

# ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

## 2 СЕМЕСТР

Лекция 1. Последовательность.

Предел последовательности.

Лекция 2. Функция. Предел функции.

Лекция 3. Непрерывность функций.

Точки разрыва, их классификация.

---

# ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

---

- Интуитивное понятие о предельном переходе использовалось еще в Древней Греции при вычислении площадей и объемов (Архимед)
- При создании дифференциального и интегрального исчислений математики XVII в (Исаак Ньютон, Готфрид Вильгельм Лейбниц) тоже неявно использовали понятие предельного перехода
- Определение понятия предела – работа Джона Валлиса «Арифметика бесконечных величин» (1655 г.)
- В XIX в теория пределов использована для строгого обоснования математического анализа (Огюстен Луи Коши)
- Дальнейшая разработка теории пределов – Карл Вейерштрасс, Бернард Больцано и др.

# ДЖОН ВАЛЛИС (JOHN WALLIS)



Точнее - Джон Уоллес (1616-1703) английский математик, предшественник математического анализа. Сын священника из Эшфорда.

Уже в молодости вызывал восхищение как феноменальный счётчик: как-то в уме извлёк квадратный корень из 53-значного числа

По окончании Кембриджского университета стал священником англиканской церкви и получил степень магистра. После женитьбы (1645) вынужден был покинуть университет, так как от профессоров в те годы требовался обет безбрачия.

# ЛЕКЦИЯ 1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие числовой  
последовательности.

Способы задания последовательности

Ограниченные последовательности

Монотонные последовательности

Предел последовательности

Теоремы о пределах  
последовательностей

Необходимое и достаточное условие  
сходимости последовательностей

---

Примеры

# ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

- - это множество чисел, занумерованных либо конечным отрезком натурального ряда (конечная последовательность), либо всеми натуральными числами (бесконечная последовательность)
- Элементы этого множества называются **членами** последовательности и обозначаются  $a_n$ , где  $n$  - его номер
- Сама последовательность записывается как

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots \text{ или } \{a_n\}$$

# ПРИМЕРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

✘  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

✘  $2, 4, 8, 16, \dots$

✘  $0, 1, 0, 1, \dots$

✘  $5, 5, 5, 5, \dots$

# ИНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Отображение множества натуральных чисел  $\mathbf{N}$  на некоторое конечное или счетное числовое множество  $\mathbf{A}$ , при котором каждому натуральному числу  $n$  соответствует один и только один элемент множества  $\mathbf{A}$  -  $a_n$ .
- Функция  $a_n = f(n)$ , заданная на множестве натуральных чисел  $\mathbf{N}$

# ДЕЙСТВИЯ НАД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

- ✦ Сумма двух последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  это последовательность  $\{s_n\}$ , членами которой являются суммы членов последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , имеющих одинаковые номера

$$s_n = x_n + y_n$$

- ✦ Произведение, разность и частное двух последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  это последовательность  $\{m_n\}$ ,  $\{q_n\}$ ,  $\{r_n\}$  члены которых вычисляются по правилам:

$$m_n = x_n - y_n, \quad q_n = x_n \cdot y_n, \quad r_n = \frac{x_n}{y_n}$$



# АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

---

- – задание **формулы общего члена последовательности**, позволяющую по номеру члена последовательности однозначно его вычислить

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

✘ Например,

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = 2^n, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n = 3$$

Задают соответственно последовательности

✘  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

✘  $2, 4, 8, 16, \dots$

✘  $-1, 1, -1, 1, \dots$

✘  $3, 3, 3, 3, \dots$

# РЕКУРРЕНТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Задается первый член (или несколько первых членов) последовательности и указывается формула вычисления последующих членов последовательности по заданным первым

- ✦ Например, последовательность натуральных чисел

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1$$

- ✦ Последовательность чисел Фибоначчи

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

0,1,1,2,3,5,8,13.....

# ОПИСАТЕЛЬНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

---

- ✘ Описание способа получения членов последовательности
- ✘ Например, последовательность  
3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ....  
Образована из приближенных значений числа  $\pi$
- ✘ Используется когда нельзя указать ни формулы общего члена, ни рекуррентного соотношения

# ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной, если существуют два такие числа  $m$  и  $M$ , что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$m \leq x_n \leq M$$

- ✦ Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной сверху, если существуют такое число  $M$ , что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$x_n \leq M$$

- ✦ Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной снизу, если существуют такое число  $m$ , что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$m \leq x_n$$

# ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Доказательство ограниченности сводится к нахождению этих чисел, например:
- ✦  $x_n = n$  ограничена снизу ( $m=0$ ) и не ограничена сверху
- ✦  $x_n = -2 \cdot n$  ограничена сверху ( $m=-1$ ) и не ограничена снизу
- ✦  $x_n = \frac{1}{n}$  ограничена снизу ( $m=0$ ) и ограничена сверху ( $M=1$ ), следовательно, это ограниченная последовательность
- ✦  $x_n = (-1)^n$  ограничена снизу ( $m=-2$ ) и ограничена сверху ( $M=2$ ) следовательно, это тоже ограниченная последовательность

# МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Последовательность  $\{x_n\}$  называется **возрастающей**, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$x_{n+1} > x_n$$

- ✦ Последовательность  $\{x_n\}$  называется **убывающей**, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$x_{n+1} < x_n$$

- ✦  $\{x_n\}$  называется **неубывающей**, если  $x_{n+1} \geq x_n$
- ✦  $\{x_n\}$  называется **невозрастающей**, если  $x_{n+1} \leq x_n$

# МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс **МОНОТОННЫХ** последовательностей
- Возрастающие и убывающие последовательности называют **строго МОНОТОННЫМИ**
- Если все элементы последовательности  $\{x_n\}$  равны одному и тому же числу  $c$ , то ее называют **ПОСТОЯННОЙ**.



# ПРИМЕР 1

- ✘ Исследовать на монотонность последовательность

$$x_n = \frac{3n + 1}{2n - 1}$$

- ✘ Рассмотрим разницу между  $x_{n+1}$  и  $x_n$  членами

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{3(n+1)+1}{2(n+1)-1} - \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3n+1}{2n-1} = \\ &= \frac{(3n+4)(2n-1) - (3n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-5}{(2n+1)(2n-1)} \end{aligned}$$

- ✘ Числитель дроби отрицателен, знаменатель положителен, следовательно вся дробь отрицательна, поэтому

$$x_{n+1} - x_n < 0 \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$$

- ✘ Т.е. данная последовательность убывающая и следовательно строго монотонная

# ВОПРОСЫ.

---

- Является ли постоянная последовательность монотонной? А строго монотонной?
- Приведите примеры возрастающей и убывающей последовательности
- Приведите примеры ограниченной и не ограниченной последовательности

# ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Число  $a$  называют пределом последовательности  $\{x_n\}$  и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

- ✦ если для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N_0$ , что все члены последовательности с номерами  $n > N_0$  удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

- ✦ Если такое число существует, последовательность называется сходящейся, если нет - расходящейся

# ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Промежуток  $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$  называют  **$\varepsilon$ -окрестностью** точки  $a$ .
- Используя понятие  $\varepsilon$ -окрестности можно дать следующее определение предела:
- Число  $a$  называется **пределом** последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует номер  $N_0$  такой, что все члены последовательности с номерам  $n > N_0$  принадлежат  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$

## ПРИМЕР 2

---

- ✘ Например, рассмотрим последовательность

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

- ✘ Данная последовательность ограничена (снизу числом 0, сверху числом 1)
- ✘ Если изображать члены последовательности точками на числовой прямой, то можно убедиться, что с ростом номеров точки будут приближаться к 1  
1;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{3}{4}$ ; .... $\frac{9}{10}$ ; .... $\frac{99}{100}$ ;...

## ПРИМЕР 2

---

- ✘ Более того, для всех  $x_n$ , где  $n > 11$ ,  $|x_n - 1| < 0,1$ ;  
где  $n > 101$ ,  $|x_n - 1| < 0,01$  и т.д.
- ✘ То есть, какое бы малое положительное  $\varepsilon$  мы ни выбрали, в данной последовательности найдется такой член (номер которого мы будем обозначать  $N_0$ ), что все члены последовательности с номерам  $n > N_0$  будут принадлежат  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a=1$
- ✘ Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$
- ✘ Нужно отметить, что для каждого  $\varepsilon$  будет свой  $N_0$ , и при уменьшении  $\varepsilon$   $N_0$  будет увеличиваться

# ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

---

- 1) Теорема об единственности предела:  
Последовательность не может сходиться к двум различным пределам
- 2) Предел последовательности, все члены которой равны одной и той же величине, равен этой величине.
- 3) Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$  и  $a > p$  ( $a < q$ ), то все члены последовательности, начиная с некоторого, тоже будут меньше  $p$  (больше  $q$ )
- 4) Если последовательность имеет предел, то она ограничена

# ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✳ 5) Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеют пределы, то их сумма (разность) тоже имеет предел, причем предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

- ✳ 6) Если последовательности имеют пределы  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , то их произведение тоже имеет предел, причем предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

- ✳ Из теорем 2 и 6 следует, что постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$



# ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ 7) Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеют пределы, причем  $y_n \neq 0$  для всех  $n$ , начиная с некоторого  $N_0$ , то последовательность  $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$  тоже имеет предел, равный отношению пределов последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

- ✦ При помощи сформулированных теорем нахождение пределов последовательностей можно свести к нахождению пределов простейших последовательностей

## ПРИМЕР 3

---

Вычислить предел последовательности

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 + n + 1}$$

Сразу использовать теорему о пределе частного нельзя, т.к. последовательности, стоящие в числителе и в знаменателе не имеют конечных пределов. Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на  $n^2$

$$\frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

## ПРИМЕР 3 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

$$\square \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}$$

Определяем значения полученных простейших пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = 2$$

# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

---

- Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной
- Т.е. любая сходящаяся последовательность ограничена
- Однако обратное утверждение не верно, из ограниченности последовательности не всегда следует ее сходимость, т.е. это условие не является достаточным

# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✘ Действительно, пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
- ✘ Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  все члены последовательности, кроме конечного их числа попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$

$$a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon$$

- ✘ Так как членов последовательности, лежащих правее точки  $a + \varepsilon$  конечно число, то перебрав их можно выбрать максимальный член, обозначим его  $M$
- ✘ Аналогично, минимальный из членов последовательности, лежащих левее  $a - \varepsilon$  обозначим  $m$
- ✘ Таким образом, если  $\{x_n\}$  – сходящаяся последовательность, то существуют числа  $m$  и  $M$ , такие, что для всех всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$m \leq x_n \leq M$$

- ✘ Следовательно  $\{x_n\}$  – ограниченная последовательность

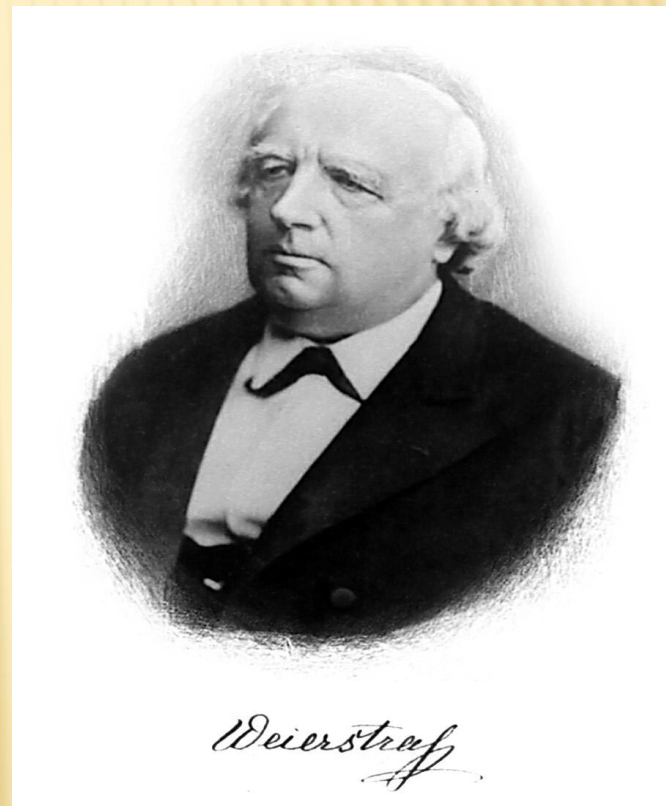
# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✘ Рассмотрим последовательность  $x_n = (-1)^n$ . Это ограниченная последовательность.
- ✘ Предположим, что предел этой последовательности существует и равен  $a$ .
- ✘ Если  $a$  – некоторое число отличное от  $1$  и  $-1$ , то всегда можно будет найти такую  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ , в которую не попадет ни один член последовательности.
- ✘ Следовательно  $a=1$  или  $a=-1$ . Допустим,  $a=1$ .
- ✘ Возьмем  $\varepsilon=0,1$ . В промежуток  $(0,9;1,1)$  попадают все члены последовательности, стоящие на четных местах ( $1$ ), но не попадает ни один член последовательности, стоящий на нечетном месте ( $-1$ ), следовательно  $1$  не является пределом данной последовательности
- ✘ Аналогично доказывается, что и  $-1$  не является пределом
- ✘ Следовательно, несмотря на то, что последовательность  $\{x_n\}$  ограниченная, она не является сходящейся

# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## Теорема Вейерштрасса:

Если  
последовательность  
монотонна и ограничена,  
то она обязательно  
сходится



Карл Теодор Вильгельм  
Вейерштрасс

# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✳ Исследуем сходимость последовательности  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- ✳ Докажем, что она монотонна. Раскладывая выражение по формуле бинома Ньютона, получаем

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\&= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\&+ \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\&+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$



# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Если написать аналогичное разложение для  $x_{n+1}$ , то увидим, что к разложению  $x_n$  добавится  $(n+2)$ -ое положительное слагаемое, каждое же из прежних слагаемых увеличится,
- ✦ Отсюда следует, что  $x_{n+1} > x_n$ , т.е. данная последовательность возрастающая и, следовательно, монотонная.
- ✦ Докажем, что она ограниченная.
- ✦ Опустив в выражении для  $x_n$  все сомножители, стоящие в круглых скобках, мы тем самым увеличим правую часть равенства, т.к. каждый из этих сомножителей меньше 1. В результате получим неравенство

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Учитывая, что  $2^{n-1} \leq n!$ , т.е.  $2^1 \leq 2!$ ,  $2^2 \leq 3!$ ,  $2^3 \leq 4!$ ... Для нашего неравенства имеем:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

- ✦ В правой части последнего неравенства сумма всех членов, начиная со второго есть сумма  $n-1$  членов убывающей геометрической прогрессии, которая равна 1, поэтому при любом натуральном  $n$

$$x_n < 3$$

- ✦ Таким образом, последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  монотонно возрастающая и ограниченная, и согласно теореме Вейерштрасса, имеет предел.

# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Этот предел имеет специальное обозначение  $e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045....$$

- ✦ Число  $e$  называют **неперовым** числом или числом Эйлера. Оно является одной из важнейших в математическом анализе констант
- ✦ Число  $e$  принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию  $e$  называется **натуральным логарифмом** и обозначается  $\ln x$ , т. е.  
 $\ln x = \log_e x$
- ✦ Показательная функция с основанием  $e$  называется

# ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (НЕПЕРОВО ЧИСЛО) $e \approx 2,72$

- Названо в честь шотландского учёного Джона Непера (1550—1617), автора работы «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614 год), одного из изобретателей логарифмов,



# ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (НЕПЕРОВО ЧИСЛО) $e \approx 2,72$

- Саму константу впервые вычислил швейцарский математик Якоб Бернулли (1655-1705) в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода (1690 г).



# ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (НЕПЕРОВО ЧИСЛО) $e \approx 2,72$

- Букву  $e$  начал использовать швейцарский, немецкий и российский математик и механик, Леонард Эйлер в 1727 году.
- Почему была выбрана именно буква  $e$ ? Возможно, это связано с тем, что с неё начинается слово *exponential* («показательный», «экспоненциальный»). Другое предположение заключается в том, что буквы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  уже довольно широко использовались в иных целях, и  $e$  была первой «свободной» буквой. Также примечательно, что буква  $e$  является первой в фамилии Эйлер (Euler).



# НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема Больцано-Коши (критерий сходимости)

Для того, чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа  $\varepsilon$  существовал такой номер  $N_0(\varepsilon)$ , чтобы неравенство  $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$  выполнялось для всех  $n > N_0$  и  $p \geq 1$



Французский математик и механик  
Огюстен Луи Коши



Чешский математик и философ  
Бернард Больцано