Понятие информации в теории Шеннона

- Мера неопределенности является функцией числа исходов f(n).
- **Свойства этой функции:**
- f(1) = 0, поскольку при n - 1 исход опыта не является случайным и, следовательно, неопределенность отсутствует;
- f(n) возрастает с ростом n, поскольку чем больше число воз- можных исходов, тем более затруднительным становится пред- сказание результата опыта.

- Единица измерения неопределенности при двух возможных равновероятных исходах опыта называется **бит** .
- за меру неопределенности опыта с *n равновероятными исходами* можно принять число *log(ri)*

- **Энтропия** является мерой неопределенности опыта, в котором проявляются случайные события, и равна сред- ней неопределенности всех возможных его исходов.

$$H(\alpha) = < -\log_2 p(A^{(\alpha)}) >,$$

$A^{(a)}$ — обозначает финалы, вероятные в опыте α.

Опыт α имеет *n* неравновероятных исходов $A_1, A_2 \ldots A_n$,

$$H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot \log_2 p(A_i). \qquad (2.4)$$

- Пример 2.1 Имеются два ящика, в каждом из которых по 12 шаров. В первом - 3 белых, 3 черных и 6 красных; во втором - каждого цвета по 4. Опыты состоят в вытаскивании по одному шару из каждого ящика. Что можно сказать относительно неопределенностей исходов этих опытов?

$$H_\alpha = -\frac{3}{12}\log_2\frac{3}{12} - \frac{3}{12}\log_2\frac{3}{12} - \frac{6}{12}\log_2\frac{6}{12} = 1{,}50 \text{ бит},$$

$$H_\beta = -\frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} - \frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} - \frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} = 1{,}58 \text{ бит},$$

$$H_\beta > H_\alpha$$

- т.е. неопределенность результата в опыте β выше и, следовательно, предсказать его можно с меньшей долей уверенности, чем результат α.

Свойства энтропии

- Энтропия сложного опыта, состоящего из нескольких независимых, равна сумме энтропии отдельных опытов.
- При прочих равных условиях наибольшую энтропию имеет опыт с равновероятными исходами.
- энтропия равна информации относительно опыта, которая со- держится в нем самом.
- энтропия опыта равна той информации, которую получаем в результате его осуществления.

- Энтропия сложного опыта:

$$H(\alpha \wedge \beta) = H(\alpha) + H_{\alpha}(\beta)$$

- Условная энтропия является величиной *неотрицательной*. =0 только в том случае, если *любой* исход α полностью определяет исход □ (как в примере с двумя шарами), т.е.

$$H_{A_1}(\beta) = H_{A_2}(\beta) = \ldots = H_{A_n}(\beta) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot H_{A_i}(\beta) = H_{\alpha}(\beta)$$

- $H_{\alpha}(\beta)$ есть *средняя условная энтропия опыта*

Пример 2.2

- В ящике имеются 2 белых шара и 4 черных. Из ящика извлекают последовательно два шара без возврата. Найти энтропию, связанную с первым и вторым извлечениями, а также энтропию обоих извлечений.
- Будем считать опытом α извлечение первого шара. Он имеет два исхода: A_1 - вынут белый шар; его вероятность $p(A_1) = 2/6 = 1/3$; исход A_2 - вынут черный шар; его вероятность $p(A_2)=1 - p(A_1) = 2/3$. Эти данные позволяют сразу найти $H(\alpha)$:
- $H(\alpha)= - p(A_1)\log_2 p(A_1) - p(A_2)\log_2 p(A_2) = -1/3 \log_2 1/3 - 2/3 \log_2 2/3 = 0{,}918$ *бит*
- Опыт - извлечение второго шара также имеет два исхода: B_1 - вынут белый шар; B_2 - вынут черный шар, однако их вероятности будут зависеть от того, каким был исход опыта α. В частности:

при A_1: $p_{A_1}(B_1) = 1/5$, $p_{A_1}(B_2) = 4/5$;

при A_2: $p_{A_2}(B_1) = 2/5$, $p_{A_2}(B_2) = 3/5$.

