# Основные функции и их графики

Лекция1

# План лекции:

- Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории.
- Понятие функции. Способы задания функций.
- Свойства функций: четность, переодичность, монотонность.
- Основные виды функций.
- Домашнее задание.

# Понятие функции

- Слово «функция» (от латинского «Functio» - исполнение обязанностей, деятельность) впервые ввел немецкий ученый Г. Лейбниц.
- **Переменной** называется величина, принимающая различные числовые значения
- Величина, числовые значения которой не меняются, называется **постоянной** (**константой**).

Если каждому значению переменной ***x***, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной ***y***, то ***y*** есть функция от ***x***. $y=f(x)$. Здесь ***x*** – аргумент функции.

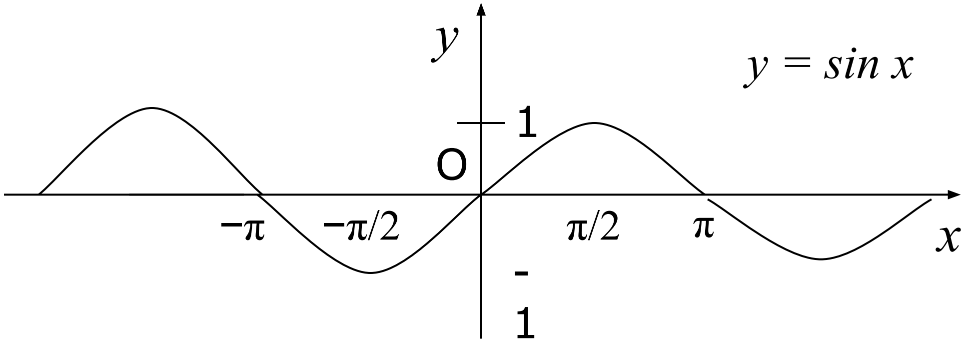
Совокупность значений ***x***, для которых определяются значения функции ***y***, называются **областью определения**, а соответствующие значения ***y*** образуют **область значений** (область изменения функции)

# Способы задания функций

- Аналитический, например $y=x^2$ .
- Табличный

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_n$ |

- Графический



# Четность и нечетность

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого значения $x$, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

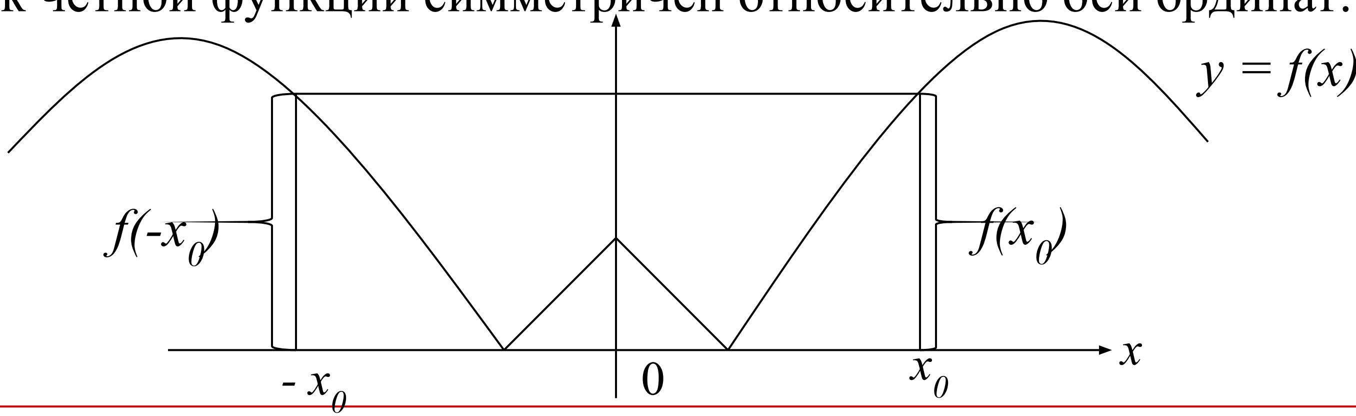
Примеры четных функций:

$y = x^2$; $y = x^2 + 5$; $y = -3x^2 + 1$; $y = 3$.

($y = x^2$; $y(1) = 1^2 = 1$; $y(-1) = (-1)^2 = 1$; $y(1) = y(-1)$).

Согласно определению, четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат.

График четной функции симметричен относительно оси ординат:



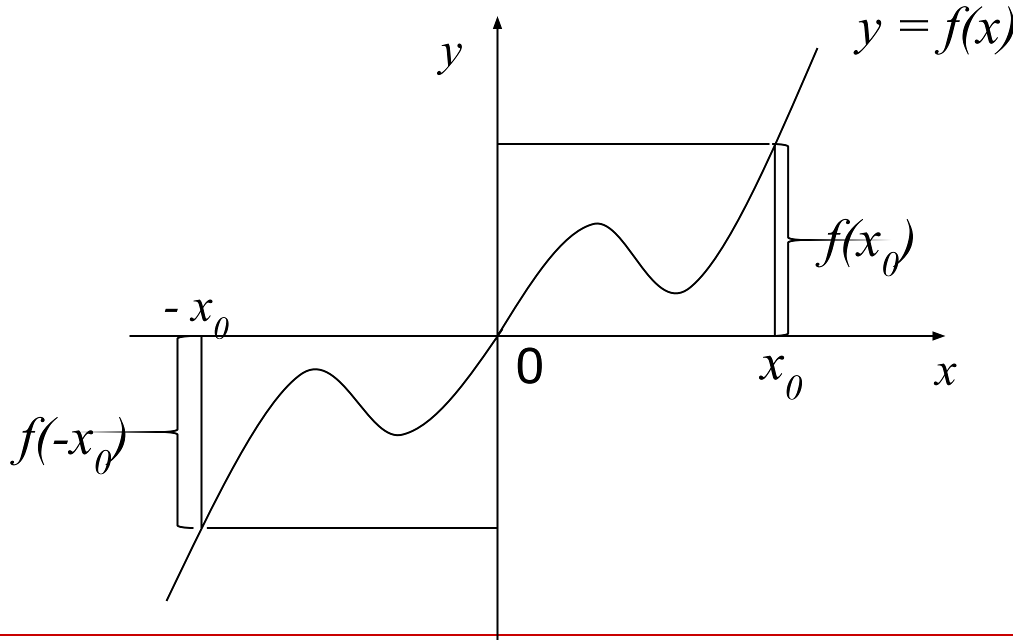
Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого значения $x$, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Примеры нечетных функций:

$y = x^3$; $y = x^3 + x$.

($y = x^3$; $y(1) = 1^3 = 1$; $y(-1) = (-1)^3 = -1$; $y(-1) = -y(1)$).

