

**Лекция №2**  
**Элементы теории**  
**вероятностей**



## ПЛАН:

1. **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**
2. Основные теоремы теории вероятностей
3. Формула полной вероятности
4. Случайные величины
5. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Испытание.** *Испытанием называется совокупность обстоятельств, при которых появляется случайное событие.*

Например, бросание монеты, извлечение шаров из ящика, простое наблюдение за средней температурой данного дня года, проводимое в течение многих лет.

**Единственно возможные события.** *События  $A, B, C, \dots$  называются единственно возможными, если в результате каждого испытания хотя бы одно из них наверное наступит.* Говорят также, что рассматриваемые события образуют полную группу событий.

Например, при бросании монеты единственно возможны два случая: или монета упадет вверх гербом.

**События несовместимые.** *События называются несовместимыми, если появление одного из них при испытании исключает появление остальных событий при том же испытании.*

Например, в ящике находится пять шаров, помеченных номерами: 1, 2, 3, 4, 5. При извлечении шара вскрыется только один из пяти номеров, значит, события, состоящие в появлении этого номера при дальнейшем извлечении шаров из ящика, являются несовместимыми.

# 1. Случайное событие

*Определение. Событие* – это факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.



Это испытание



Это событие



# Виды событий

Достоверное

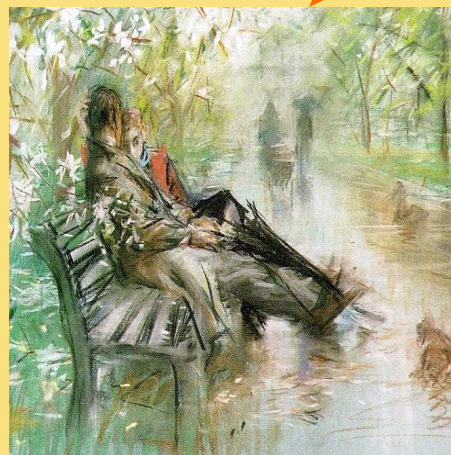
Случайное

Невозможное

Всегда

Может  
быть

Никогда



**События равновозможные.** *События называются равновозможными, если при испытании не существует никаких объективных причин, вследствие которых одно из них могло бы наступать чаще, чем какое-либо другое.* Например, появление герба или решетки при бросании монеты — события равновозможные.

Но если в ящике находится 8 белых и 2 черных шара, то появление белого или черного шара не могут быть событиями равновозможными. Они носят название событий неравновозможных.

**Приведение неравновозможных событий к равновозможным.** Неравновозможные события можно привести к равновозможным, если данные неравновозможные события могут быть разбиты на равновозможные, представляющие их частные виды. Пусть в ящике находятся четыре черных и шесть белых шаров. В данном случае появление белого или черного шара события неравновозможные. Но если черные и белые шары пронумеровать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, то они будут отличаться друг от друга только номерами и извлечение их будет соответствовать десяти равновозможным событиям.

*Равновозможные события, на которые мы разбиваем события неравновозможные, называются случаями.*

*Случаи, способствующие появлению одного из неравновозможных событий, называются благоприятствующими этому событию.* В нашем примере четыре случая благоприятствуют появлению черного шара, шесть случаев благоприятствуют появлению белого шара.

**Определение.** Вероятностью события  $A$  называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события  $A$  равна отношению числа, благоприятствующих событию  $A$  исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

**Классическое  
определение**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$m$  — число случаев,  
— благоприятствующих  
событию  $A$ ,  
 $n$  — общее число  
испытаний

До  
опыта

**Статистическое  
определение**

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

После  
опыта

**Относительная  
частота  
события**

$$\omega = P^*(A) = \frac{m}{n}$$



Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов с практической достоверностью можно утверждать, что **частота** события будет сколь угодно мало отличаться от его **вероятности** в отдельном опыте.

*Вероятностью события называют число, около которого колеблется частота появления события при сохранении неизменных условий опыта. **Приведенное определение вероятности называют статистическим определением.***

*Практически невозможным событием называется событие, вероятность которого весьма близка к нулю, но не равна нулю.*

*Практически достоверным называется событие, вероятность которого весьма близка к единице, но не равна единице.*

Английский математик **Карл Пирсон**  
бросал монету **24000** раз.



Герб выпал **12012** раз.



Какова **частота** выпадения герба?



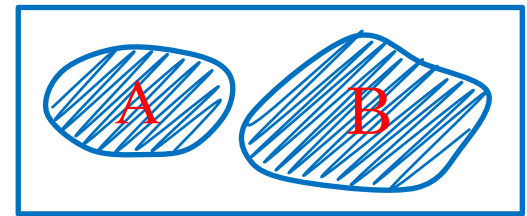


□ **Определение. Элементарными исходами опыта** называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий.



□ Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий.**

□ **Определение. Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта.



