«Инварианты
и их применение при решении задач»

Инвариант от латинского **invarians,** в родительном падеже **invariantis – неизменяющийся.** Был введён английским математиком Джеймсом Джозефом Сильвестром **(03/11/1814 – 15/3/1897)** в **1851** году**.**

- *Инвариантом* некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании.

Виды инвариантов:

- четность (нечетность);
- остаток от деления;
- перестановки;
- раскладки;
- раскраски;
- чередование и т. п

четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых;

Возможные варианты	Пример
Н + Н = Ч	3 + 5 = 8
Ч + Ч = Ч	4 + 6 = 10
Н + Ч = Н	5 + 4 = 9

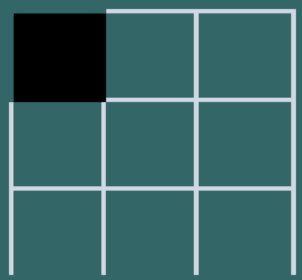
нечетность произведения нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных множителей;

Возможные варианты	Пример
Н х Н = Н	3 х 5 = 15
Ч х Ч = Ч	4 х 6 = 24
Н х Ч = Ч	5 х 4 = 20

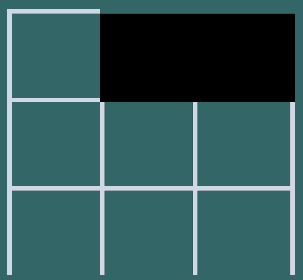
знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

+	на	+	=	+
–	на	+	=	–
–	на	–	=	+

№ 1 В таблице 3*3 угловая клетка закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.



1чёрная и 3 белые



1чёрная и 3 белые

3 чёрные и 1 белая

3 чёрные и 1 белая

Характер чётности числа чёрных клеток среди четырёх угловых не меняется при перекрашиваниях.

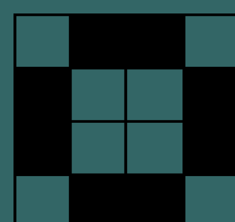
Ответ: невозможно

№ 2 В таблице 4*4 знаки «+» и «-» расставлены так, как показано на рисунке.

Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей
(в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью этих операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса?

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

-	+	-	+
-	+	+	+
-	+	+	+
-	+	+	+



	+1	- 1	
+1			+1
+1			+1
	+1	+1	

среди заштрихованных чисел всегда будет оставаться –1

Ответ: нельзя

№3. Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через двух сразу!). Могут ли они после 1991 прыжка оказаться на прежних местах?

- Обозначим кузнечиков А, В и С.
- Назовём расстановки кузнечиков АВС, САВ и ВСА (слева направо) правильными, а ВАС, АСВ и СВА – неправильными.

исходная	1- й прыжок	2-ой прыжок
АВС (правильная)	АСВ (неправильная)	АВС (правильная)
		САВ (правильная)
	ВАС (неправильная)	ВСА (правильная)
		АВС (правильная)

При любом прыжке тип расстановки меняется.

если исходная расстановка была правильная, то после 1991 прыжка расстановка будет неправильная, так как 1991 – число нечётное, и кузнечики не смогут оказаться на прежних местах.

Ответ: нет.

№4. **Числа 1, 2, 3,……,*п* расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что если проделать нечётное число таких операций, то наверняка получится отличное от первоначального расположение чисел 1, 2, 3,…,*п*.**

что *два числа образуют в этой перестановке* **инверсию**, *если большее из этих чисел предшествует меньшему*.

Число перестановок	Возможный вариант	Число инверсий	Возможный вариант	Число инверсий	Характер чётности числа инверсий
0 - Чётное	1;2;3;4;5;6	0 инверсий			Чётное
1 - нечётное	2;1;3;4;5;6	1 инверсия			нечётное
2 - Чётное	2;1; 4;3; 5;6	2 инверсии			Чётное
3 - нечётное	2;4;1;3; 5;6	1 инверсия	2;1; 4;3; 6;5;	3 инверсии	нечётное
4	2;4;1;3; 6;5;	2 инверсии	2;1; 3; 4;6;5;	2 инверсии	Чётное
5	4; 2;1;3; 6;5	3 инверсии	1;2;3;4;6;5;	1инверсия	нечётное
6	1;2; 4;3;6;5;	2 инверсии			Чётное
7	1;2;3;4; 6;5;	1 инверсия			нечётное
8	1;2;3;4;5;6	0 инверсий			Чётное

Ответ: нет.