График нечетной функции симметричен относительно начала координат:



При построении графиков четной и нечетной функции достаточно построить только правую ветвь графика для положительных значений аргумента.

Левая ветвь достраивается симметрично относительно начала координат для нечетной функции и относительно оси ординат для четной функции.

Произведение двух четных или двух нечетных функций представляет собой **четную** функцию, а произведение четной и нечетной функций – **нечетную** функцию.

Большинство функций не являются ни четными, ни нечетными.

Пример:

$y = x^3 + x^2$

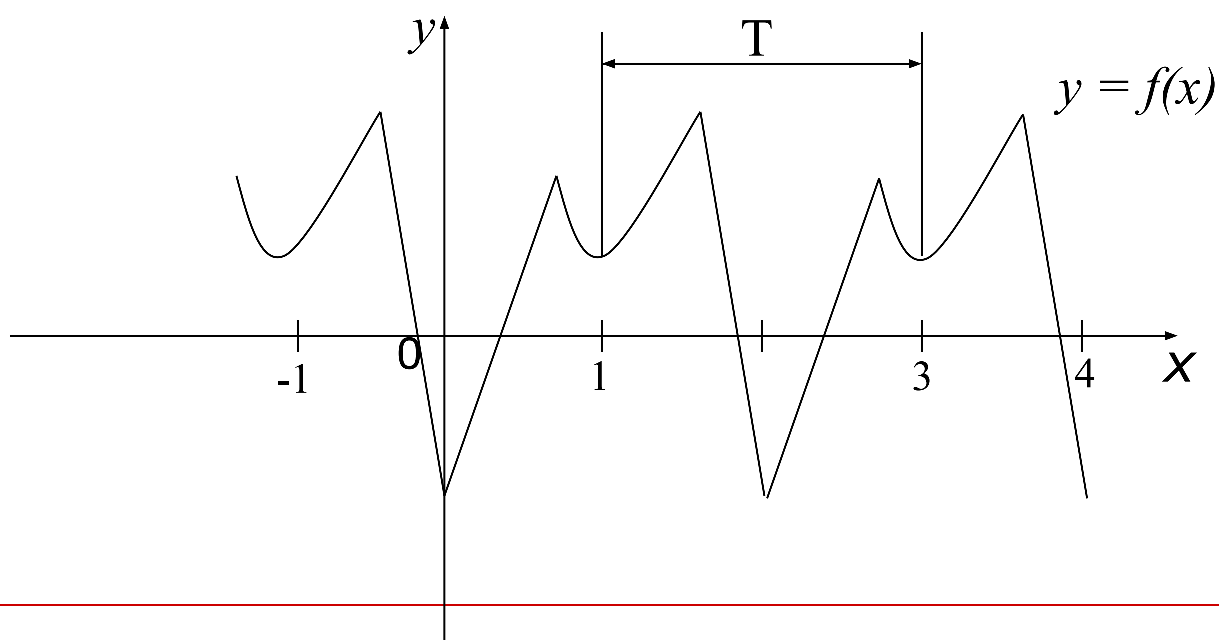
$y(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$

$y(1) = (1)^3 + (1)^2 = 1 + 1 = 2$

# Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число Т$\neq$ 0**,** что для любого значения $x$, взятого из области определения, значения $x$ + Т и $x$ – Т также принадлежат области определения и выполняется равенство

$f(x) = f(x + \mathrm{T}) = f(x - \mathrm{T})$:



Число **T** называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное число периодов. Числа вида **nT** при любом целом **n** также являются периодом функции *f(x)*.

Иногда периодом называют наименьшее их всех чисел T > 0, удовлетворяющее данному выше определению.

Примеры периодических функций:

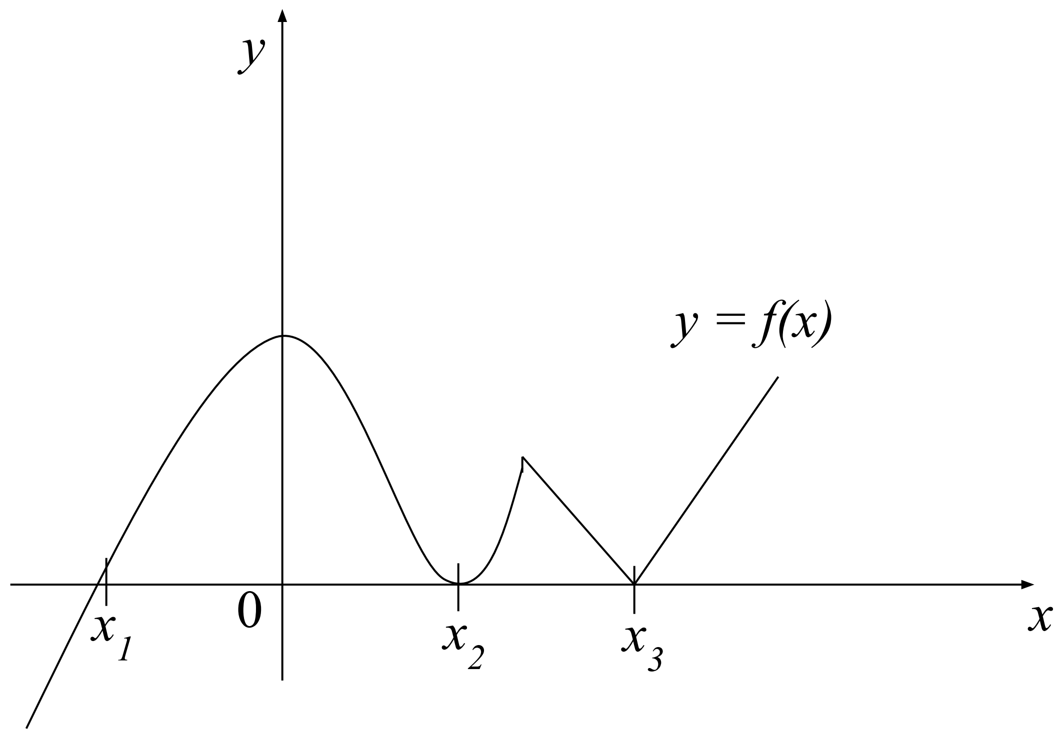
$y = \sin x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \sin^3 x$.

Периодической является и всякая постоянная функция, причем ее периодом служит любое ненулевое число. Например: $y = 2$; $y = 10$.

# Нули функции

Нулем функции называется такое действительное значение $x$, при котором значение функции равно нулю.

Для того, чтобы найти нули функции, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Действительные корни этого уравнения являются нулями функции $y = f(x)$. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо **пересекает** ось абсцисс, либо **касается** ее, либо имеет **общую точку** с этой осью.

