



Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Нестационарная теплопроводность цилиндра конечных размеров

Специальность 14.03.01 «Ядерная энергетика и теплофизика»

*Группа: ТФ-12-18
Студенты: Пронин Богдан
Шелухин Андрей*

Актуальность работы

С расчётами нагревания и охлаждения тел часто приходится иметь дело в различных отраслях. В этом случае основным рабочим режимом является нестационарный, при котором определяют время, необходимое для прогрева или охлаждения материала до необходимой температуры, или температуру, до которой происходит нагрев (охлаждение) в течение известного промежутка времени. В данной работе мы рассмотрим пример нестационарной теплопроводности в перевозимой автоцистерне наполненной водой при отрицательной температуре окружающей среды.



Цель работы

Показать общие особенности нестационарных процессов, познакомиться с методом решения задач нестационарной теплопроводности и получить математические соотношения для практических расчётов, а также применить полученные навыки расчётов для решения задачи нестационарной теплопроводности для цилиндра конечных размеров.



Постановка задачи

В качестве практического примера подобной задачи представим ситуацию, когда в сильные заморозки необходимо перевести или хранить значительный объём воды в автоцистерне. В расчёте мы принимаем форму цистерны за идеальный цилиндр конечных размеров. Будут рассмотрены два случая для цистерн разных размеров. Обе цистерны имеют диаметр 2500 мм и изготовлены из материала марки Сталь 09Г2С. Отличие цистерн для двух случаев заключается в том, что в первом случае длина цистерны 9000 мм, а во втором 4500 мм.

Итогом расчётов будет вынесение графиков температурного состояния воды в цистерне через определённое время, а так же сравнение полученных зависимостей



Теоретические данные



Для пластины:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

$$\text{при } \tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_0 - t_{\text{жс}}$$

$$\text{при } x = 0 \quad (\partial \vartheta / \partial x)_{x=0} = 0$$

$$\text{при } x = \delta \quad (\partial \vartheta / \partial x)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta}$$

$$\vartheta = f(x, \tau) = \psi(x) \cdot \varphi(\tau)$$

$$\varphi'(\tau) + ak^2 \varphi(\tau) = 0$$

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0$$

$$\varphi(\tau) = C_1 \exp(-ak^2 \tau)$$

$$\psi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)$$

$$\vartheta(x, \tau) = [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)] \cdot C_1 \exp(-ak^2 \tau)$$

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\mu_n \frac{x}{\delta}) \cdot \exp(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2})$$

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$$

$$\Theta = \frac{t - t_{\text{жс}}}{t_0 - t_{\text{жс}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cdot \cos(\mu_n X) \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo)$$

Для цилиндра:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)$$

при $\tau = 0$ $\vartheta = \vartheta_0 = t_0 - t_{жс}$

при $x = 0$ $(\partial \vartheta / \partial r)_{x=0} = 0$

при $x = r_0$ $(\partial \vartheta / \partial r)_{x=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=r_0}$

$$\vartheta = f(r, \tau) = \psi(x) \cdot \varphi(\tau)$$

.....

$$\Theta = \frac{t - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \cdot J_0(\mu_n) \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo)$$

Число Био и критерий Фурье

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha}$$

$$Fo = \frac{a \tau}{\delta^2} = \frac{\tau}{\delta^2 / a}$$

ORIGIN := 1

Зададим исходные данные задачи

Цистерна №1 $l1 := 9$ $d1 := 2.5$ $r1 := 1.25$

Цистерна №2 $l2 := 4.5$ $d2 := 2.5$ $r2 := 1.25$

Температура среды в которую помещены цистерны $t_{ж} := -30$

Начальная температура среды внутри цистерны $t1 := 20$

Конечная температура среды внутри цистерны $t2 := 0$

Коэффициент теплопроводности $\lambda := 5.99 \cdot 10^{-1}$

Коэффициент температуропроводности $a := 1.43 \cdot 10^{-7}$

Плотность $\rho := 9.982 \cdot 10^2$

Коэффициент теплоотдачи $\alpha := 11.3$

Составим программу для расчёта искомых параметров

Зададим формулы для расчёта чила Био и числа Фурье

Для цилиндра и плоской стенки

$$\text{Bir} := \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} \quad \text{Bil} := \frac{\alpha \cdot 1}{\lambda}$$

