Добрый день!!!

- **Задание на 30.11.2020 г**

- **1.Изучите теорию, просмотрев презентацию или прочитав §8 учебника, часть 1 (стр 86-93)**
- **2. Выполните задания:**
- **№8.2-8.7(а),№8.8(а),№8.11(а),№8.22**

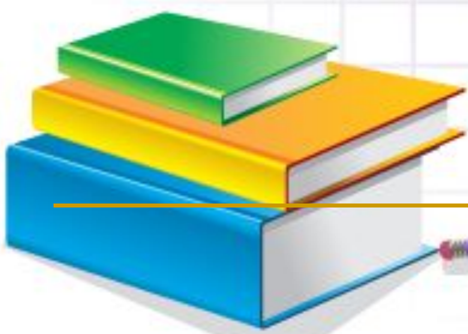
Тема урока: «». **Определение числовой функции.**

Область определения, область значений функции

Глава 3
Числовые функции

Понятие функции является основополагающим для всего курса алгебры. С функцией непосредственно связаны понятия уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств, последовательности и прогрессий. Поэтому необходимо обратить самое серьезное внимание на эту тему.

Цель: уточнить понятие функции и ее основные характеристики: область определения и область значений.



Изучение нового материала

Проанализируем наш опыт работы с термином «функция».

В 7-м классе мы ввели термин «линейная функция»

уравнение с двумя переменными специального вида

$$y = kx + m$$

x — независимая переменная,

y — зависимая переменная.

В 7-м классе, кроме упомянутой линейной функции, мы изучили функции $y = x^2$ и $y = -x^2$, а в 8-м классе — функции $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$.

Математической моделью реального процесса во многих случаях как раз и является запись на математическом языке зависимости y от x: $y = f(x)$. Такие математические модели мы называли функциями.

Математическая модель $y = f(x)$ обычно дополняется указанием на то, из какого числового множества берутся значения независимой переменной x. Например, мы говорили о функции $y = \sqrt{x}$, подразумевая, что $x \geqslant 0$ (график функции изображен на рис. 68), но мы рассматривали и функцию $y = \sqrt{x}$, где $x \in [0; 4]$ (график функции изображен на рис. 69). Это разные функции.

