

Векторы

Разложение вектора по направлениям

Координаты вектора

Скалярное произведение векторов



Вектор (направленный отрезок) – отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая \overrightarrow{AB} концом... \vec{a}

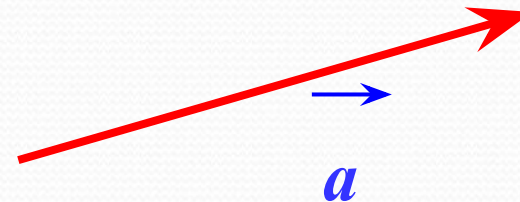
Обозначение: \vec{a} или \overrightarrow{AB}

Длиной или модулем вектора называется длина отрезка AB :

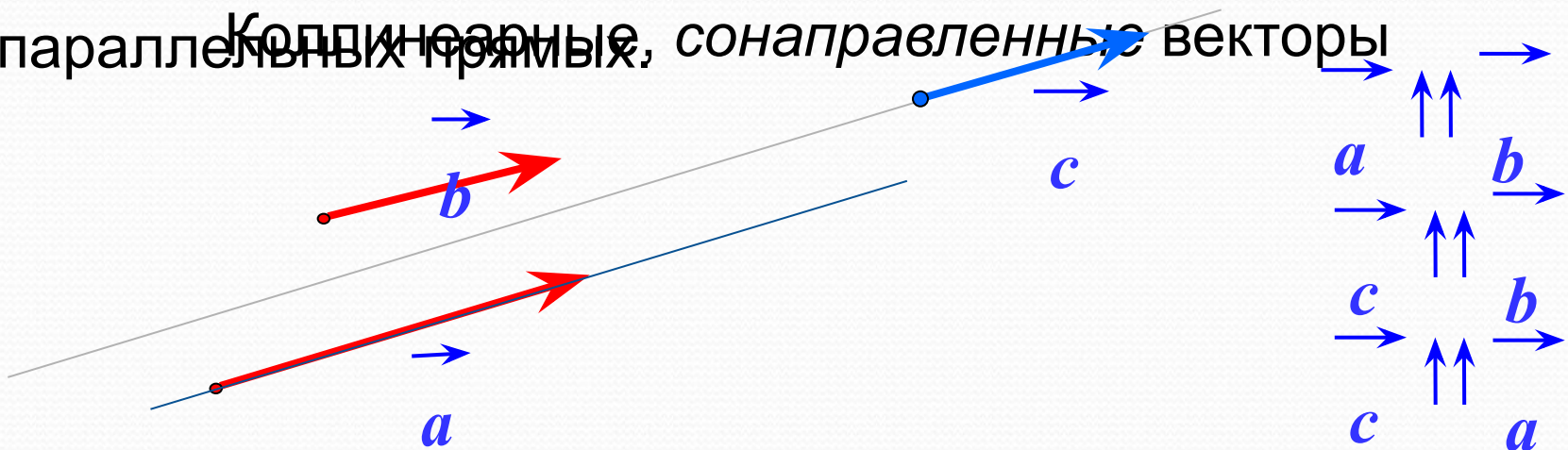
$$|\overrightarrow{AB}| = AB$$



Начало
вектора

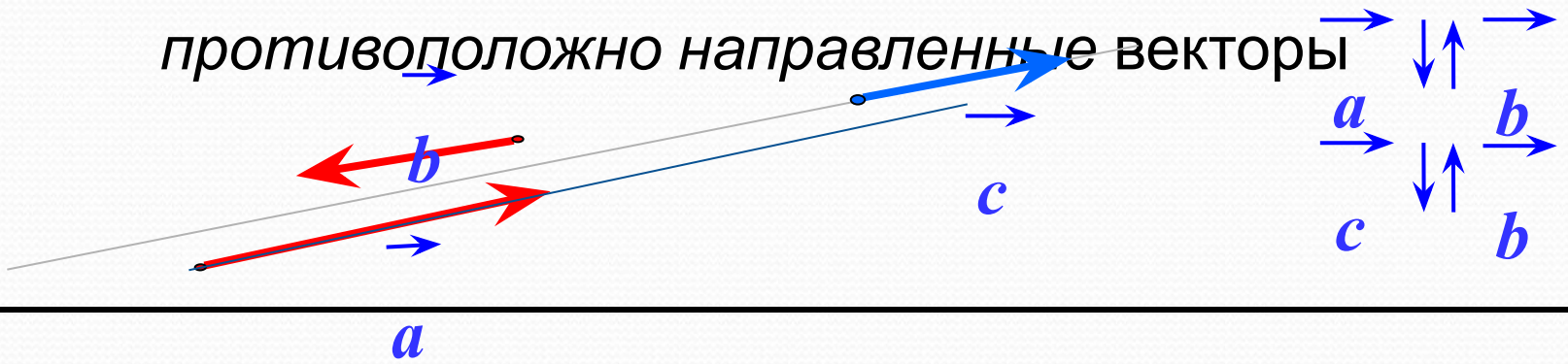


Два ненулевых вектора называются **КОЛЛИНЕАРНЫМИ**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, **сонаправленные** векторы

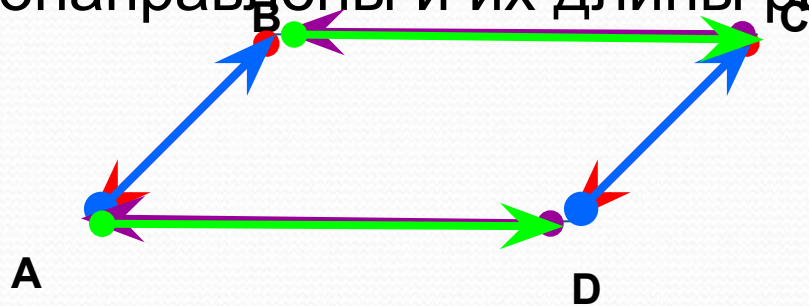


Коллинеарные,

противоположно направленные векторы

