

Показательные уравнения

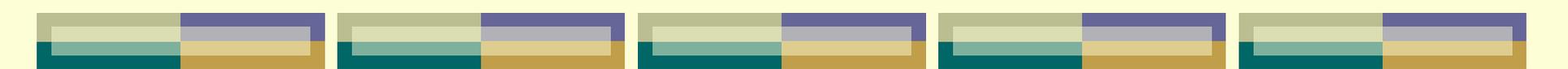


1). Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}; \sqrt[5]{16} = 16^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}};$$

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}; \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}; \sqrt[3]{6^{-2}} = 6^{-\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{4}}.$$



2). Вычислить:

$$9^{\frac{1}{2}} = 3; \quad 16^{\frac{1}{4}} = 2; \quad 121^{\frac{1}{2}} = 11;$$

$$8^{\frac{2}{3}} = 4; \quad 81^{\frac{3}{4}} = 27; \quad 1268^0 = 1.$$



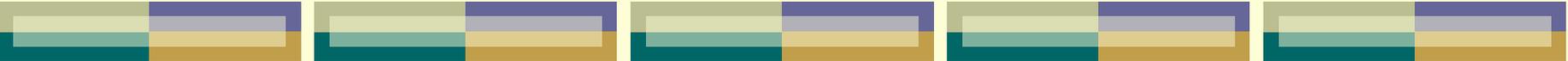
3). Разложить на множители:

$$5 - 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{2}} - 1 \right); \quad x^{\frac{2}{3}} - x = x^{\frac{2}{3}} \left(1 - x^{\frac{1}{3}} \right);$$

$$a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}} \left(a^{\frac{1}{6}} + 1 \right);$$

$$x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} \right).$$

Выносим степень с меньшим показателем!



Тема: «*Решение показательных уравнений*».

Задачи урока:

- *Познакомиться с видами показательных уравнений.*
 - *Рассмотреть способы решений показательных уравнений различных видов.*
 - *Отработать навыки и умения решения показательных уравнений.*
- 

I. Простейшие показательные уравнения вида

a). $a^x = b.$

- $y = a^x, a > 0, a \neq 1.$
- *Имеет один корень при $b > 0;$*
- *Не имеет корней при $b \leq 0$*
- *Представим b в виде $b = a^c$, имеем:*

$$a^x = a^c$$

$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^c$ по свойству
степеней с одинаковыми основаниями

решением уравнения является равенство x

$= c.$

Пример:

$$2^x = 16;$$

$$2^x = 2^4;$$

$$x = 4.$$

Ответ: $4.$

2). В уравнении $a^x = a^\alpha$ левая и правая части приведены к одному основанию и решением уравнения является равенство $x = \alpha$

Т.к. $a^\alpha \neq 0$, разделим обе части уравнения на правую часть:

$$\frac{a^x}{a^\alpha} = \frac{a^\alpha}{a^\alpha} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = a^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

3). Очевидно, что уравнение $a^{f(x)} = a^\alpha \Leftrightarrow$

Пример:

$$6^{x-3} = \sqrt[5]{36};$$

$$6^{x-3} = 6^{\frac{2}{5}};$$

$$x - 3 = \frac{2}{5}; \quad x = 3\frac{2}{5}. \quad \text{Ответ: } 3\frac{2}{5}.$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \alpha.$$

II. Показательные уравнения вида

а). $a^{f(x)} = 1,$

На основании определения о нулевом показателе ($a^0 = 1$) имеем его решение:

$$f(x) = 0.$$

Пример:

$$2^{x^2 - 5x + 6} = 1;$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$x_1 = 2; x_2 = 3. \text{ Ответ: } 2 \text{ и } 3.$$

б). $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Уравнения такого вида решаются с использованием теорем о возведении в степень произведения и дроби и их обратные, рассмотрим решение на примере:

Пример 1:

$$2^{x-2} = 3^{x-2}.$$

Т.к. $3^{x-2} \neq 0$,

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}} = \frac{3^{x-2}}{3^{x-2}};$$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}} = 1;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 1;$$

$$x-2 = 0;$$

$$x = 2.$$

Ответ: **2.**

Пример 2:

$$5^{x-3} = 7^{3-x}.$$

Т.к. $7^{3-x} \neq 0$,

$$\frac{5^{x-3}}{7^{3-x}} = \frac{7^{3-x}}{7^{3-x}};$$

$$5^{x-3} \cdot 7^{x-3} = 1;$$

$$(5 \cdot 7)^{x-3} = 1;$$

$$x-3 = 0;$$

$$x = 3.$$

Ответ: **3.**

III. Показательные уравнения вида (Способ вынесения за скобку)

$$A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + A_2 a^{mx+k_2} + \dots + A_n a^{mx+k_n} = M,$$