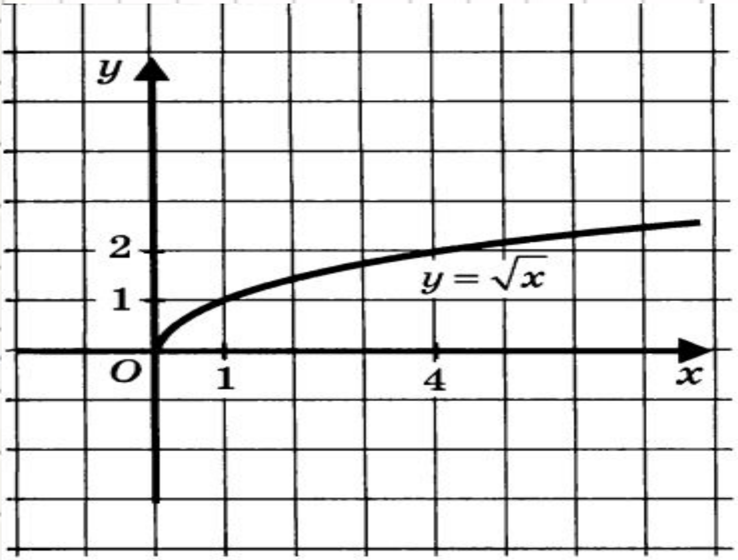


Рис. 68

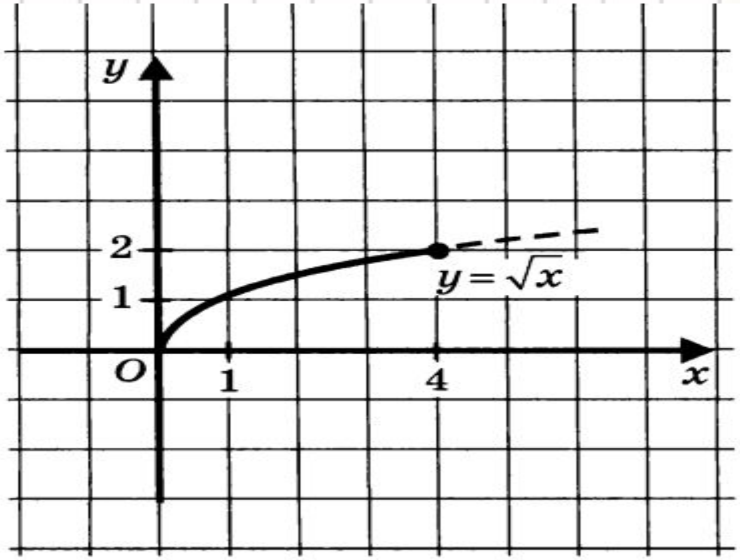
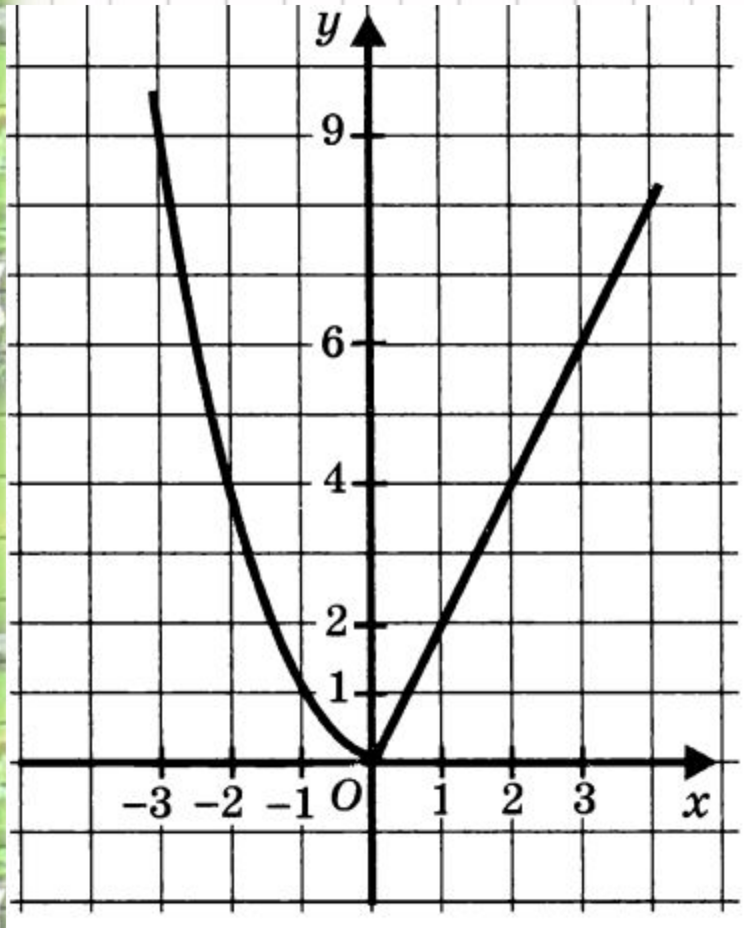


Рис. 69

$y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 0; \\ 2x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$



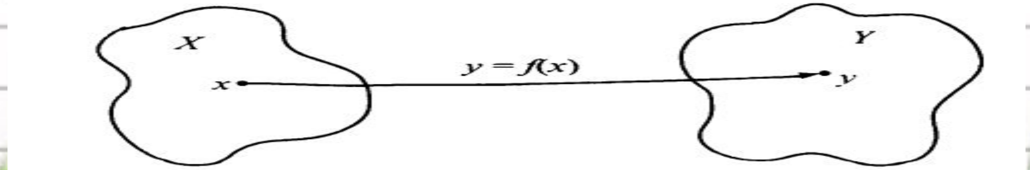
Такие кусочные функции

Так что же такое функция?

