Основные тригонометрические формулы

Знаки синуса, косинуса и тангенса

1. **Знаки синуса и косинуса.** Пусть точка (1;0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти, ординаты и абсциссы положительны. Поэтому sin α >0 и cos α >0, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис 3,4).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, sin α >0, cos α <0, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (рис 3,4). Аналогично в третьей четверти sin α <0, cos α <0, а в четвертой четверти sin α <0, cos α >0 (рис 3,4).

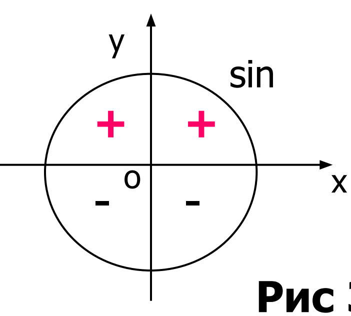

Рис 3

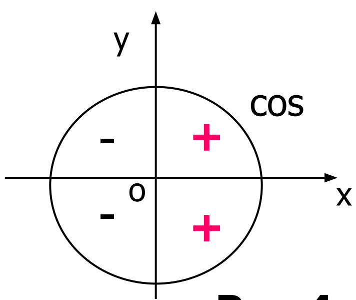

Рис 4

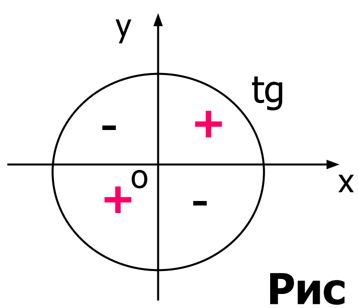

Рис 5

2. **Знаки тангенса.** По определению $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Поэтому tgα >0, если sin α и cosα имеют одинаковые знаки, и tgα <0, если sinα и cosα имеют противоположные знаки (рис5).

Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ - *основное тригонометрическое тождество.*

Из него можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом.* По определению тангенса и котангенса

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

Из этого равенства можно выразить $tg\alpha$ через $ctg\alpha$ и наоборот:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Пусть точки М1 и М2 единичной окружности получены поворотом точки Р(1;0) на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис 6). Тогда ось 0x делит угол М10М2 пополам, и поэтому точки М1 и М2 симметричны относительно оси 0x.

Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка М1 имеет координаты ($\cos\alpha; \sin\alpha$), точка М2 имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$.

Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Используя определение тангенса, получаем

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$$

Таким образом,

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

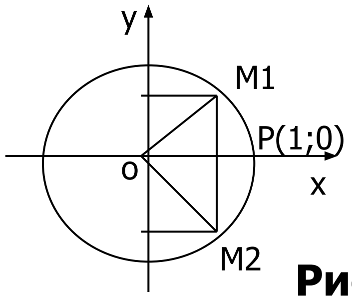

Рис 6

Формулы сложения

Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Итак, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2.

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) =$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Итак, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Полагая в формуле $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$ $\beta = \alpha$ получаем

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Синус, косинус и тангенс половинного угла

По известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти значения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $tg\frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ получаем $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (1)

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (2)

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (3)

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (4)

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad (6)$$

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Сумма и разность синусов.
Сумма и разность косинусов.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$