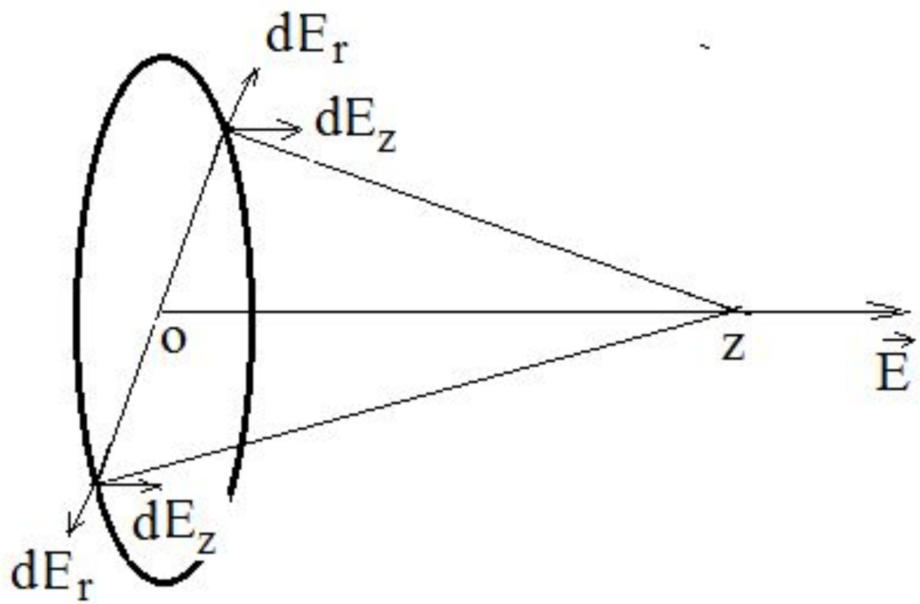
Потенциал и напряженность электрического поля *на оси* тонкого равномерно заряженного кольца

- **Задача 1. Получить выражение для потенциала и напряженности электрического поля *на оси* тонкого равномерно заряженного кольца радиуса R . Линейная плотность заряда τ .**

- Считая, что $\tau = const$, показать, что при $|z| >> R$
- потенциал поля кольца совпадает в пределе с потенциалом поля точечного заряда.



Ведем цилиндрическую систему координат. Пусть ось Oz совпадает с осью кольца и начало координат с центром кольца, $|z|$ – расстояние от центра кольца до точки наблюдения на оси.

$$\tau = \frac{q}{2\pi R} \qquad dq = \tau dl = \tau R d\theta$$

dl – элемент длины тонкого кольца

Потенциал для точечного заряда

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi}\frac{\tau R}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}d\theta = \frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad \varphi(-z) = \varphi(z)$$

Напряженность поля кольца $$E_z(z) = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}$$

$$E_z(-z) = -E_z(z)$$

Предельный случай

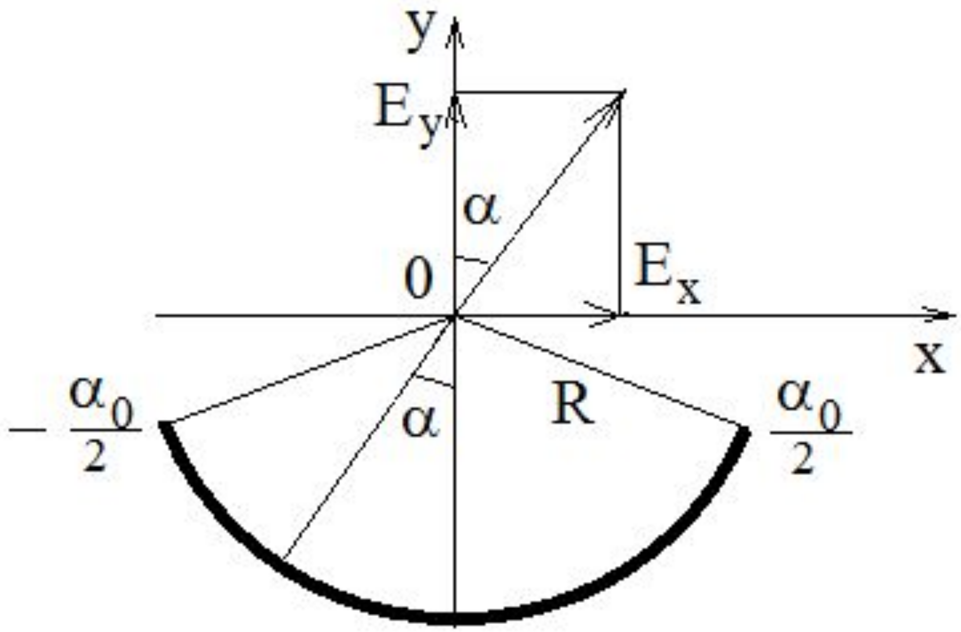
$$\varphi(z)=\frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{\tau\frac{R}{|z|}}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2+1}}\underset{z\to\infty}{\approx}$$

