23.03.20.

Тема:
Векторы.
Метод Координат.
.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Теоретическая часть.
Прочитать. Выучить определения, теоремы (то, что выделено жирным шрифтом.)

46 Прямоугольная система координат в пространстве

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков*, то говорят, что задана **прямоугольная система координат** в пространстве (рис. 121). Прямые с выбранными на них направлениями называются **осями координат**, а их общая точка — **началом координат**. Она обозначается обычно буквой O. Оси координат обозначаются так: Ox, Oy, Oz — и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается $Oxyz$. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.

Рис. 121

Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч — **отрицательной полуосью**.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее **координатами**. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат (рис. 122). Первая координата точки M (она называется **абсциссой** и обозначается обычно буквой x) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси; $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси; $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O. Аналогично с помощью точки M_2 определяется вторая координата **(ордината)** y точки M,

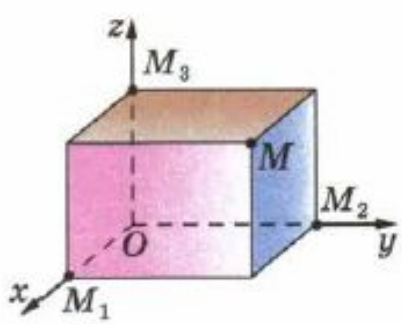

Рис. 122

а с помощью точки M_3 — третья координата (**аппликата**) z точки M. Координаты точки M записываются в скобках после обозначения точки: M (x; y; z), причем первой указывают абсциссу, второй — ординату, третьей — аппликату. На рисунке 123 изображены шесть точек A (9; 5; 10), B (4; –3; 6), C (9; 0; 0), D (4; 0; 5), E (0; 3; 0), F (0; 0; –3).

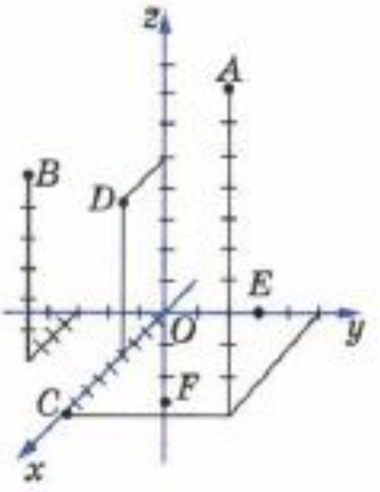

Рис. 123

Если точка M (x; y; z) лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые ее координаты равны нулю. Так, если $M \in Oxy$, то аппликата точки M равна нулю: $z = 0$. Аналогично если $M \in Oxz$, то $y = 0$, а если $M \in Oyz$, то $x = 0$. Если $M \in Ox$, то ордината и аппликата точки M равны нулю: $y = 0$ и $z = 0$ (например, у точки C на рисунке 123). Если $M \in Oy$, то $x = 0$ и $z = 0$; если $M \in Oz$, то $x = 0$ и $y = 0$. Все три координаты начала координат равны нулю: O (0; 0; 0).

47 Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. **вектор, длина которого равна единице**. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.

Коэффициенты x, y и z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат**. Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}$ $\{x; y; z\}$. На рисунке 125 изображен прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 4$. Координаты векторов, изображенных на этом рисунке, таковы: $\vec{a}$ {2; 2; 4}, $\vec{b}$ {2; 2; –1}, $\overrightarrow{A_3A}$ {2; 2; 0}, $\vec{i}$ {1; 0; 0}, $\vec{j}$ {0; 1; 0}, $\vec{k}$ {0; 0; 1}.

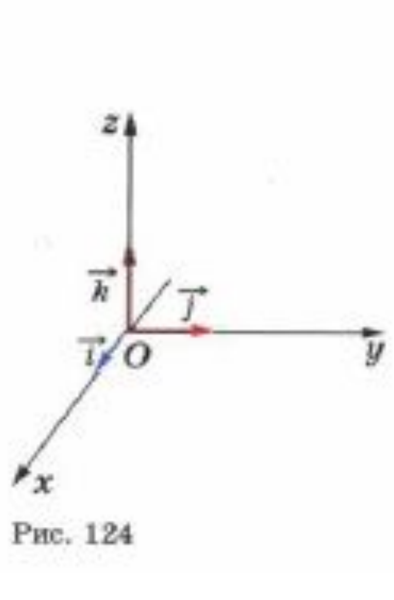

Рис. 124

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, **координаты равных векторов соответственно равны**, т. е. если векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ равны, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$ (объясните почему).