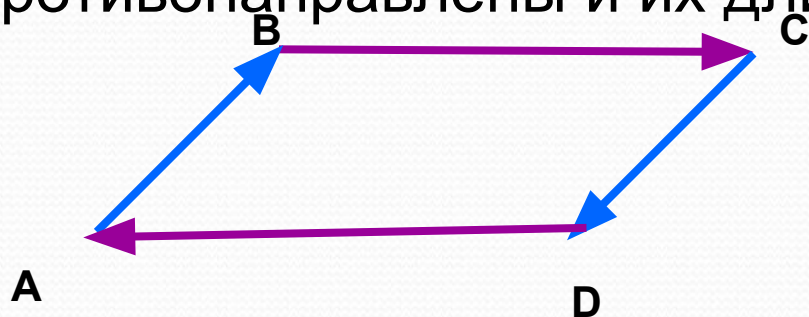


Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.



$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ |a| \\ \uparrow \\ a \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ |b| \\ \uparrow \\ b \end{array}$$

Векторы называются *противоположными*, если они противоположно направлены и их длины равны.



$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ |a| \\ \uparrow \\ a \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ |b| \\ \downarrow \\ b \end{array}$$

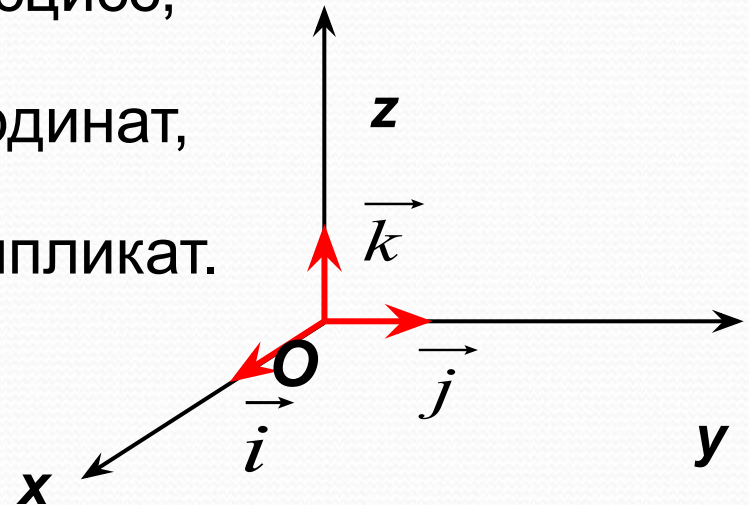
Рассмотрим ПДСК. *Единичным вектором* координатной оси будем называть вектор, направление которого совпадает с направлением этой оси и длина которого равна 1.