$$\text{F0l}(\tau) := \frac{a \cdot \tau}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \text{F0r}(\tau) := \frac{a \cdot \tau}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Зададим программный блок для расчёта коэффициентов μ для цилиндрической плоскости

```

f_J0(N) :=
  for j ∈ 1..N
  |
  | z ←  $\frac{\pi}{4} \cdot (4j - 1) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot j - 1)}$ 
  | z0_j ← root(J0(z), z)
  |
  z0

f_J1(N) :=
  z1_1 ← 0
  z0 ← f_J0(N)
  if N = 1
  |
  | z1_N ← 0
  | return z1
  for j ∈ 2..N
  |
  | z1_j ← root(J1(z), z, z0_{j-1}, z0_j)
  |
  z1

μ(Bir, N) :=
  γ ← 10-2
  z0 ← f_J0(N)
  z1 ← f_J1(N)
  for j ∈ 1..N
  |
  | μ_j ← root( $\frac{J0(z)}{J1(z)} - \frac{z}{\text{Bir}}, z, z1_j + \gamma, z0_j - \gamma$ )
  |
  μ
  
```

Результаты программного блока для расчёта коэффициентов μ для цилиндрической плоскости для Цилиндра №1

$$\mu(\text{Bir}, 50) =$$

	1
1	2.305
2	5.295
3	8.308
4	11.335
5	14.374
6	17.424
7	20.486
8	23.557
9	26.637
10	29.724
11	32.818
12	35.918
13	39.022
14	42.13
15	45.242
16	...

Результаты программного блока для расчёта коэффициентов μ для цилиндрической плоскости для Цилиндра №2

$$\mu(\text{Bir}, 50) =$$

	1
1	2.305
2	5.295
3	8.308
4	11.335
5	14.374
6	17.424
7	20.486
8	23.557
9	26.637
10	29.724
11	32.818
12	35.918
13	39.022
14	42.13
15	45.242
16	...

+



Зададим программный блок для расчёта коэффициентов ε для цилиндрической плоскости

$$\varepsilon_{\text{Bil}, N} := \begin{cases} \gamma \leftarrow 10^{-12} \\ \text{for } i \in 1..N \\ \varepsilon_i \leftarrow \text{root} \left[\cot(\text{eps}) - \frac{\text{eps}}{\text{Bil}}, \text{eps}, (i-1) \cdot \pi + \gamma, i \cdot \pi - \gamma \right] \\ \varepsilon \end{cases}$$

Результаты програмного блока для расчёта коэффициентов ε для цилиндрической плоскости для Цилиндра №1

$\varepsilon(\text{Bil}, 50) =$

	1
1	1.553
2	4.658
3	7.763
4	10.868
5	13.974
6	17.08
7	20.187
8	23.294
9	26.402
10	29.511
11	32.62
12	35.73
13	38.841
14	41.953
15	45.065
16	...

+

Результаты програмного блока для расчёта коэффициентов ε для цилиндрической плоскости для Цилиндра №2

$\varepsilon(\text{Bil}, 50) =$

	1
1	1.535
2	4.604
3	7.675
4	10.748
5	13.822
6	16.9
7	19.98
8	23.064
9	26.151
10	29.242
11	32.336
12	35.433
13	38.533
14	41.636
15	44.741
16	...