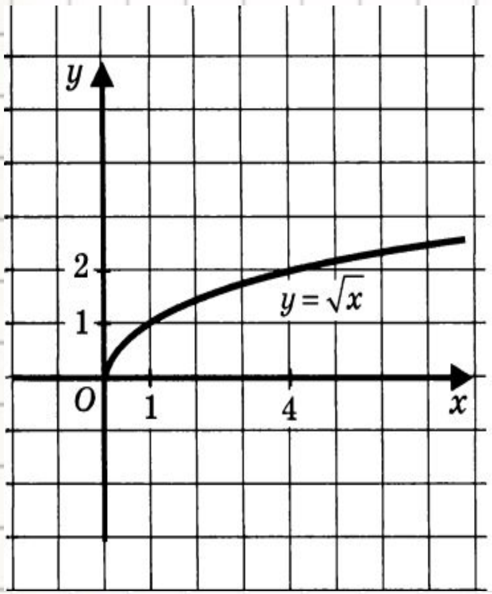
1. Запись $y = f(x)$ указывает на п р а в и л о (обычно говорят «правило f»), с помощью которого, зная конкретное значение независимой переменной x, можно найти соответствующее значение переменной y.

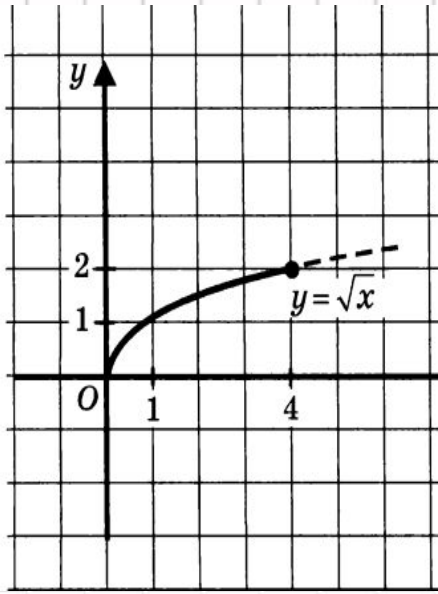
2. Указывается числовое множество X (чаще всего какой-то числовой промежуток), откуда берутся значения независимой переменной x.

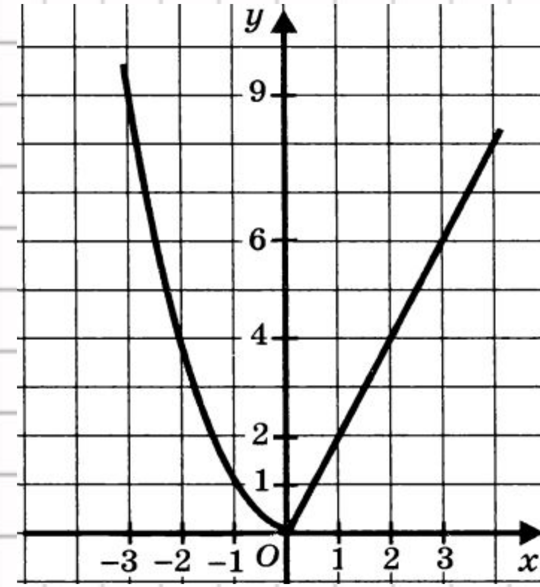
<u>*Определение 1*</u>. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана **функция $y = f(x)$ с областью определения X**; пишут: $y = f(x)$, $x \in X$. При этом переменную x называют **независимой переменной или аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной**.



Для области определения функции $y = f(x)$, $x \in X$ принято использовать обозначение $D(f)$ (от лат. *domain* — область). Например:







для функции $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ (рис. 68) имеем: $D(f) = [0; +\infty)$;
для функции $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$ (рис. 69) имеем: $D(f) = [0; 4]$;
для функции $y = f(x)$ (рис. 70) имеем: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Еще раз подчеркнем, что нельзя говорить о функции $y = f(x)$ без указания ее области определения, которая или задается явно, или подразумевается — в случае, если область определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$ (такую область определения иногда называют *естественной*).