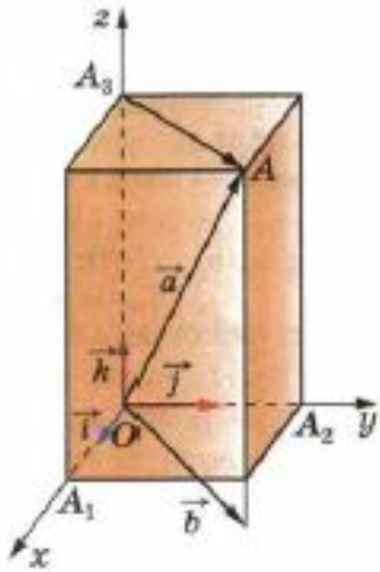

Рис. 125

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

1°. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$.

2°. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$.

3°. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если $\vec{a}\{x; y; z\}$ — данный вектор, α — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

Утверждения 1°—3° доказываются точно так же, как и для векторов на плоскости.

Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны. Рассмотрим пример.

Задача

Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a}\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\{0; 3; -6\}$, $\vec{c}\{-2; 3; 1\}$.

Решение

По правилу 3° вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2; -4; 0\}$, а вектор $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ — координаты $\{0; -1; 2\}$. Так как $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, то его координаты $\{x; y; z\}$ можно вычислить по правилу 1°: $x = 2 + 0 - 2 = 0$, $y = -4 - 1 + 3 = -2$, $z = 0 + 2 + 1 = 3$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0; -2; 3\}$.

48 Связь между координатами векторов и координатами точек

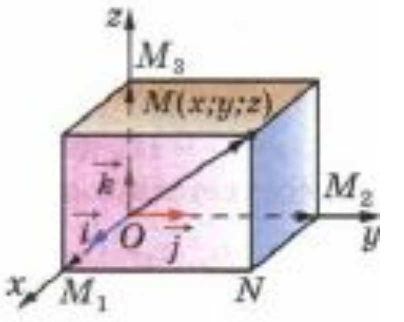

Рис. 126

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало — с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки. Докажем, что **координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.**

Обозначим координаты данной точки M через $(x; y; z)$. Пусть M_1, M_2, M_3 — точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку M перпендикулярно к этим осям (рис. 126). Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3. \quad (1)$$

Докажем, что $\overrightarrow{OM}_1 = x\vec{i}$. В самом деле, если точка M_1 лежит на положительной полуоси абсцисс, как на рисунке 126, то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM}_1$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM}_1 = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если точка M_1 лежит на отрицательной полуоси абсцисс, то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM}_1$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM}_1 = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если точка M_1 совпадает с точкой O, то $x = 0$, $\overrightarrow{OM}_1 = \vec{0}$. Поэтому $x\vec{i} = \vec{0}$, и снова справедливо равенство $\overrightarrow{OM}_1 = x\vec{i}$. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM}_1 = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM}_2 = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM}_3 = z\vec{k}$.

Подставив эти выражения в равенство (1), получим $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Отсюда следует, что координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x; y; z\}$, т. е. координаты точки M равны соответствующим координатам ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, что и требовалось доказать.

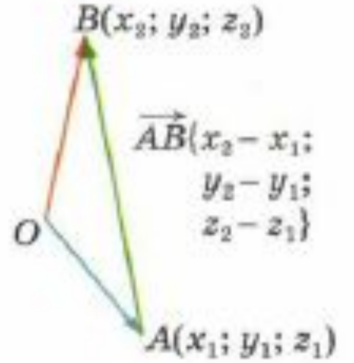

Рис. 127

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B. Пусть точка A имеет координаты $(x_1; y_1; z_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 127), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$.

Но координаты векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ совпадают с соответствующими координатами точек B и A: $\overrightarrow{OB}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, $\overrightarrow{OA}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$. Поэтому вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$.