Блок программ для расчёта безразмерной температуры Θ_l и Θ_r

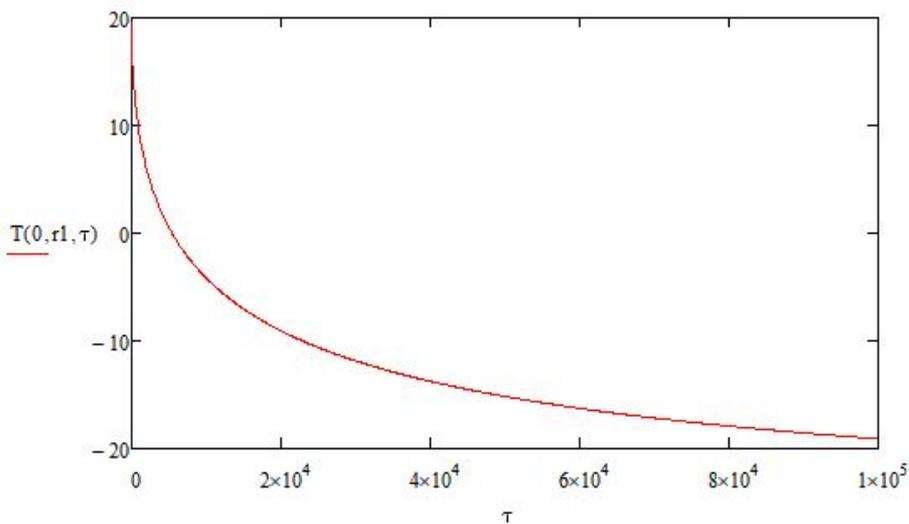
$$\Theta_l(X, Fo_l, Bi_l, N) := \left[\begin{array}{l} \varepsilon \leftarrow \varepsilon(Bi_l, N) \\ \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ A \leftarrow \frac{2 \cdot \sin(\varepsilon)}{\varepsilon + \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\varepsilon)} \\ \sum_{i=1}^N \left[A_i \cdot \cos(\varepsilon_i \cdot X) \cdot \exp\left[-(\varepsilon_i)^2 \cdot Fo_l\right] \right] \end{array} \right]$$

$$\Theta_r(R, Fo, Bi, N) := \left[\begin{array}{l} \mu \leftarrow \mu(Bi_r, N) \\ B \leftarrow \left(\frac{2}{\mu} \cdot \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)^2 + J_1(\mu)^2} \right) \\ \sum_{j=1}^N \left[B_j \cdot J_0(\mu_j \cdot R) \cdot \exp\left[-(\mu_j)^2 \cdot Fo\right] \right] \end{array} \right]$$

Программа для расчёта зависимости температуры от координат и времени

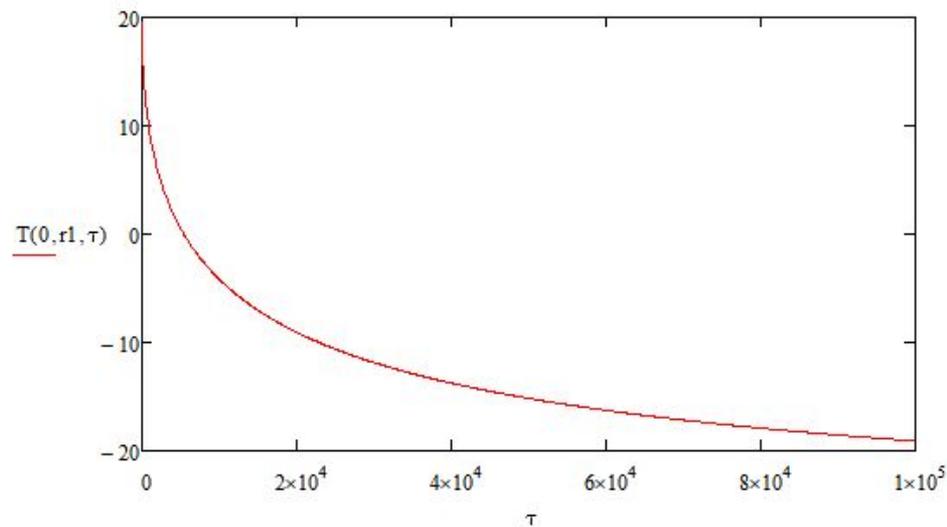
$$T(x, r, \tau) := \left[\begin{array}{l} \left[\left(X \leftarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} \right) \left(R \leftarrow \frac{r}{\frac{d}{2}} \right) \right] \\ \left[\left[Fo_l \leftarrow \frac{a \cdot \tau}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right] \left[For \leftarrow \frac{a \cdot \tau}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \right] \right] \\ \left[\left(Bi_l \leftarrow \frac{\alpha \cdot \frac{1}{2}}{\lambda} \right) \left(Bi_r \leftarrow \frac{\alpha \cdot \frac{d}{2}}{\lambda} \right) \right] \\ \Theta_p \leftarrow \Theta_l(X, Fo_l, Bi_l, N) \\ \Theta_c \leftarrow \Theta_r(R, For, Bi_r, N) \\ \Theta \leftarrow \Theta_p \cdot \Theta_c \\ T \leftarrow T_{ж} + (T_0 - T_{ж}) \cdot \Theta \\ T \end{array} \right]$$