Пример 1

Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x-3}-1$. Чтобы найти значение y для каждой величины x, надо выполнить следующие действия (операции):

1) из величины x вычесть число 3 (получим величину $x - 3$);

2) из полученного результата извлечь квадратный корень (получим значение $\sqrt{x-3}$);

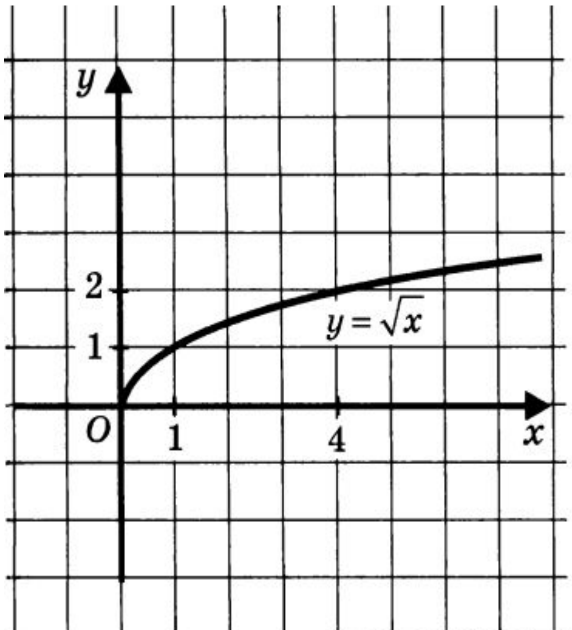
3) из этой величины вычесть число 1 (получим значение $\sqrt{x-3}-1$, т. е. значение функции y).

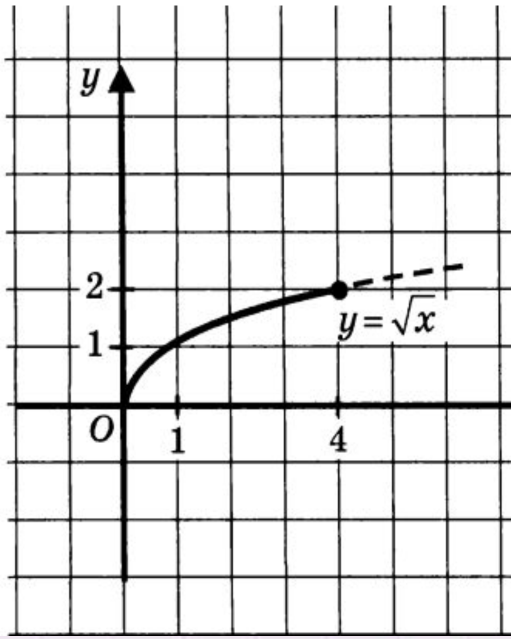
Совокупность этих операций (действий) и есть функция $y = f(x)$ или $y=\sqrt{x-3}-1$. Очевидно, квадратный корень можно извлечь только из неотрицательной величины. Поэтому $x - 3 \geq 0$ и $x \geq 3$. Следовательно, область определения функции $D(f) = [3; +\infty)$. Квадратный корень (по определению) величина неотрицательная, т. е. $\sqrt{x-3} \geq 0$. Вычтем из обеих частей этого неравенства число 1 и получим: $\sqrt{x-3}-1 \geq -1$, т. е. $y \geq -1$. Поэтому область значений функции $E(f) = [-1; +\infty)$.

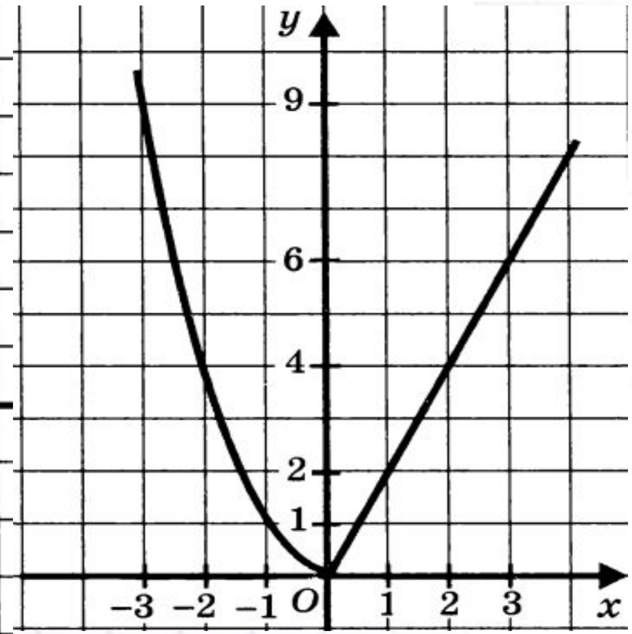
Определение 2. Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ (от лат. *equal* — равно).