Итак, **каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.**

49 Простейшие задачи в координатах

а) Координаты середины отрезка. В системе координат $Oxyz$ отметим точку A с координатами $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и точку B с координатами $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Выразим координаты $(x;\ y;\ z)$ середины C отрезка AB через координаты его концов (рис. 128).

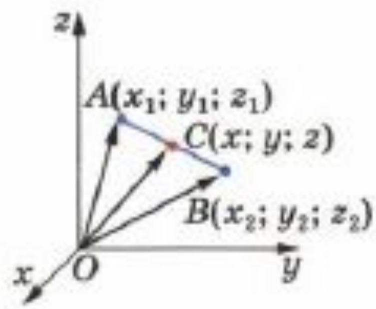

Рис. 128

Так как точка C — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (2)$$

(Это было доказано в курсе планиметрии.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам трех точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\,\{x;\ y;\ z\}$, $\overrightarrow{OA}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\overrightarrow{OB}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$. Записав равенство (2) в координатах, получим

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Таким образом, **каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.**

б) Вычисление длины вектора по его координатам. Докажем, что **длина вектора $\vec{a}\,\{x;\ y;\ z\}$ вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

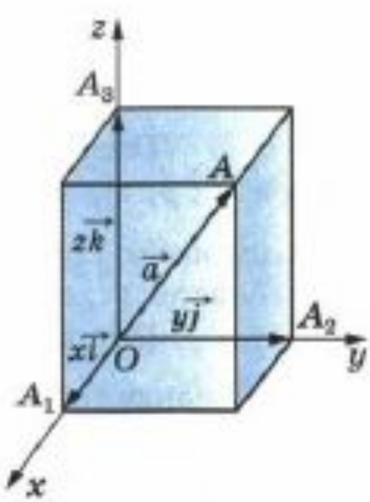

Рис. 129

Отложим на осях координат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ (рис. 129). Длина вектора $\overrightarrow{OA}$ выражается через длины векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ следующим образом:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}. \qquad (4)$$

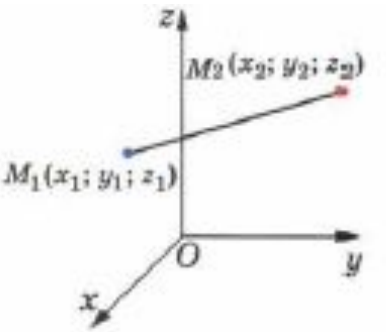

Рис. 130

В самом деле, если точка A не лежит на координатных плоскостях (см. рис. 129), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. Во всех других случаях расположения точки A (точка A лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как $|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$, $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) Расстояние между двумя точками. Рассмотрим две произвольные точки: точку M_1 с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку M_2 с координатами $(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 130). Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. По формуле (3) $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Но $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$. Таким образом, **расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Практическая часть.

400 Даны точки $A\ (3;\ -1;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ -7)$, $C\ (2;\ 0;\ 0)$, $D\ (-4;\ 0;\ 3)$, $E\ (0;\ -1;\ 0)$, $F\ (1;\ 2;\ 3)$, $G\ (0;\ 5;\ -7)$, $H(-\sqrt{5};\sqrt{3};\ 0)$. Какие из этих точек лежат на: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости Oxy; д) плоскости Oyz; е) плоскости Oxz?

402 Даны координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (0;\ 1;\ 0)$ и $A_1\ (1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

407 Даны векторы $\vec{a}\ \{3;\ -5;\ 2\}$, $\vec{b}\ \{0;\ 7;\ -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3};0;0\right\}$ и $\vec{d}\ \{-2,7;\ 3,1;\ 0,5\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{d}+\vec{b}$; д) $\vec{d}+\vec{a}$; е) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; ж) $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$; з) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

411 Даны векторы $\vec{a}\ \{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\ \{0;\ 2;\ -2\}$, $\vec{c}\ \{-3;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{d}\ \{-2;\ 1;\ -2\}$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$; б) $-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}$; в) $0,1\vec{a}+3\vec{b}+0,7\vec{c}-5\vec{d}$; г) $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{a}-\vec{b})$.