Построим график зависимости температуры на поверхности цистерны №1 от времени нахождения в среде



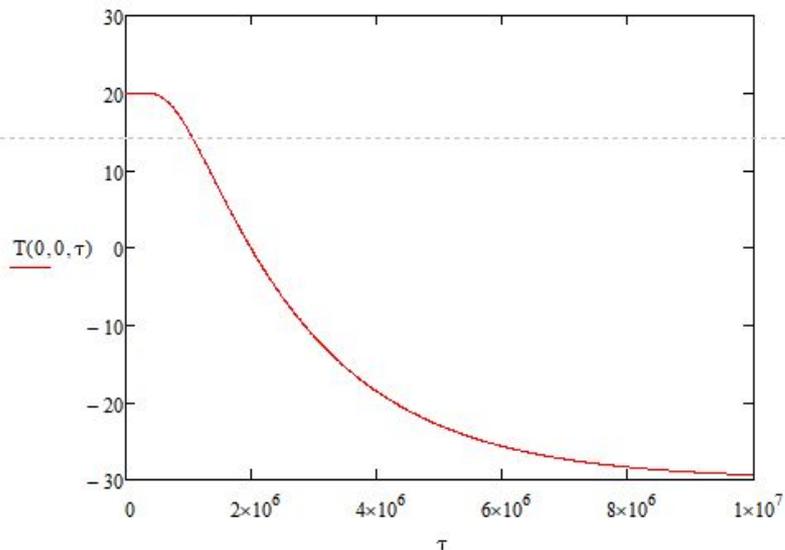
При помощи аналитических функций программы MathCad определим что образование льда на поверхности цистерны №1 наступит через 5400 секунд (90 минут)

Построим график зависимости температуры на поверхности цистерны №2 от времени нахождения в среде



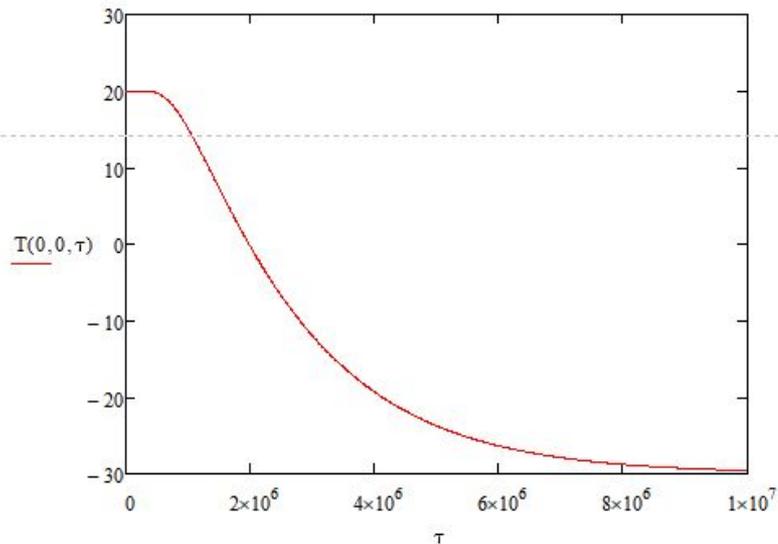
При помощи аналитических функций программы MathCad определим что образование льда на поверхности цистерны №2 наступит через 5500 секунд (91 минут)