№5. **В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время в одном направлении стартовали 25 автомобилей. По правилам гонки автомобили могут обгонять друг друга, но при этом запрещён двойной обгон. Автомобили финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было чётное число обгонов.**

Присвоим автомобилям номера 1, 2, 3,……,24, 25 в том порядке, в каком они располагаются на старте

Число обгонов	0	1	2	3	4	5	6
Число инвариантов	0	1	2	3 или 1	4 или 0	5 или 1	6, 0 или 2
Характер чётности числа инвариантов	Чётное	нечётное	Чётное	нечётное	Чётное	нечётное	Чётное

Ответ: чётное число обгонов.

№ 6. Шахматный конь вышел с поля а1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Шахматный конь ходит с чёрного поля на белое и наоборот.

Например, чтобы попасть **с чёрного** поля снова **на чёрное**, надо сделать **как минимум два хода**. Так что для того, чтобы вернуться на исходное поле, надо сделать чётное число ходов.

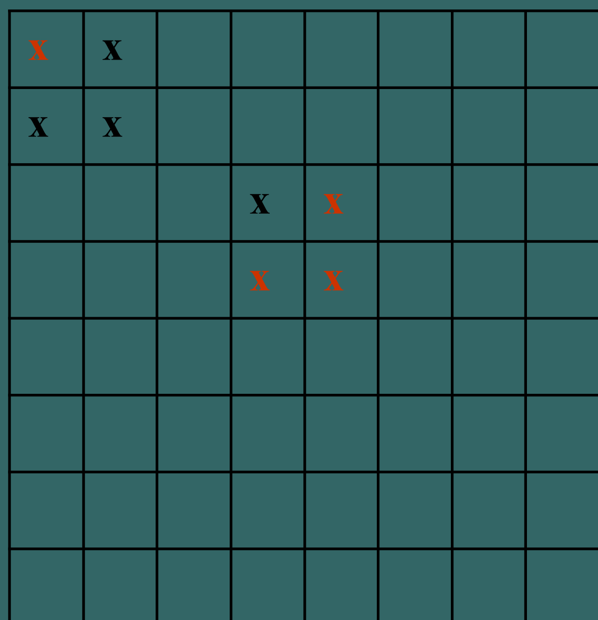
№ 7. Можно ли покрыть шахматную доску костяшками домино **1*2** так, чтобы свободными остались только клетки a**1** и **h8?**

Решение:

Каждая костяшка домино покрывает два поля: чёрное и белое. Чёрных и белых полей поровну, так что покрывать так, чтобы остались свободными два чёрных поля, нельзя.

Ответ: нельзя.

8. На доске 2008 × 2008 двое игроков по очереди красят клетки в чёрный цвет. Первый имеет право закрашивать по одной клетке, а второй - «уголок» из трёх клеток. Каждую клетку можно закрашивать один раз. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?



Выигрышная стратегия для второго игрока: мысленно разбив квадрат **2008 × 2008** на квадратики 2 х 2, второй игрок, после того как первый закрасит одну клетку в одном из квадратов 2 х 2, «докрашивает» его.

В силу того, что произведение **2008 × 2008 делится** на **4 = 2×2,** то очевидно, что тогда последний ход всегда останется за вторым игроком.

№9. Продолжение предыдущей задачи. Изменится ли ответ, если первый имеет право закрашивать квадрат 2 х 2?

x	x	x	x				
x	x	x					
			x	x	x		
			x	x	x	x	
					x	x	
					x		

Выигрышная стратегия: своим ходом второй игрок может создать себе в одном из углов доски место для хода. Заметим, что первый игрок закрашивает больший участок доски, чем второй. После того как будут исчерпаны ходы в остальной части доски (а это рано или поздно наступит), второй будет иметь «запасный» ход «в угол».

№10. Пусть А – число, записанное с помощью 3^{1998} Обозначим A1=Σ (A) сумму цифр числа А, А2=Σ (A1), A3=Σ(A2). Найдите A4=Σ(A3).