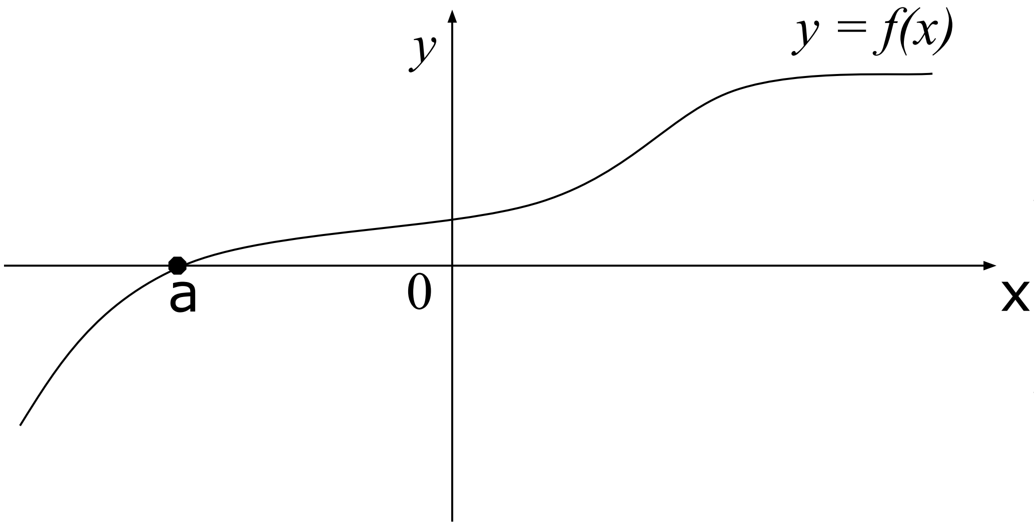



$x_1, x_2, x_3$ – нули функции $y = f(x)$.

# Промежутки знакопостоянства

Числовые промежутки, на которых непрерывная функция сохраняет свой знак и не обращается в нуль, называются промежутками **знакопостоянства**.

Над этими промежутками график функции лежит выше оси абсцисс, если $f(x) > 0$, и ниже оси абсцисс, если $f(x) < 0$.

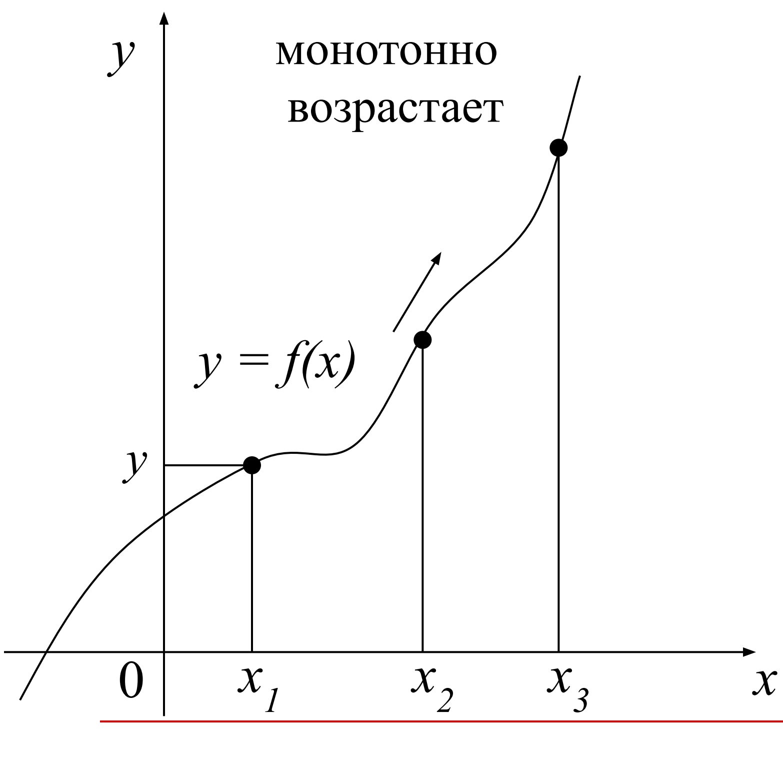


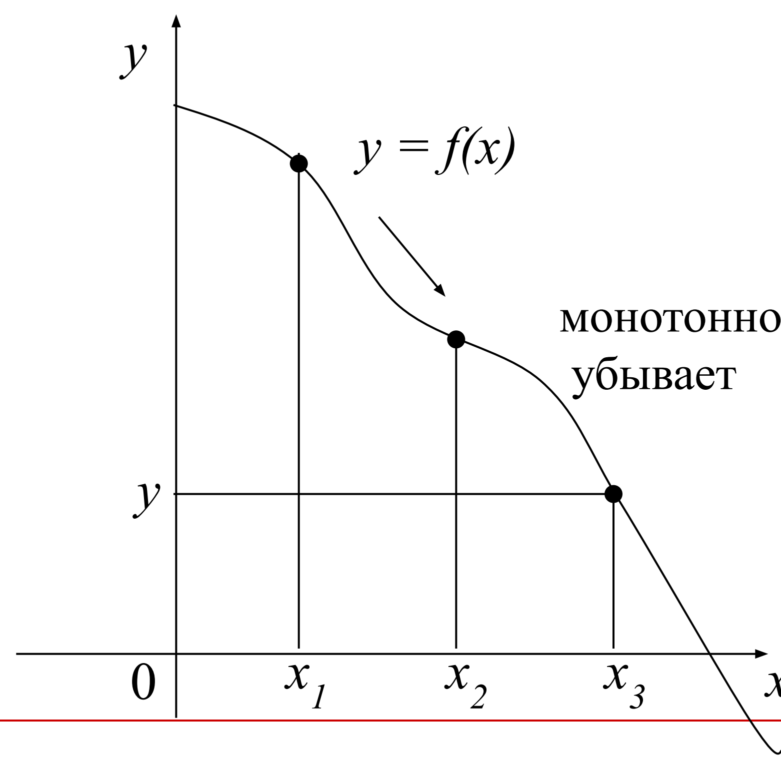

$f(x) > 0$ при $x > a$

$f(x) < 0$ при $x < a$

# Монотонность

Функцию называют монотонно **возрастающей**, если с увеличением аргумента значение функции **увеличивается**, и монотонно **убывающей**, если с увеличением аргумента значение функции **уменьшается**.