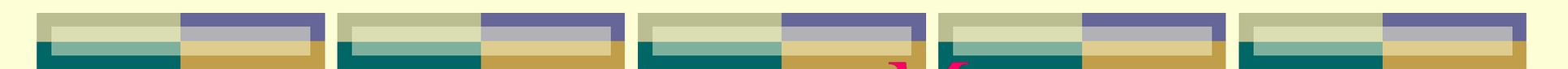
где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, M, a, m, k_0, k_1, k_2, k_n - \text{const.}$
Вынесем за скобки a^{mx+k_i} - наименьшее
число. Имеем:

$$a^{mx+k_i} (A_0 a^{k_0-k_i} + A_1 a^{k_1-k_i} + A_2 a^{k_2-k_i} + \dots + A_n a^{k_n-k_i}) = M,$$

$N - \text{const.}$

$a^{mx+k_i} \cdot N = M$, при $N \neq 0$ получим уравнение:

$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$


$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$

Возможны три случая:

- $\frac{M}{N} = 1$, уравнение сводится к виду $a^{f(x)} = 1$;
 - $\frac{M}{N} = a^\alpha$, уравнение сводится к виду $a^{f(x)} = a^\alpha$;
 - $\frac{M}{N} \leq 0$, данное уравнение не имеет корней.
- 

Пример 1:

$$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71.$$

Вынесем за скобки 6^{x-1} ,

$$6^{x-1} (6^2 + 35) = 71;$$

$$6^{x-1} \cdot 71 = 71;$$

$$6^{x-1} = \frac{71}{71};$$

$$6^{x-1} = 1;$$

$$x - 1 = 0.$$

$$x = 1.$$

Ответ: **1.**

Пример 2:

$$3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x+2} = 75.$$

Вынесем за скобки 3^{x-1} ,

$$3^{x-1} (1 - 2 \cdot 3^3) = 75;$$

$$3^{x-1} (1 - 54) = 75;$$

$$3^{x-1} (-53) = 75;$$

$$3^{x-1} = -\frac{75}{53};$$

уравнение корней не имеет.

Ответ: *корней нет.*

IV. Приведение показательного уравнения к квадратному:

а). $A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0,$

Выполним подстановку $a^x = y,$ где $y > 0,$
показательное уравнение превращается в обычное
квадратное уравнение

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$$

Решением этого уравнения являются значения

$$y_1 \text{ и } y_2;$$

Чтобы найти корни показательного уравнения нужно
решить уравнения

Если $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0,$ одновременно, то данное
показательное уравнение корней не имеет.

Пример:

$$2^x + 4^x = 80.$$

$$2^x + 2^{2x} - 80 = 0;$$

Выполним подстановку $2^x = t, t > 0,$

$$t^2 + t - 80 = 0;$$

$t_1 = -10;$ -посторонний корень;

$$t_2 = 8;$$

Решим уравнение

$$2^x = 8,$$

$$2^x = 2^3,$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

Решить показательные уравнения

1) $5^x = 625;$

2) $100^x = 10;$

3) $4^x = 256;$

4) $3^{x-1} = 27;$

5) $5^{x-2} = 25;$

6) $3^x = \frac{1}{9};$

7) $12^x = 1;$

8) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 49;$

9) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1,5;$

10) $a^x = a^2;$
 $a > 0; a \neq 1.$

11) $5^{-x} = 25;$

12) $2^{-x} = 8;$

13) $4^x = 2;$

14) $27^x = 3;$

15) $2^x \cdot 3^x = 36;$

16) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4;$

17) $5^x \cdot 2^x = 400;$

18) $10^{x+1} = 0,1;$

19) $3^{x^2-x} = 1;$

20) $5^x = -25.$

Индивидуальная работа.

Из данных вариантов решить один(по выбору):

<p><u>Вариант №1.</u> <i>III уровень</i></p> $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x.$	<p><u>Вариант №2.</u></p> $2 \cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} = 15.$
<p><u>Вариант №3.</u> <i>II уровень</i></p> $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75.$ <p><u>Дополнительно:</u></p> $\sqrt{3^x} = 9. \quad +16.$	<p><u>Вариант №4.</u></p> $7^{x-2} = 4^{2-x}.$ <p><u>Дополнительно:</u></p> $\sqrt[3]{2^x} = 8. \quad +16.$
<p><u>Вариант №5.</u> <i>I уровень</i></p> $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}.$ <p><u>Дополнительно:</u></p> <p>а). $2^{4x} = 16$; б). $3^x = 1$.</p> <p>+16. +16.</p>	<p><u>Вариант №6.</u></p> $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36.$ <p><u>Дополнительно:</u></p> <p>а). $3^{3x} = 27$; б). $4^x = -64$.</p> <p>+16. +16.</p>