Показательные уравнения

1).Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[5]{16} = 16^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}};$$

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}};\ \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}};\ \sqrt[3]{6^{-2}} = 6^{-\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{4}}.$$

2).Вычислить:

$$9^{\frac{1}{2}}=3;\quad 16^{\frac{1}{4}}=2;\quad 121^{\frac{1}{2}}=11;$$

$$8^{\frac{2}{3}}=4;\quad 81^{\frac{3}{4}}=27;\quad 1268^{0}=1.$$

3).Разложить на множители:

$$5-5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}}-1\right);\ x^{\frac{2}{3}}-x=x^{\frac{2}{3}}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right);$$

$$a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{1}{6}}+1\right);$$

$$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}\right).$$

Выносим степень с меньшим показателем!

Тема: *«Решение показательных уравнений».*

Задачи урока:

- ***Познакомиться с видами показательных уравнений.***
- ***Рассмотреть способы решений показательных уравнений различных видов.***
- ***Отработать навыки и умения решения показательных уравнений.***

I.Простейшие показательные уравнения вида

а). $a^x = b.$

$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1.$

- *Имеет один корень при* $b>0$;
- *Не имеет корней при* $b \leq 0$
- *Представим b в виде* $b = a^c$, *имеем:*

$$a^x = a^c$$

$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^c$ *по свойству степеней с одинаковыми основаниями*

решением уравнения является равенство $x = c$.

Пример:

$$2^x = 16;$$

$$2^x = 2^4;$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

2). В уравнении $a^x = a^\alpha$, левая и правая части приведены к одному основанию и решением уравнения является равенство $x = \alpha$

Т.к. $a^\alpha \neq 0$, разделим обе части уравнения на правую часть:

$$\frac{a^x}{a^\alpha} = \frac{a^\alpha}{a^\alpha} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = a^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

3). Очевидно, что уравнение $a^{f(x)} = a^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \alpha.$

Пример:

$$6^{x-3} = \sqrt[5]{36};$$

$$6^{x-3} = 6^{\frac{2}{5}};$$

$$x - 3 = \frac{2}{5}; \quad x = 3\frac{2}{5}.$$

Ответ: $3\frac{2}{5}$.

II. Показательные уравнения вида

а). $a^{f(x)} = 1,$

На основании определения о нулевом показателе $(a^0 = 1)$ имеем его решение:

$$f(x) = 0.$$

Пример:

$$2^{x^2 - 5x + 6} = 1;$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$x_1 = 2; x_2 = 3.$$

Ответ: 2 и 3.

б). $a^{f(x)} = b^{f(x)},$

Уравнения такого вида решаются с использованием теорем о возведении в степень произведения и дроби и им обратные, рассмотрим решение на примере:

Пример 1:

$$2^{x-2}=3^{x-2}.$$

Т.к. $3^{x-2}\neq 0,$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}}=\frac{3^{x-2}}{3^{x-2}};$$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}}=1;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}=1;$$

$$x-2=0;$$

$$x=2.$$

Ответ: $2.$

Пример 2:

$$5^{x-3}=7^{3-x}.$$

Т.к. $7^{3-x}\neq 0,$

$$\frac{5^{x-3}}{7^{3-x}}=\frac{7^{3-x}}{7^{3-x}};$$

$$5^{x-3}\cdot 7^{x-3}=1;$$

$$(5\cdot 7)^{x-3}=1;$$

$$x-3=0;$$

$$x=3.$$

Ответ: $3.$

III. Показательные уравнения вида (Способ вынесения за скобку)

$$A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + A_2 a^{mx+k_2} + \ldots + A_n a^{mx+k_n} = M,$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, M, a, m, k_0, k_1, k_2, k_n - const.$

Вынесем за скобки a^{mx+k_i}, где k_i -наименьшее число. Имеем:

$$a^{mx+k_i}\underbrace{(A_0 a^{k_0-k_i} + A_1 a^{k_1-k_i} + A_2 a^{k_2-k_i} + \ldots + A_n a^{k_n-k_i})}_{N} = M,$$

$$N - const.$$

$a^{mx+k_i} \cdot N = M$, при N≠0 получим уравнение:

$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$

$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$

Возможны три случая:

- $\frac{M}{N} = 1$, *уравнение сводится к виду* $$a^{f(x)} = 1;$$
- $\frac{M}{N} = a^{\alpha}$, *уравнение сводится к виду* $$a^{f(x)} = a^{\alpha}$$
- $\frac{M}{N} \le 0$, *данное уравнение не имеет корней.*

Пример 1:

$$6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71.$$

Вынесем за скобки 6^{x-1},

$$6^{x-1}(6^2+35)=71;$$

$$6^{x-1}\cdot 71=71;$$

$$6^{x-1}=\frac{71}{71};$$

$$6^{x-1}=1;$$

$$x-1=0.$$

$$x=1.$$

Ответ: 1.

Пример 2:

$$3^{x-1}-2\cdot 3^{x+2}=75.$$

Вынесем за скобки 3^{x-1},

$$3^{x-1}(1-2\cdot 3^3)=75;$$

$$3^{x-1}(1-54)=75;$$

$$3^{x-1}(-53)=75;$$

$$3^{x-1}=-\frac{75}{53};$$

уравнение корней не имеет.

Ответ: **корней нет.**

IV. Приведение показательного уравнения к квадратному:

а). $A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0,$

Выполним подстановку $a^x = y,$ *где* ***y>0,***

показательное уравнение превращается в обычное квадратное уравнение

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$$

Решением этого уравнения являются значения

y_1 ***и*** $y_{2;}$

Чтобы найти корни показательного уравнения нужно решить уравнения $a^x = y_1$ *и* $a^x = y_{2;}$

Если $y_1 \le 0$ *и* $y_2 \le 0,$ *одновременно, то данное показательное уравнение* *корней не имеет*.

Пример:

$$2^x + 4^x = 80.$$

$$2^x + 2^{2x} - 80 = 0;$$

Выполним подстановку $2^x = t,$ *где* *t>0,*

$$t^2 + t - 80 = 0;$$

$t_1 = -10;$-посторонний корень;

$$t_2 = 8;$$

Решим уравнение

$$2^x = 8,$$

$$2^x = 2^3,$$

$$x = 3.$$

Ответ: $3.$

Решить показательные уравнения

1) $5^x=625$;

2) $100^x=10$;

3) $4^x=256$;

4) $3^{x-1}=27$;

5) $5^{x-2}=25$;

6) $3^x=\frac{1}{9}$;

7) $12^x=1$;

8) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=49$;

9) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1{,}5$;

10) $a^x=a^2$; $a>0; a\neq 1$.

11) $5^{-x}=25$;

12) $2^{-x}=8$;

13) $4^x=2$;

14) $27^x=3$;

15) $2^x\cdot 3^x=36$;

16) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$;

17) $5^x\cdot 2^x=400$;

18) $10^{x+1}=0{,}1$;

19) $3^{x^2-x}=1$;

20) $5^x=-25$.

Индивидуальная работа.

<u>Из данных вариантов решить один(по выбору):</u>

III уровень

Вариант №1.	**Вариант №2.**
$3\cdot4^x+2\cdot9^x=5\cdot6^x.$	$2\cdot16^x-2^{4x}-4^{2x-2}=15.$

II уровень

Вариант №3.	**Вариант №4.**
$3^{x+1}-2\cdot3^{x-2}=75.$	$7^{x-2}=4^{2-x}.$
Дополнительно:	
$\sqrt{3^x}=9.$ +1б.	$\sqrt[3]{2^x}=8.$ +1б.

I уровень

Вариант №5.	**Вариант №6.**
$\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}.$	$\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36.$
Дополнительно:	
а). $2^{4x}=16$; б). $3^x=1$.	а). $3^{3x}=27$; б). $4^x=-64$.
+1б. +1б.	+1б. +1б.