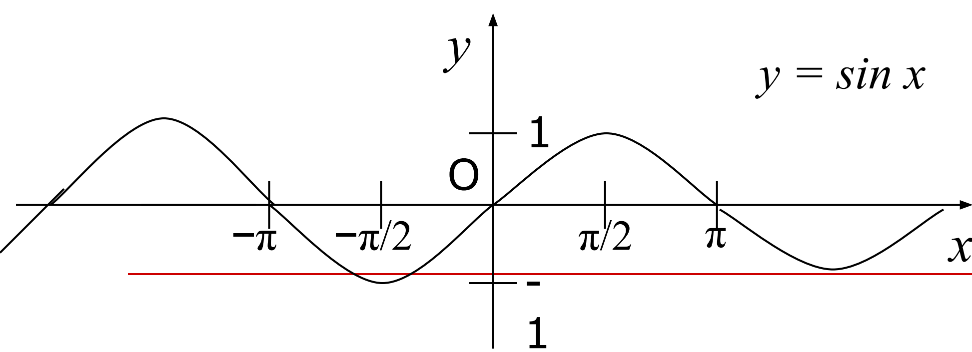
Функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей на интервале (a, b), если для любых $x_1$ и $x_2$, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ называется монотонно убывающей на интервале (a, b), если для любых $x_1$ и $x_2$, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Интервал (a, b) предполагает взятым из области определения функции.

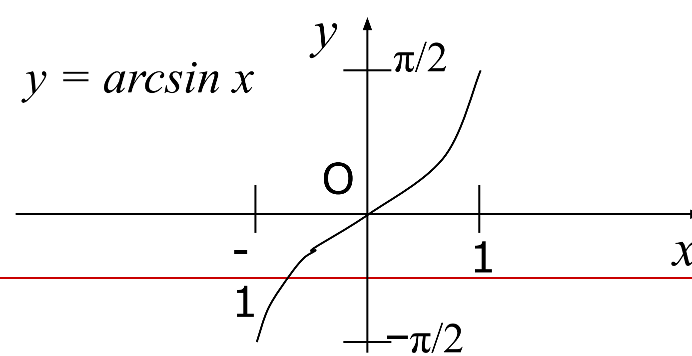
# Понятие обратной функции

Функция, принимающая каждое свое значение в единственной точке области определения, называется обратимой. Таким образом, при $k \neq 0$ функция $f(x) = kx + b$ обратима, а функция $f(x) = x^2$ не является обратимой.

Если между величинами $x$ и $y$ существует функциональная зависимость, то, вообще говоря, безразлично, какую из этих величин считать аргументом, а какую – функцией.

Пусть задана функция $y = f(x)$, где у является зависимой переменной, $x$ – аргументом. Очевидно, в этом случае х и у можно поменять ролями, т. е. $x$ будет функцией, а $y$ – аргументом. Тогда рассматриваемая функциональная зависимость между $x$ и $y$ запишется так: $x = Y(y)$. Функция $x = Y(y)$ называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.



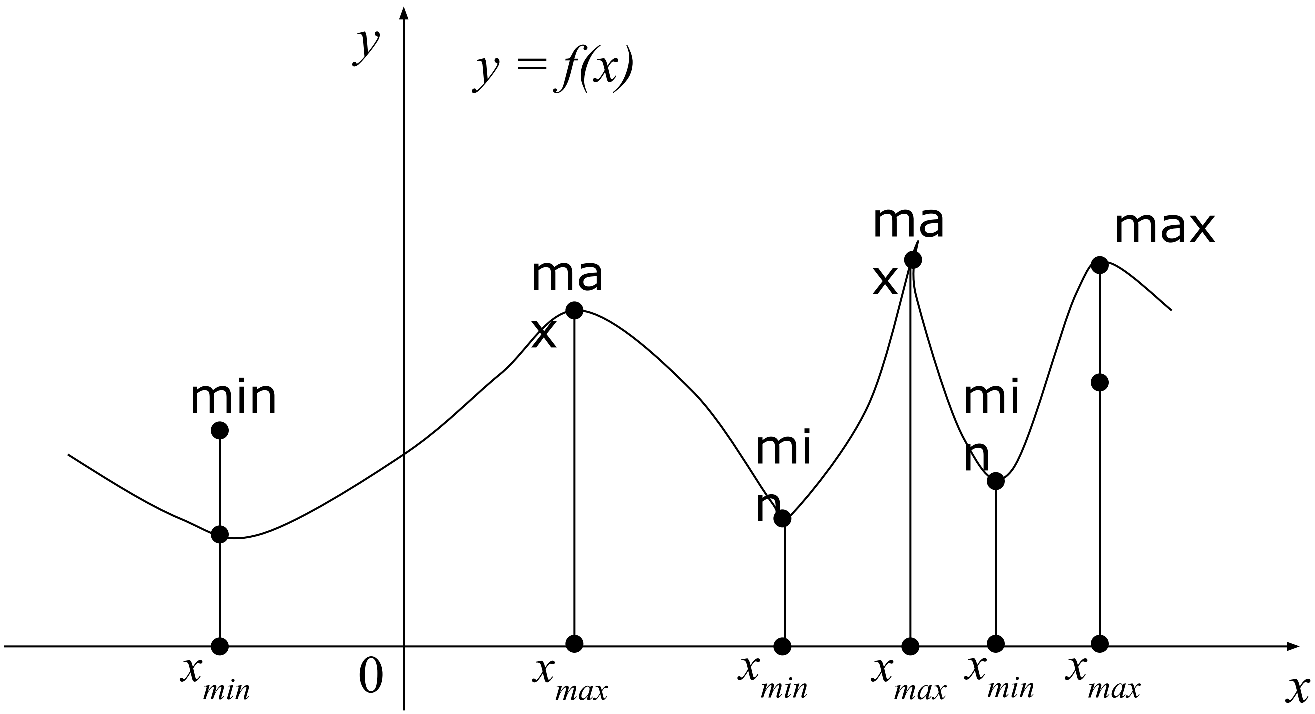
# Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции

Точка $x_0$ называется точкой максимума (точкой минимума) для функции $f(x)$, если значение в этой точке больше (меньше), чем значение функции в ближайших соседних точках.

Для обозначения максимума и минимума существует общий термин «экстремум» (от латинского «крайний»).