Построим график зависимости температуры на поверхности цистерны №1 от времени нахождения в среде



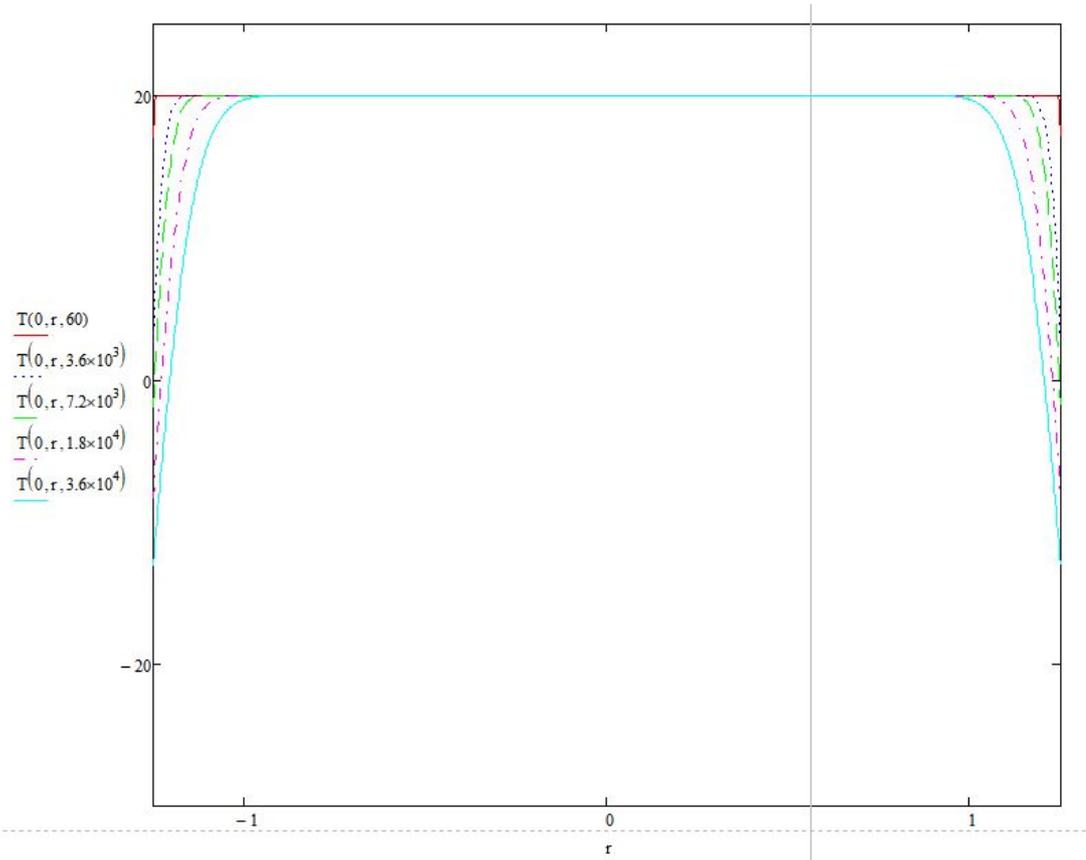
При помощи аналитических функций программы MathCad определим что цистерна №1 промёрзнет до своей оси за $2 \cdot 10^6$ секунд (555 часов или 23 дня)

Построим график зависимости температуры на поверхности цистерны №2 от времени нахождения в среде