Решение:

Число А составлено из одних девяток, следовательно, оно делится на 9. При суммировании цифр числа это свойство сохраняется, т. е. является инвариантом преобразования Σ (x).

$$A = \underbrace{999999999........9}_{3^{1998}}$$

$A_1=\Sigma(A) = 9+9+9+…+9 = 9 \times 3^{1998} = 9 \times 9^{999} = 9^{1000} < 10^{1000}$.

Число 10^{1000} записано при помощи 1001 цифры, т.о., полученное число A_1 записано с помощью менее, чем 1000 цифр.

Число $A_2 = \Sigma(A_1)$ делится на 9, а значит,

$A_2 = \Sigma(A_1) < 9*1000 = 9000 = 9*10^3 < 10*10^3 = 10^4$, так что A_2 записано не более, чем четырьмя цифрами.

A3=Σ(A2) < 9 *4 = 36 и делится на 9, т.е. A3 может принимать только значения 9, 18, 27. Во всех этих случаях Σ(A3) = 9.

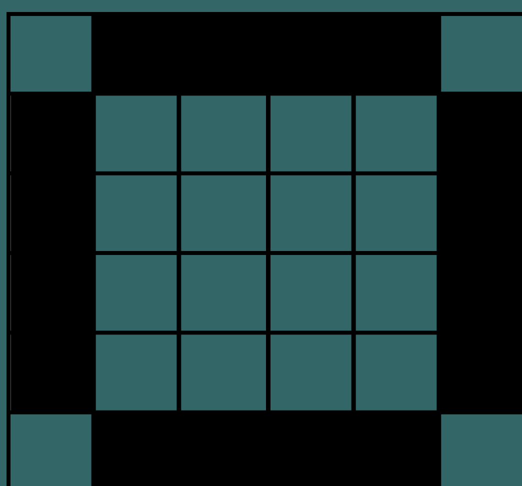
Ответ: 9.

Желаю удачи!!!

МАЛАЯ ОЛИМПИАДА

№1. В таблице 6 х 6 знаки «+» и «-» расставлены так, как показано на рисунке. Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей (в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью этих операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса?

+	+	-	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

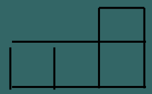


Решение

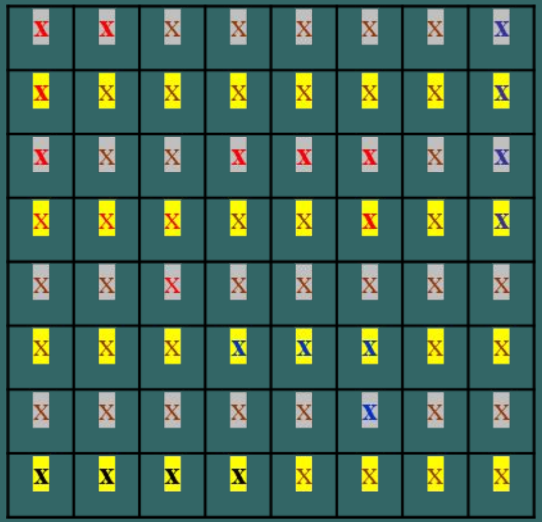
Снова заменим плюсы и минусы на +1 и –1.

Инвариантом будет произведение чисел, стоящих в чёрных клетках. И раз оно равно числу –1, то нельзя получить таблицу, не содержащую ни одного минуса.

Ответ: нельзя.



№2. Докажите, что шахматную доску 8 х 8 нельзя замостить 15 прямоугольными фигурками 1 х 4 и одной фигурой, указанной на рисунке. (Квадраты шахматной доски и фигурки одинаковы).



Доказательство

Используем раскраску доски чёрными и белыми чередующимися по цвету строками. Чёрных и белых квадратов оказывается поровну – 32.

Как бы мы ни располагали данную на рисунке фигуру, она будет накрывать три квадрата одного цвета один другого. Прямоугольники 1 х 4 либо накрывают одинаковое количество чёрных и белых квадратов, либо – 4 квадрата только одного цвета. Так что всякий раз, накрывая ими из 32 – ух по два, то по четыре квадрата, никак не останется 1 или 3 свободных для указанной фигурки.