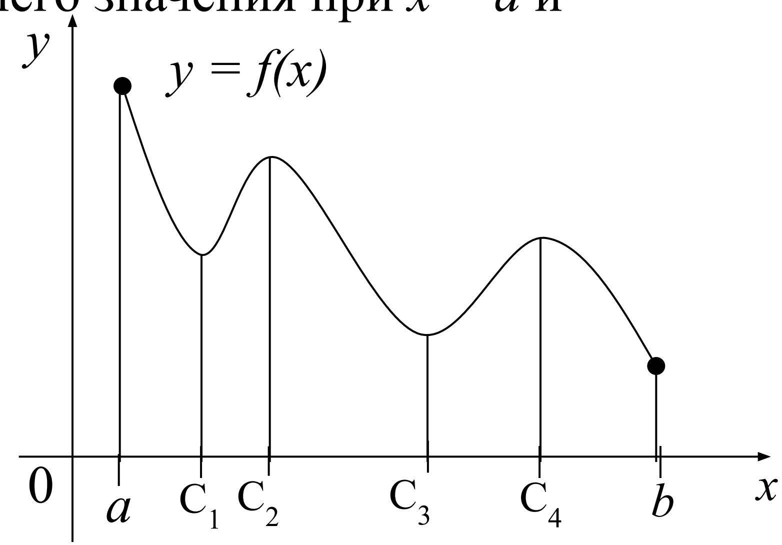
Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке[a; b]. Говорят, что функция имеет максимум в точке $x_0 \in$ [a; b], если существует окрестность точки $x_0$, целиком содержащаяся в [a; b] и такая, что для любого $x$, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Под окрестностью точки $x_0$ понимают интервал длины $2e$ с центром в точке $x_0$, т. е. $(x_0 - e\ ;\ x_0 + e)$, где $e$ – произвольное положительное число.



Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке [a; b]. Говорят, что функция имеет минимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки $x_0$, целиком содержащаяся в [a; b] и такая, что для любого $x$, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Максимумы и минимумы функции не являются обязательно наибольшими и наименьшими значениями этой функции во всей области определения. Например, функция $y = f(x)$ определена на отрезке [a; b], имеет четыре экстремума: два минимума ($x = C_1$ и $x = C_3$) и два максимума ($x = C_2$ и $x = C_4$). Вместе с тем, функция достигает наибольшего значения при $x = a$ и наименьшего при $x = b$.




**Признак максимума функции:**
Если функция непрерывна в точке $x_0$ и ее производная, переходя через нее, меняет знак с плюса на минус, то $x_0$ есть точка **максимума**.

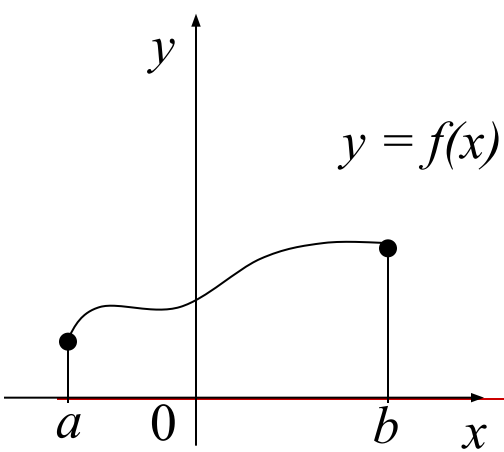
**Признак минимума функции:**
Если функция непрерывна в точке $x_0$ и ее производная, переходя через нее, меняет знак с минуса на плюс, то $x_0$ есть точка **минимума**.

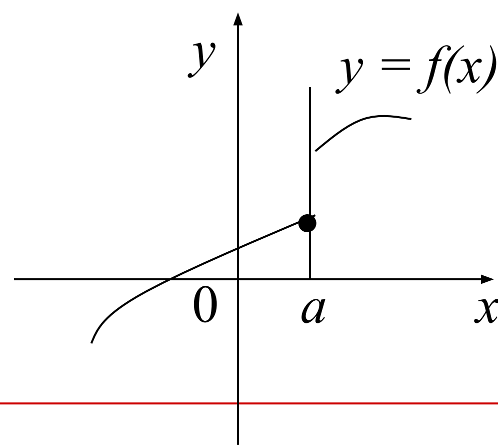
# Непрерывность

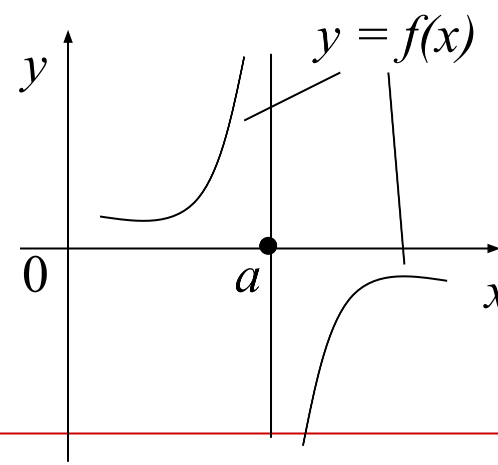
Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на промежутке, если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка.

Геометрическая непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на данном промежутке изображен сплошной линией без скачков и разрывов. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции.

Если при $x = a$ функция $y = f(x)$ существует в окрестности этой точки, но в самой точке $x = a$ не выполняется условие непрерывности, говорят, что точка $x = a$ есть точка разрыва функции. В самой точке $x = a$ функция может существовать, а может и не существовать.



# Элементарные функции

- Линейная
- Обратная пропорциональность
- Степенная
- Показательная
- Логарифмическая
- Тригонометрические

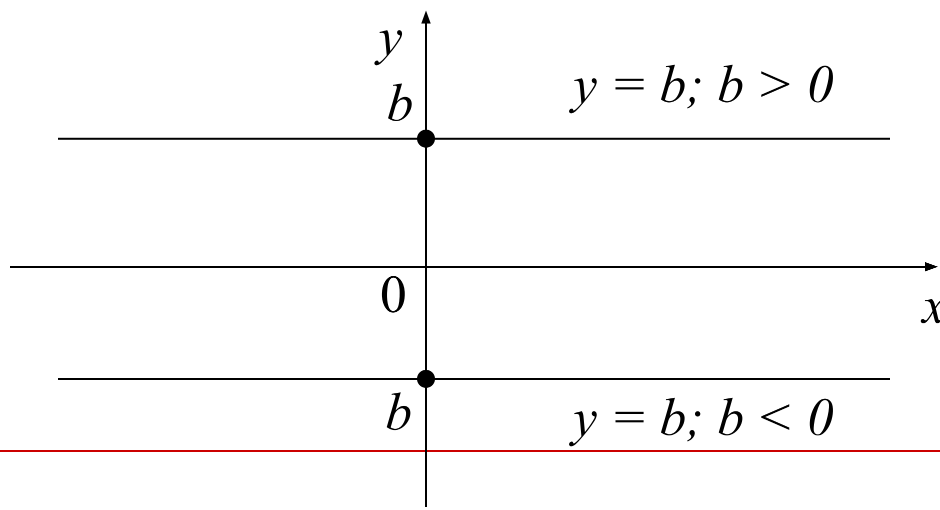
# Линейная функция

Функция вида $y = kx + b$, где $k$ и $b$ некоторые числа, называется **линейной**.