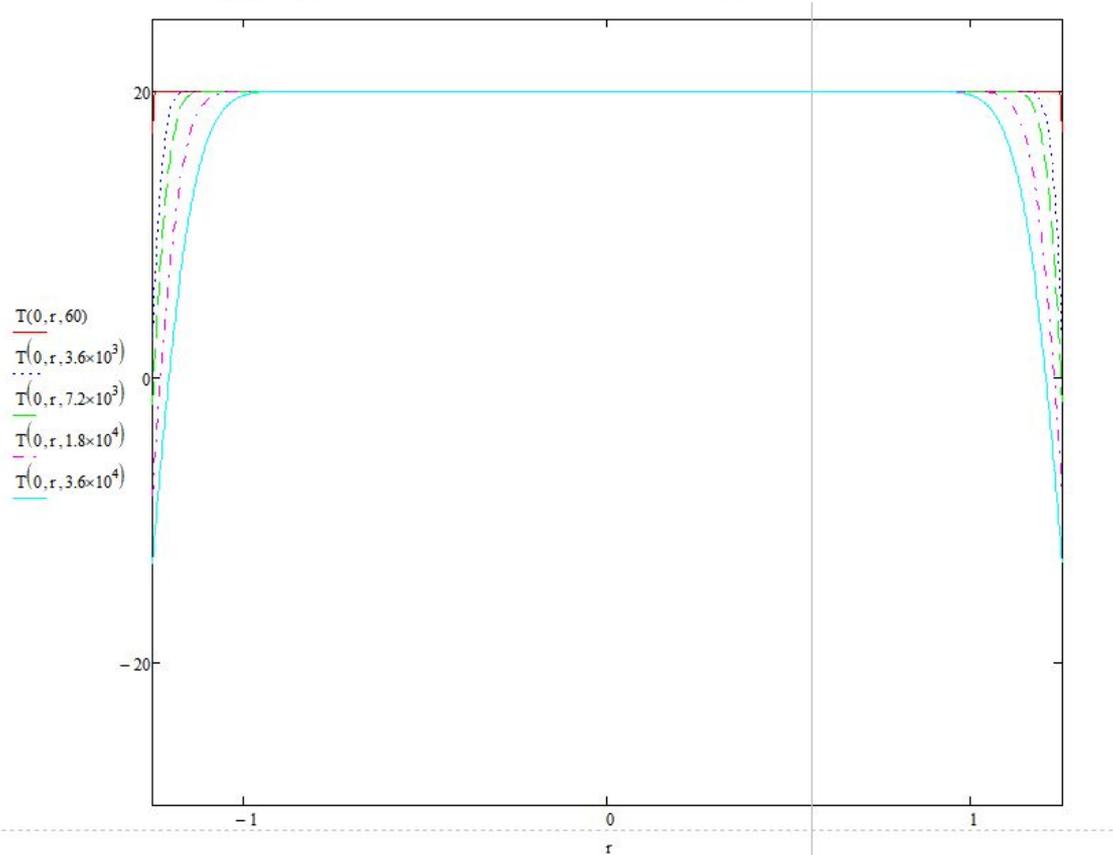
При помощи аналитических функций программы MathCad определим что цистерна №2 промёрзнет до своей оси за $1.98 \cdot 10^6$ секунд (550 часов или 23 дня)

Построим график распределения температуры по радиусу цистерны №1 через 1 минуту, 1 час, 2 часа, 5 часов и 10 часов соответственно



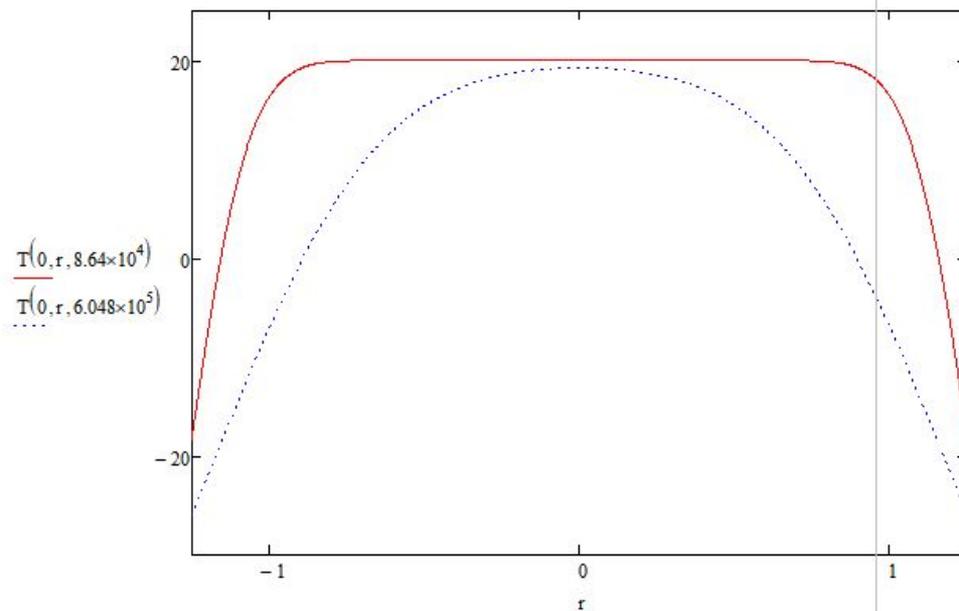
По построенному графику можно сделать вывод что за приведённые выше значения времени незначительны для данного процесса