Определение 3. **Графиком функции** $y = f(x)$, $x \in X$ называют множество F точек $(x;\ y)$ координатной плоскости xOy:

$$F = \{(x;\ y) \mid x \in X,\ y = f(x)\}.$$







для функции $y = \sqrt{x}$ имеем: $E(f) = [0;\ +\infty)$ (рис. 68);

для функции $y = \sqrt{x}$, $x \in [0;\ 4]$ имеем: $E(f) = [0;\ 2]$ (рис. 69);

для функции $y = f(x)$ (рис. 70) имеем: $E(f) = [0;\ +\infty)$.

Пример 2

Найдем область определения функции:

в) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$;

г) $y = \sqrt{(x-1)(x+2)^2}$.

рмулой (выражением) и

: областью допустимых

в) В выражение входит операция извлечения квадратного корня из алгебраической дроби. Эта операция выполнима, если подкоренное выражение неотрицательно. Получаем неравенство: $\dfrac{1-x}{x+2} \geq 0$, решение которого $-2 < x \leq 1$. Поэтому область определе-

г) Этот пункт аналогичен предыдущему. Область определения функции задается условием $(x-1)(x+2)^2 \geq 0$. Решение такого неравенства: отдельная точка $x = -2$ и промежуток $x \in [1; +\infty)$. Поэтому область определения функции $D(f) = \{-2\} \cup [1; +\infty)$.

Заметим, что в этом примере область определения функции явно не указывалась. Такую область находили, учитывая ОДЗ выражения, задающего функцию. Эту область определения иногда называют *естественной*.

Запись $f(a)$ означает значение функции в точке $x = a$. Чтобы найти это значение в формуле, задающую функцию, вместо аргумента надо подставить величину a.

Пример 3

Рассмотрим линейную функцию $y = 2x + 3$. Найдем:

а) $f(5)$; б) $f(x - 4)$; в) $f(3x + 1)$; г) $f(f(x))$.

Подобным образом поступают и в случае кусочной функции.

Пример 4

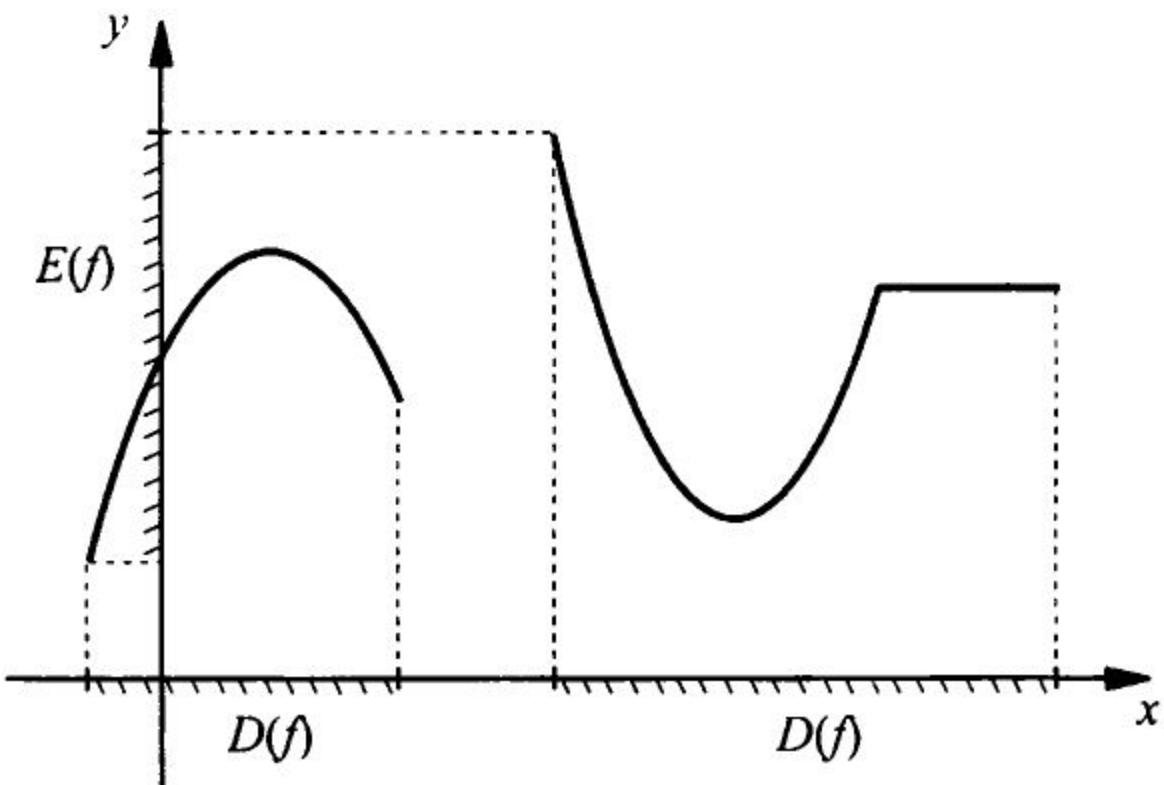
Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \in (-\infty; -1), \\ 1, \text{ если } x \in [-1; 1], \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \in (1; +\infty). \end{cases}$