**1. Если $k = 0$, тогда $y = b$.**

Эта функция определена на множестве R и для каждого X принимает одно и то же значение, равное b.

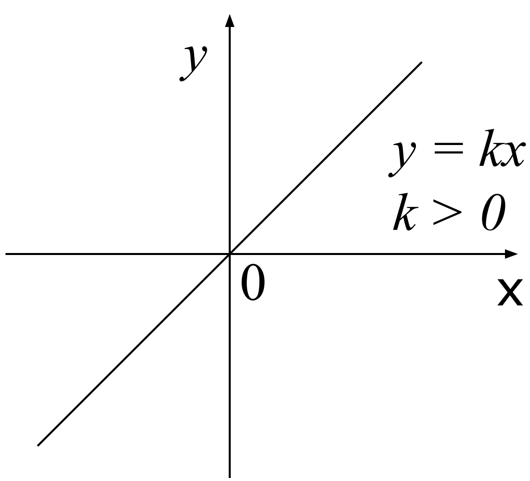
Графиком является прямая, параллельная оси Ox, если b = 0, то прямая совпадает с осью Ox.

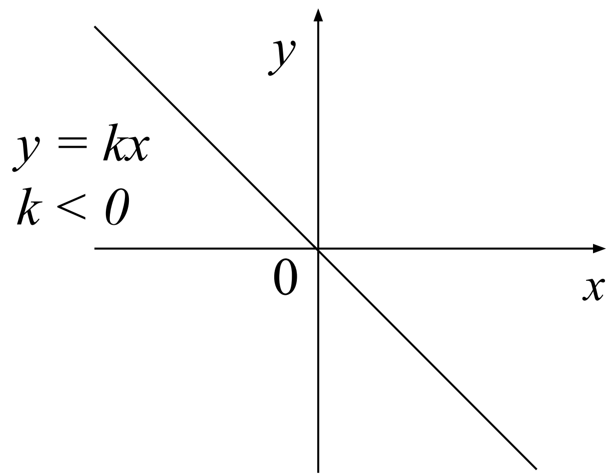


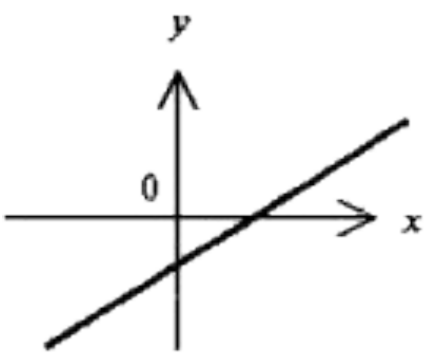
**2. Если $b = 0$, то $y = kx$.**

Линейная функция вида $y = kx$ называется прямой пропорциональностью. Она определена на множестве R.

Функция является монотонно возрастающей, если $k > 0$, и монотонно убывающей, если $k < 0$. Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ точки графика принадлежат I и III координатным четвертям. При $k < 0$ точки графика принадлежат II и IV координатным четвертям.



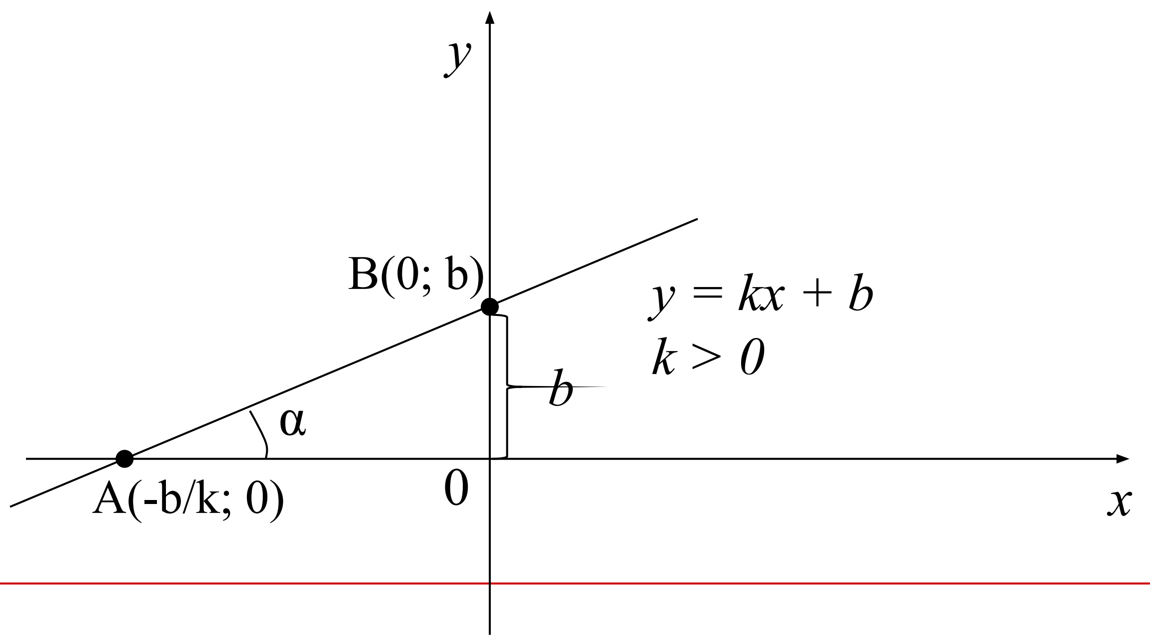




$y = kx + b$

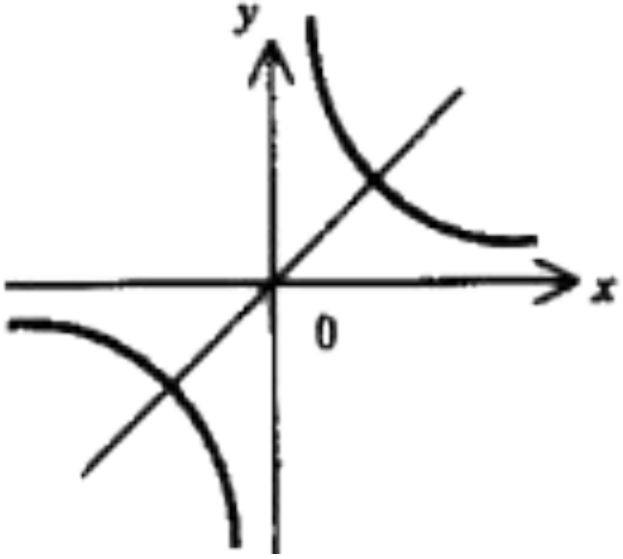
Коэффициенты $k$ и $b$ в уравнении линейной функции $y = kx + b$, имеют наглядное геометрическое толкование.