→

\vec{i} – единичный вектор оси абсцисс,

\vec{j} – единичный вектор оси ординат,

\vec{k} – единичный вектор оси аппликат.



Любой вектор \vec{a} можно разложить по координатным векторам, т.е. представить $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Нулевой вектор также можно представить в таком виде:

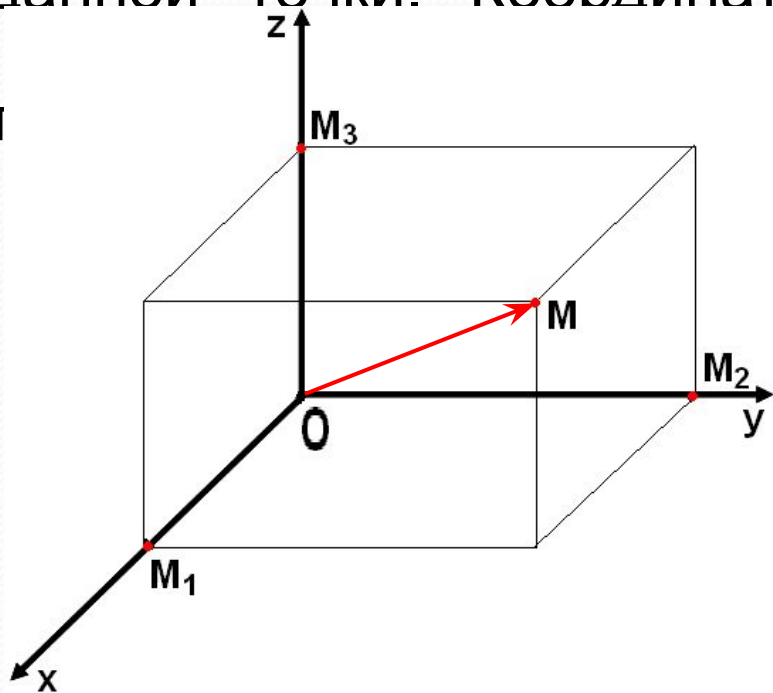
$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) = \vec{b}(x_2; y_2; z_2) \rightarrow x_1 = x_2; y_1 = y_2; z_1 = z_2$$

Координаты $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$ равны:

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x; \alpha y; \alpha z)$$

Сумма (разность) векторов:

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки. Координаты любой точки равны соотве-



$$p \quad M(x; y; z) \rightarrow \overrightarrow{OM}(x; y; z)$$

$$A(x_1; y_1; z_1) \text{ и } B(x_2; y_2; z_2) \rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Координаты середины отрезка

$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$

$C(x; y; z)$ – середина AB

$$\text{Тогда } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Длина вектора по его координатам:

$$\vec{a}(x; y; z) \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Даны векторы:

$$\vec{a}(3; 5; -7) \quad \vec{b}(4; -1; 3) \quad \vec{c}(0; 1; 8) \quad \vec{d}(3; 0; 0)$$