Найдем: $f(-3)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(5)$.

Область определения функции состоит из трех промежутков: $(-\infty; -1)$, $[-1; 1]$ и $(1; +\infty)$. Объединив их, получим всю числовую ось, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. При вычислении значения $f(a)$ надо определить, в какой промежуток попадает точка a. Тогда по соответствующей формуле находим величину $f(a)$.

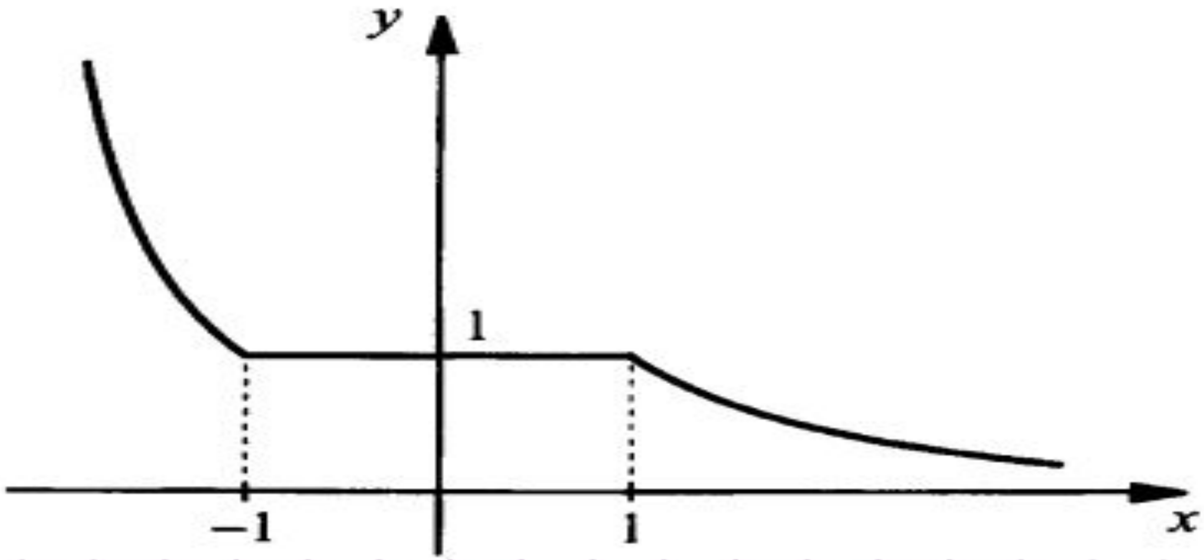
Определение 2. Графиком функции $y = f(x)$, $x \in X$, называют множество F точек $(x; y)$ координатной плоскости xOy: $F = \{(x; y) \mid x \in X, y = f(x)\}$.

По графику функции легко установить область определения и область значений функции $y = f(x)$. Для этого точки графика проецируют на ось абсцисс и ось ординат и находят, соответственно, область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$.



Пример 7

Построим график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \in (-\infty; -1), \\ 1, \text{ если } x \in [-1; 1], \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \in (1; +\infty) \end{cases}$



Область определения этой кусочной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и область значений $E(f) = (0; +\infty)$.