Значение коэффициента $b$ определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент $k$ определяет тангенс угла α, образованного осью абсцисс и прямой; угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс. Если $k > 0$, то образованный угол острый, если $k < 0$, то угол тупой.



# Обратная пропорциональность

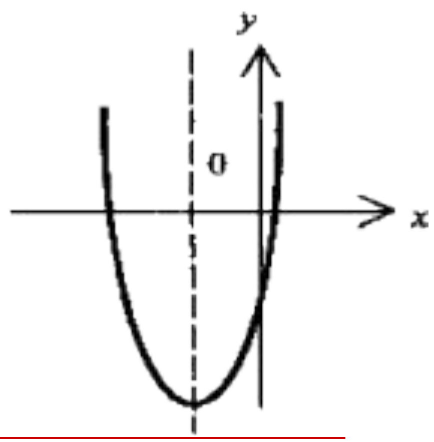
- *Гипербола* - график функции $y = \frac{a}{x}$. При $a > 0$ расположена в I и III четвертях, при $a < 0$ - во II и IV. Ось симметрии - прямая $y = x$ ($a > 0$) или у = - $x$ ($a < 0$).



# Степенная функция

Функция вида $y = x^n$. Пример – парабола.

*Парабола* - график функции квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$. Имеет вертикальную ось симметрии. Если $a > 0$, имеет минимум, если $a < 0$ - максимум. Точки пересечения (если они есть) с осью абсцисс - корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$



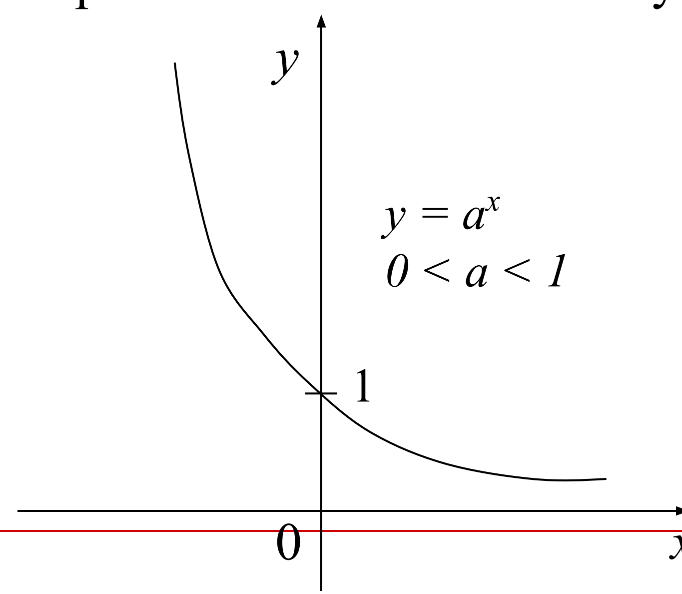
# Показательная функция

Функция, которую можно задать формулой $y = a^x$, $a > 0$, а $\neq 1$, называется **показательной**.

Эта функция определена для любых действительных $x$, а областью значений является промежуток $(0; +\infty)$.

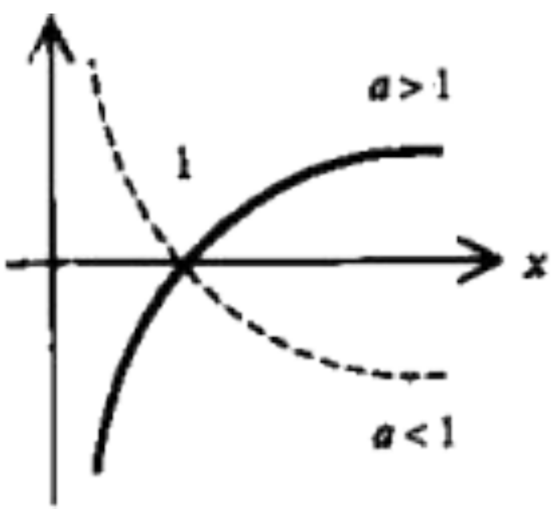
График показательной функции – кривая, проходящая через точку (0; 1). Он неограниченно приближается к оси абсцисс, но не достигает ее.

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ – монотонно убывает.

# Логарифмическая функция

Функция вида $y = log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется **логарифмической**.
 Эта функция определена на промежутке $(0; +\infty)$, а областью значений является промежуток $(-\infty; +\infty)$.
 Графиком логарифмической функции является кривая, проходящая через точку (1; 0). Он неограниченно приближается к оси ординат, но не достигает ее. При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ – монотонно убывает.



# Тригонометрические функции

**1.Функция синус** ($y$ = sin $x$)

Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел. Эта функция ограничена $|\sin x| \leq 1$. Она периодическая, ее период T = 2πn, sin( x + 2πn) = sin x. Функция $y$ = sin $x$ – **нечетная**: sin (-$x$) = -sin $x$ ее график симметричен относительно начала координат.

Функция принимает нулевые значения

При x = πn.

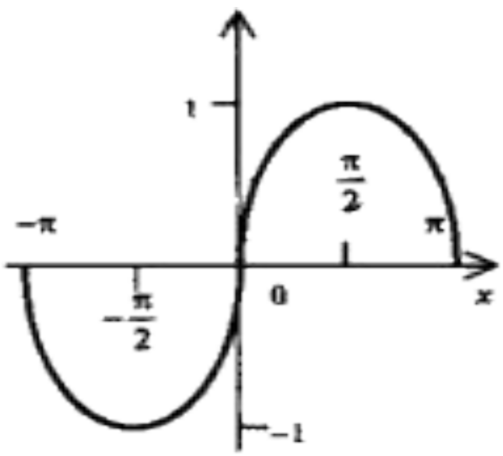
Функция $y$ = sin $x$ возрастает

на промежутках

[- π /2 + 2 π n; π /2 + 2 π n], n ∈ Z

и убывает на промежутках

[π /2 + 2 π n; 3π/2 + 2 πn], n ∈ Z



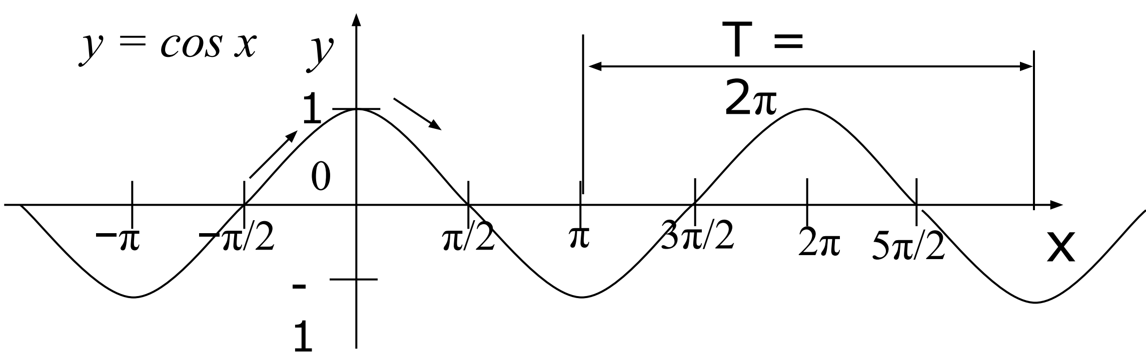
**2.Функция косинус** ($y = \cos x$)

Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел. Эта функция ограничена $|\cos x| \le 1$.