$$\underset{\frac{R}{|z|}\to 0}{\approx}\quad\frac{\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{R}{|z|}+o\left(\frac{R}{|z|}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{|z|}+o\left(\frac{R}{|z|}\right)$$

Использовали эквивалентную функцию $\sqrt{1+\alpha}-1\underset{\alpha\to 0}{\approx}\frac{\alpha}{2}$ и $\tau R=\frac{q}{2\pi}$

Вывод. В предельном случае при $|z|>>R$
потенциал поля кольца совпадает с потенциалом поля точечного заряда

Задача 2. Получить выражение для напряженности электрического поля, создаваемое тонкой равномерно заряженной дугой окружности радиуса R в ее центре О . Линейная плотность заряда τ .



В силу симметрии и принципа суперпозиции получаем, что

$$E_x = 0, \quad \vec{E} = E_y \vec{e}_y$$

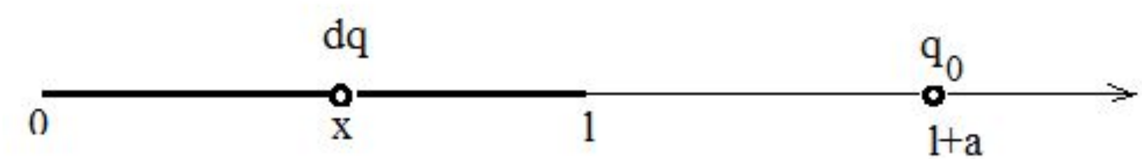
- Для точечного заряда $dq = \tau dl = \tau R d\alpha$

$$dE_y = dE\cos\alpha = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\cos\alpha = \frac{\tau R d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\cos\alpha$$

$$E_y = 2\int_0^{\frac{\alpha_0}{2}} \frac{\tau\cos\alpha d\alpha}{4\pi R\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\sin\frac{\alpha_0}{2}$$

Задача 3. Найти силу взаимодействия отрезка длиной l равномерно заряженного с линейной плотностью заряда τ с точечным зарядом q_0, находящимся на продолжении отрезка на расстоянии a от ближайшего его конца.

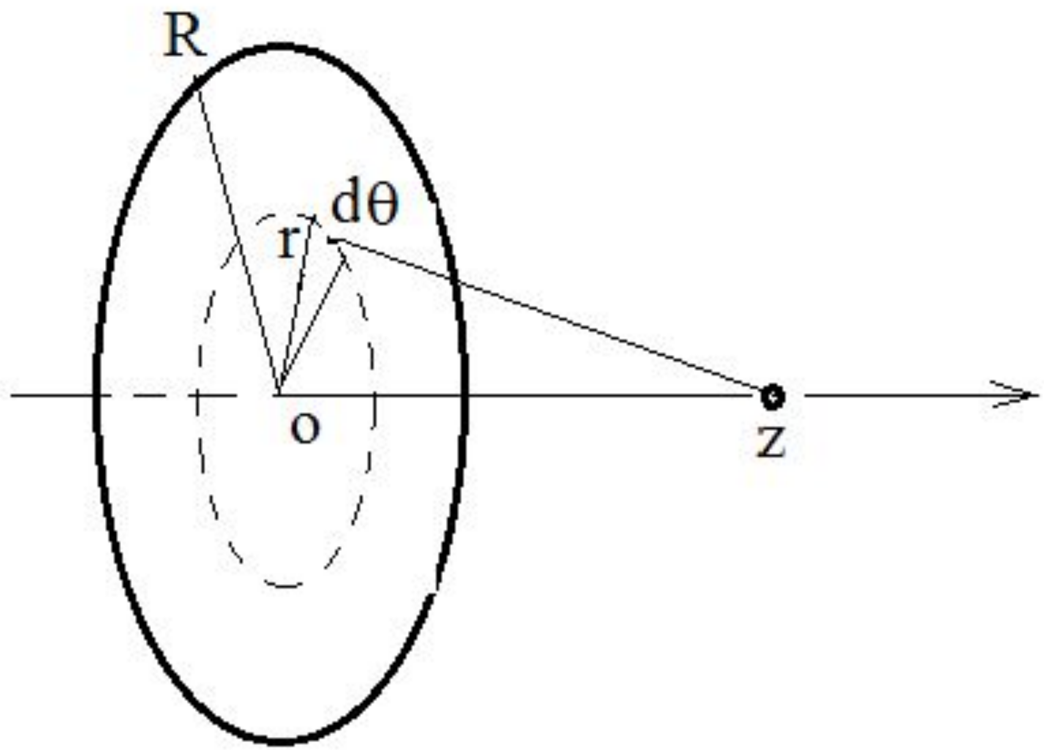
- Пусть ось Ox проходит через отрезок и точечный заряд. Начало координат совпадает с началом отрезка. Тогда координата точечного заряда равна $a+l$.



