
 - Выполнен логико-дидактический анализ темы в современных школьных учебниках математики, проводимый с целью выяснения, каким образом авторы вводят и развивают понятие рационального числа. Сделан вывод, что авторы не всегда следуют модельно-теоретическому подходу, и при работе с этими учебниками целесообразно проведение обобщения и систематизации знаний о множестве \mathbb{Q} для формирования у учащихся представлений об этом пространстве как о единой структуре, элементы которой подчинены определенному ряду законов.
 - Сконструированы уроки с использованием выявленных закономерностей и методических идей: урок закрепления знаний и умений по теме «Обыкновенные дроби» и урок обобщения и систематизации знаний по теме «Рациональные числа». В ходе второго урока предполагается понятийное исследование свойств \mathbb{Q} и обоснование закономерностей расширения этой числовой системы, чего на наш взгляд, не хватает традиционной методике. Подготовлен дидактический материал (приложение 1) и разработаны опорные презентации для проведения уроков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кроме того, был проведен анализ учебной и учебно-методической литературы с целью выявления роли задачного материала в процессе формирования понятия рационального числа. Обнаружена важность задач в процессе формирования этого понятия. При введении понятия рекомендуется использовать целесообразные задачи. Особое значение для дальнейшего процесса усвоения понятия на уровне 5-6 классов имеют текстовые задачи, опирающиеся на субъектный опыт учащихся.

Таким образом, была достигнута поставленная цель, заключающаяся в выявлении закономерностей формирования понятия «рациональное число» и практической реализации.