Найдите вектор, равный

а) $2\vec{a}$

б) $-3\vec{b}$

в) $\vec{a} + \vec{d}$

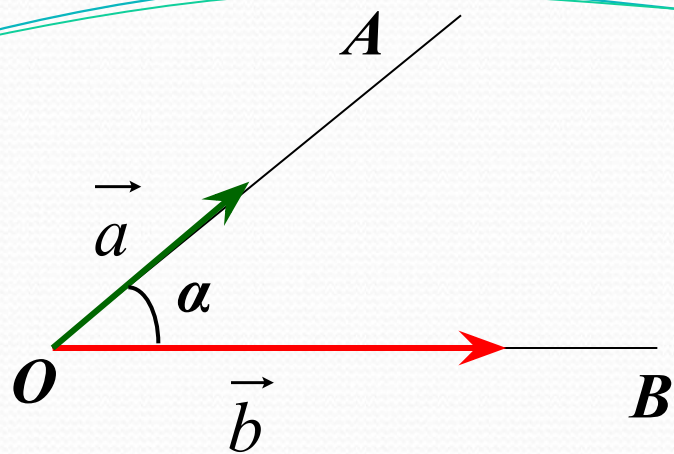
г) $\vec{b} - \vec{c}$

д) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$

е) $3\vec{d} - 2\vec{c}$

$$\vec{a}(3; 5; n) \quad \vec{b}(m; -10; 2)$$

Найдите значения m и n , при которых векторы коллинеарны.



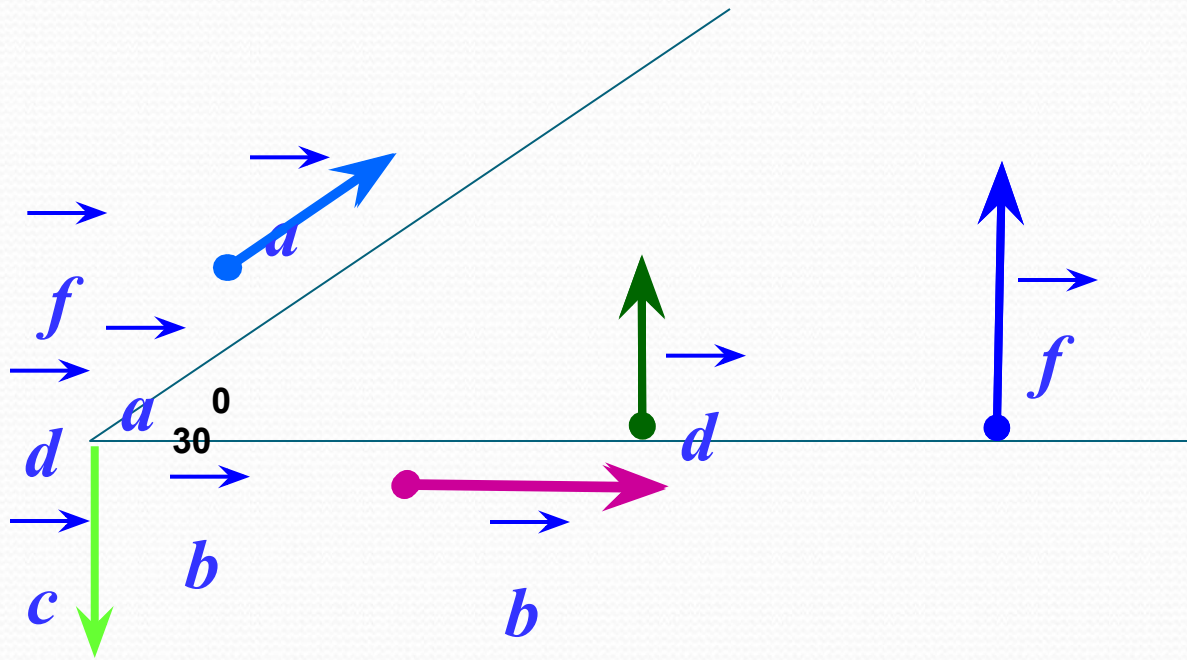
Угол между векторами

$$\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \alpha$$

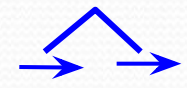
Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, $\alpha = 0^\circ$