$$dq = \tau dx \qquad dF = \frac{dq \cdot q_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{(l+a-x)^2}$$

$$F = \int_0^l \frac{\tau \cdot q_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{dx}{(l+a-x)^2} = -\frac{\tau \cdot q_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{l+a}^{a} \frac{dt}{t^2}$$

Задача 4. Ось равномерно заряженного диска радиуса R совпадает с осью Oz. Центр диска находится в начала координат. Диск заряжен равномерно с поверхностной плотностью заряда σ. Найти потенциал электрического поля, создаваемого диском в точках оси . Рассмотреть предельный случай: $z >> R$



Введем цилиндрическую систему координат

- Рассмотрим точечный заряд $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{4\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{dt}{t^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

Предельный случай

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right)=\lim_{z\to\infty}\frac{\sigma z}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{z}\right)^2}-1\right)\underset{z\to\infty}{\approx}$$

$$\underset{z\to\infty}{\approx}\frac{\sigma z}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+o\left(\frac{R^2}{z^2}\right)\right)\underset{z\to\infty}{\to}\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{z}=\frac{q}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{z}$$

- **Вывод.** При $z\to\infty$ потенциал электрического поля заряженного диска совпадает с точностью до константы с потенциалом поля точечного заряда.

Задача 5. Найти потенциал ограниченной цилиндрической поверхности радиуса R и длиной $2a$ с зарядом q, равномерно распределенным по поверхности.

- **Способ 1.** Нахождение потенциала электрического поля, создаваемого заряженной цилиндрической поверхностью через потенциал поля заряженной окружности (тонкого кольца).

$$\varphi_{кольца}(z) = \frac{q_{\text{кольца}}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\tau_{\text{кольца}}R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}, \quad q_{\text{кольца}} = 2\pi R\tau_{\text{кольца}}$$

Рассматриваемая цилиндрическая поверхность – это совокупность заряженных колец с зарядом $dq = \frac{q}{2a}dz'$

$$dq = \frac{\sigma 2\pi R 2a}{2a}dz' = \sigma 2Rdz'$$

q – заряд цилиндра $\quad z'$ – координата кольца

Потенциала поля заряженной цилиндрической поверхности

$$\varphi(z) = \int_{-a}^{a} \frac{q/2a}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z'-z)^2}} dz' =$$

$$= \frac{q}{8\pi a\varepsilon\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{d(z'-z)}{\sqrt{R^2 + (z'-z)^2}} = \frac{q}{8\pi a\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{a - z + \sqrt{(a-z)^2 + R^2}}{-a - z + \sqrt{(a+z)^2 + R^2}}$$

Способ 2. Нахождение потенциала заряженной цилиндрической поверхности через потенциал поля точечного заряда.
Цилиндрическая поверхность – это совокупность элементарных площадок поверхности с зарядом

$$dq = \sigma dS = \frac{q}{2\pi R 2a} R d\theta dz' = \frac{q}{4\pi a} d\theta dz'$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{d\theta dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}}$$

Ограниченный цилиндр