Построим график распределения температуры по радиусу цистерны №2 через 1 минуту, 1 час, 2 часа, 5 часов и 10 часов соответственно



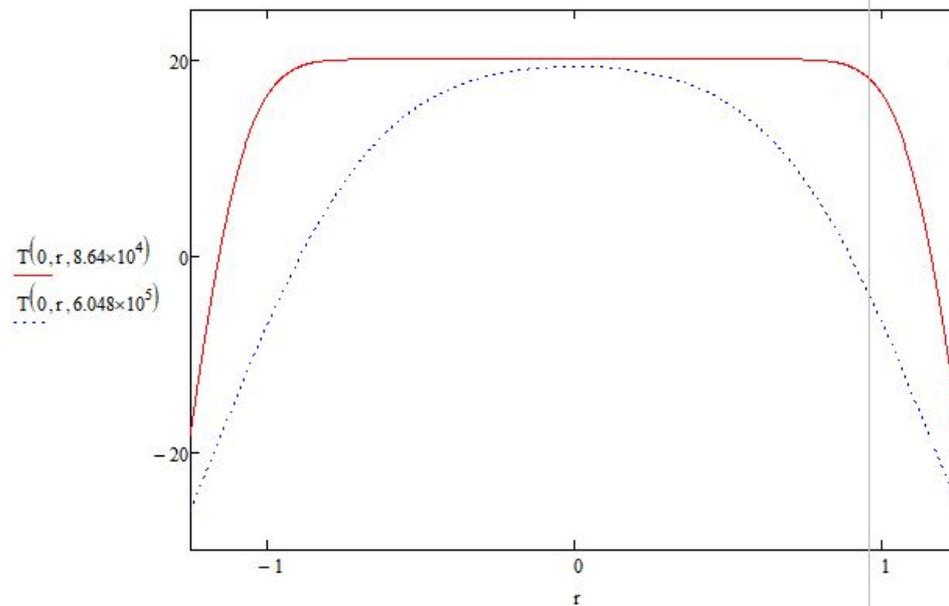
По построенному графику можно сделать вывод что за приведённые выше значения времени незначительны для данного процесса

Построим график для времени 1 сутки и 1 неделя



По построенному графику понимаем что через сутки поверхность промерзания продвинется до радиуса 1.1575 м., а через неделю поверхность промерзания дойдёт до радиуса 0.895 м.

Построим график для времени 1 сутки и 1 неделя



По построенному графику понимаем что через сутки поверхность промерзания продвинется до радиуса 1.1575 м., а через неделю поверхность промерзания дойдёт до радиуса 0.893 м.

Заключение



По полученным в ходе вычислений данным мы можем сделать вывод что промерзание таких больших объёмов требует очень много времени. Так же исходя из расчётов можно утверждать что изменение длинны цилиндра практически не влияет на перпендикулярную оси цилиндра скорость перемещения поверхности промерзания. Стоит отметить что уже через 90 минут в типовой автоцистерне началось бы образование льда при заданных условиях, что могло бы привести к повреждению оболочки. Так же были закреплены навыки программирования задач для решения задач нестационарной теплопроводности.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

1930



MOMI