- Энтропия равна:

$$H_{A_1}(\beta) = -1/5 \log_2 1/5 - 4/5 \log_2 4/5 = 0{,}722 \text{ бит},$$

$$H_{A_2}(\beta) = -2/5 \log_2 2/5 - 3/5 \log_2 3/5 = 0{,}971 \text{ бит},$$

$$H_\alpha(\beta) = p(A_1)\cdot H_{A_1}(\beta) + p(A_2)\cdot H_{A_2}(\beta) = 1/3\cdot 0{,}722 + 2/3\cdot 0{,}971 = 0{,}888 \text{ бит}$$

- **Пример 2.3**
- Имеется три тела с одинаковыми внешними размерами, но с разными массами x_1, x_2 и x_3. Необходимо определить энтропию, связанную с нахождением наиболее тяжелого из них, если сравнивать веса тел можно только попарно.
- Последовательность действий достаточно очевидна: сравниваем вес двух любых тел, определяем из них более тяжелое, затем с ним сравниваем вес третьего тела и выбираем наибольший из них. Поскольку внешне тела неразличимы, выбор номеров тел при взвешивании будет случаен, однако общий результат от этого выбора не зависит. Пусть опыт α состоит в сравнении веса двух тел, например, 1-го и 2-го.
- Этот опыт, очевидно, может иметь два исхода: A_1 - $x_1 > x_2$, его вероятность $p(A_1) = 1/2$; исход A_2 - $x_1 < x_2$ также его вероятность $p(A_2) = 1/2$.
- $\boldsymbol{H(\alpha) = -1/2 \log_2 1/2 - 1/2 \log_2 1/2 = 1}$ ***бит***
- Опыт Р - сравнение весов тела, выбранного в опыте а, и 3-го - имеет четыре исхода: B[- *1 > x3 , B^ - x^ < x3 , Bз - x2 > x3 , B4 - x 2 < x3 ; веро- ятности исходов зависят от реализовавшегося исхода а ;
- Следовательно, энтропия сложного опыта, т.е. всей процедуры испы- таний: H(а лр) = H(а)+ Hа (р) = 2 бит.
-

$$H_{A_1}(\beta) = -1/2 \log_2 1/2 - 1/2 \log_2 1/2 = 1 \text{ бит},$$

$$H_{A_2}(\beta) = -1/2 \log_2 1/2 - 1/2 \log_2 1/2 = 1 \text{ бит},$$

$$H_\alpha(\beta) = p(A_1)\cdot H_{A_1}(\beta) + p(A_2)\cdot H_{A_2}(\beta) = 1/2\cdot 1 + 1/2\cdot 1 = 1 \text{ бит}$$

Свойства информации

- /(a, β) > O, причем /(a, β) = 0 тогда и только тогда, когда опыты a и p независимы;
- /(a. β) = /(β,a), т.е. информация симметрична относительно последовательности опытов.
- **Информация опыта** равна среднему значению количества информации, содержащейся в каком-либо одном его исходе;
- **Количество информации** численно равно числу вопросов с равновероятными бинарными вариантами ответов, которые необходимо задать, чтобы полностью снять неопределенность задачи

- **Информация** - это содержание сообщения, понижающего неопределенность некоторого опыта с неоднозначным исходом; убыль связанной с ним энтропии является количественной мерой информации.
- В случае равновероятных исходов информация равна лога- рифму отношения числа возможных исходов до и после (получения сообщения);
- Сообщения, в которых вероятность появления каждого отдельного знака не меняется со временем, называются шенноновскими, а порождающий их отправитель - шенноновским источником

Контрольные вопросы

- 1)Почему в определении энтропии как меры неопределенности выбрана логарифмическая зависимость между N и n? Почему выбран log2 ?
- Следует заметить, что выбор основания логарифма в данном случае значения не имеет, поскольку в силу известной формулы преобразования логарифма от одного основания к другому. Переход к другому основанию состоит во введении одинакового для обеих частей выражения постоянного множителя log/, a, что равносильно изменению масштаба (т.е. размера единицы) измерения неопределенности. Поскольку это так, имеется возможность выбрать удобное (из каких-то дополнительных соображений) основание логарифма. Таким удобным основанием оказывается 2, поскольку в этом случае за единицу измерения принимается неопределенность, содержащаяся в опыте, имеющем лишь два равновероятных исхода, которые можно обозначить, например, ИСТИНА (True) и ЛОЖЬ (False) и использовать для анализа таких событий аппарат математической логики.

- A)В данном случае n = 2 и события равновероятны, т.е. p1 = P2 = 0,5. Согласно : / = - 0,5-log2 0,5 - 0,5-log2 0,5 = 1 бит.
- b)
- c)Для данной ситуации $n=2^5$, значит, k=5 и, следовательно, I=5 бит.
- d)
- 10. a)log2(90) бит
- b)1 вопрос: "какое число загадано?
- c)Нет, количество информации не изменится
- d)Нет, там log2(9) и log2(10) бит.