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$, $\alpha = 180^\circ$

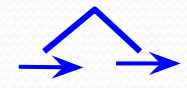
Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\alpha = 90^\circ$



$$d \quad c = 90$$



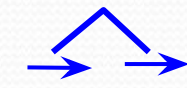
$$d \quad f = 90$$



$$a \quad b = 30$$



$$a \quad c = 120$$



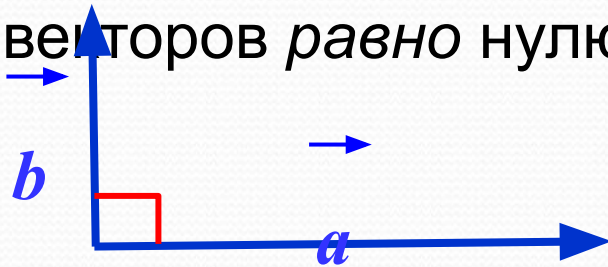
$$b \quad c = 90$$

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\angle a b)$$

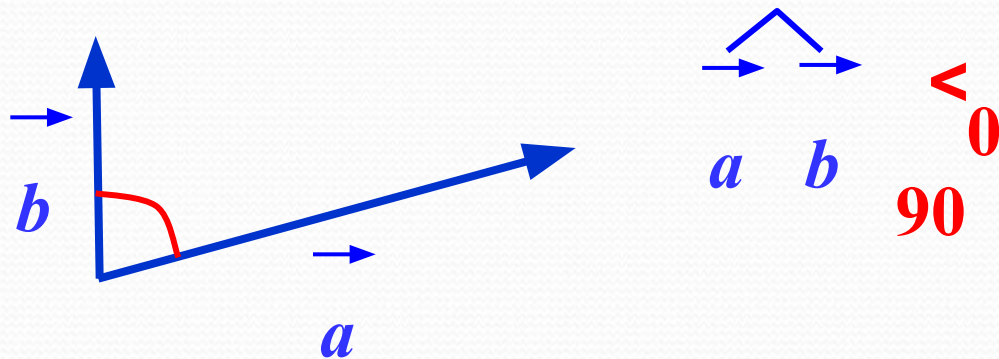
Скалярное произведение векторов – **число (скаляр)**.

Если векторы перпендикулярны, то скалярное произведение этих векторов *равно* нулю.

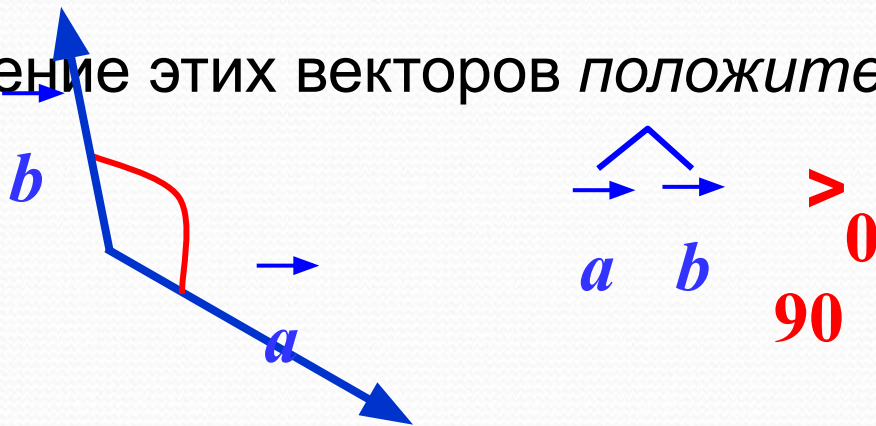


$$a \cdot b = 0$$

90



Если угол между векторами острый, то скалярное произведение этих векторов *положительно*.



Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение этих векторов *отрицательно*.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\alpha) \quad \alpha$$

Пусть векторы заданы своими координатами $\vec{a} (x^1; y^1; z^1)$ и $\vec{b} (x^2; y^2; z^2)$. Тогда скалярное произведение этих векторов равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = x^1x^2 + y^1y^2 + z^1z^2$

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$