Она периодическая, ее период $T = 2\pi n$: $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$, $n \in Z$. Функция $y = \cos x$ – четная: $\cos(-x) = \cos x$ ее график симметричен относительно оси ординат.

Функция принимает нулевые значения при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

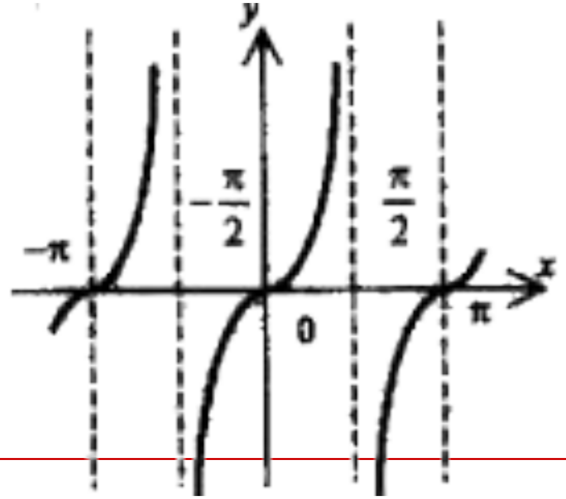
Функция $y = \cos x$ возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$ и убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$



# 3.Функция тангенс ($y$ = tg $x$)

Функция определена при $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Ее областью значений является интервал $(-\infty; +\infty)$

Она периодическая, ее период $T = \pi n$, $n \in Z$: $\mathrm{tg}(x + \pi n) = \mathrm{tg}\, x$, $n \in Z$.
Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ – нечетная: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ и ее график симметричен относительно начала координат. В точках $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$ функция $y = \mathrm{tg}\, x$ не существует, и говорят, что в этих точках функция терпит разрыв, т. е. она не является непрерывной.
Функция принимает нулевые значения при $x = \pi n$, $n \in Z$.
Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ возрастает на всех интервалах определения
$(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$.

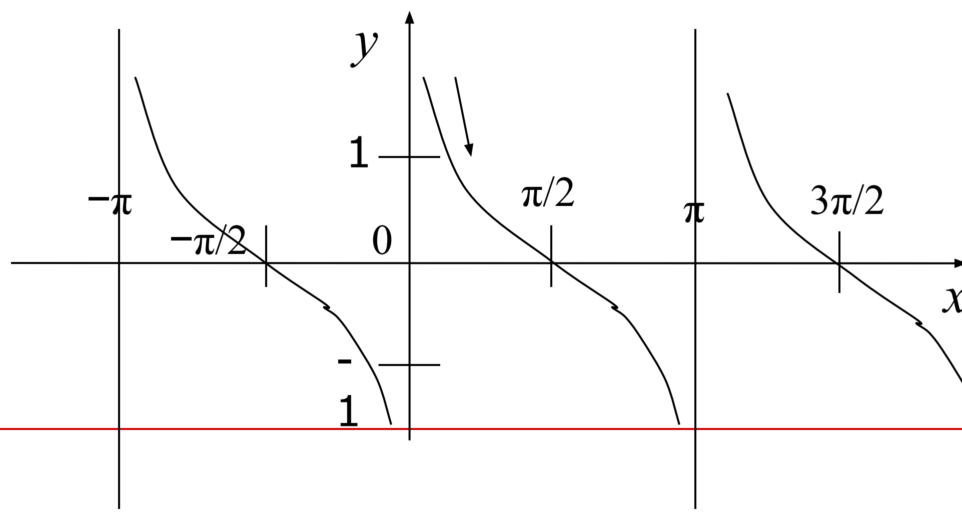


**4.Функция котангенс** ($y = \text{ctg}\ x$)

Функция определена при $x \neq \pi n$, $n \in Z$. Ее областью значений является интервал $(-\infty; +\infty)$ .

Она периодическая, ее период $T = \pi n$, $n \in Z$: $\text{ctg}(x + \pi n) = \text{ctg}\ x$, $n \in Z$. Функция $y = \text{ctg}\ x$ – нечетная: $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}\ x$ и ее график симметричен относительно начала координат. В точках $x = \pi n$, $n \in Z$ функция $y = \text{ctg}\ x$ не существует, и говорят, что в этих точках функция терпит разрыв, т. е. она не является непрерывной. Функция принимает нулевые значения при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$ . Функция $y = \text{ctg}\ x$ убывает на всех интервалах определения $(2\pi n; \pi + pn)$, $n \in Z$.

$y = \text{ctg}\ x$



# Домашнее задание

1. Найти область определения функций:

$$y=\sqrt{1-x^2};\qquad y=\left(\frac{1}{2}\right)^n;\qquad y=\sqrt{1-x^3};\qquad y=\frac{1}{x+2}$$

$$y=\sqrt{x+2};\qquad y=\sqrt{9-x^2};\qquad y=\sqrt{4x-x^2};$$

$$y=-\sqrt{2\sin x};\qquad y=2\sqrt{\cos x};\qquad y=\sqrt{x^2+1}$$

# Домашнее задание

2. Найти множество значений функций:

$y = x^2 - 6x + 5$;  $y = 3 + 2\sin x$;  $y = 1 - 3\cos x$;

$y = \sqrt{16 - x^2}$;  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

3. Исследовать на четность функции:

$y = x^{20}$;  $y = x^{13}$;  $y = 2^x + 2^{-x}$;  $y = x^2 + 5x$;

$y = \frac{x-4}{x^2+9}$  $y = \lg\frac{x+3}{x-3}$

# Домашнее задание

4. Функция задана в виде $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 3}$ .

Найти:

*1)* $y\ (-x)$;  2) $y\ (kx)$;  3) $y\ (x+a)$;  4) $y(|x|)$.

КрасГМУ

Красноярский Государственный Медицинский Университет им. проф. В.Ф.Войно-Ясенецкого


# БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