## 2. Основные теоремы теории вероятностей и следствия из них.

**Теорема (сложения вероятностей).** Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

**Следствие 1:** Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

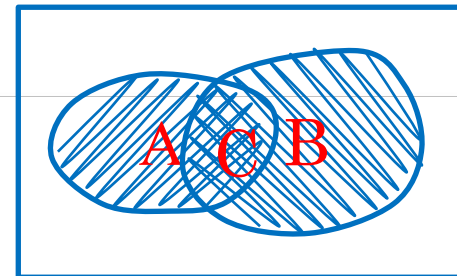
**Определение.** Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

**Следствие 2:** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



**Определение.** Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

**Теорема. (Умножения вероятностей)** Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Также можно записать:  $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то  $P(B/A) = P(B)$ , и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться  $n$  событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1q_2\dots q_n$$

Здесь событие  $A$  обозначает наступление хотя бы одного из событий  $A_i$ , а  $q_i$  – вероятность противоположных событий  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ .

### 3. Формула полной вероятности.

#### 3.1 Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие  $A$  может произойти вместе с одним из несовместных событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$  и условные вероятности наступления события  $A$  при наступлении события  $H_i$   $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$ .

**Теорема.** Вероятность события  $A$ , которое может произойти вместе с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события  $A$ .

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$



Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна  $\frac{1}{3}$ .

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка:  $p_1^2 = 0,4^2 = 0,16$ ;
- для второго стрелка:  $p_2^2 = 0,6^2 = 0,36$ ;
- для третьего стрелка:  $p_3^2 = 0,8^2 = 0,64$ ;

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3} p_1^2 + \frac{1}{3} p_2^2 + \frac{1}{3} p_3^2 = \frac{1}{3} (0,16 + 0,36 + 0,64) = \frac{29}{75}$$



### 3.2. Формула Бейеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$  с известными вероятностями их наступления  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ . Пусть в результате опыта наступило событие  $A$ , условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности  $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$ .

Требуется определить, какие вероятности имеют гипотезы  $H_1, H_2, \dots, H_n$  относительно события  $A$ , т.е. условные вероятности  $P(H_i / A)$ .

**Теорема.** *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется **формулой Бейеса**.

### 3.3. Повторение испытаний. Формула Бернулли.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие  $A$ , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события  $A$** .

Допустим, что событие  $A$  наступает в каждом испытании с вероятностью  $P(A)=p$ . Определим вероятность  $P_{m,n}$  того, что в результате  $n$  испытаний событие  $A$  наступило ровно  $m$  раз.

Пусть в результате  $n$  независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие  $A$  наступает с вероятностью  $P(A) = p$ , а противоположное ему событие  $\bar{A}$  с вероятностью  $P(\bar{A}) = 1 - p$ .

Обозначим  $A_i$  – наступление события  $A$  в испытании с номером  $i$ . Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате  $n$  опытов событие  $A$  наступает ровно  $m$  раз, то остальные  $n-m$  раз это событие не наступает. Событие  $A$  может появиться  $m$  раз в  $n$  испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ . Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m(1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли**:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m(1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.



“Медицина — это наука  
неопределенности и  
искусство вероятности”.

*Сэр Вильям Ослер*

Человеческий организм — это вероятностная система.  
Нет детерминированных показателей: что хорошо для  
одного, то для другого — смерть.



Ему хорошо

Воздействие



Смерть



## **4. Случайные величины.**

### **4.1. Случайные величины и их виды.**

**Определение.** Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

**Определение.** Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Например, число волос на голове, уровень сахара больных.

**Определение.** Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

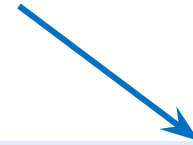


# Случайные величины



Дискретные

Счет



Непрерывные

Измерения



- 4.2. Закон распределения дискретной случайной величины.
- Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной случайной величины**.
- Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.
- Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.
- Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения**. При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

Чтобы задать дискретную случайную величину, надо перечислить ее возможные значения и вероятности, с которыми они достигаются. В результате получается таблица, которая носит название *закона распределения случайной дискретной величины*.

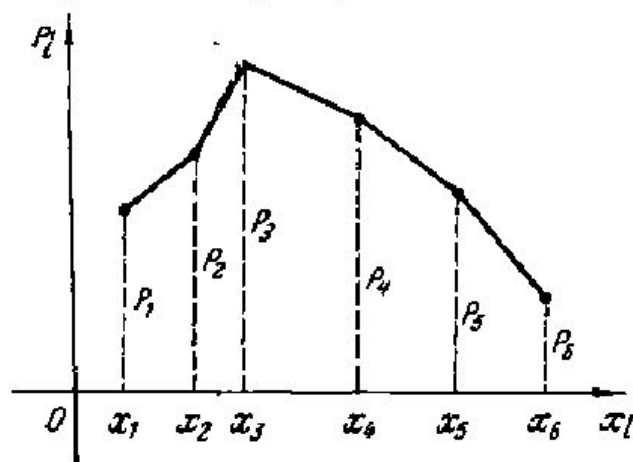
**Таблица**

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$	$\dots$

Эта таблица может быть конечной или бесконечной. При этом все вероятности  $p_n$  должны быть положительными, а их сумма должна равняться единице.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(x_n) = 1.$$

Таблицу, в которой указаны возможные значения случайной величины или вероятности, называют также *рядом распределения*. Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, прибегают к его графическому изображению: по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат — вероятности этих значений. Полученные точки соединяются отрезками прямых. Такая фигура называется *многоугольником распределения*





## 5. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

### 5.1. Математическое ожидание.

**Определение.** Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое  $m = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$  ожидание приблизительно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Для дискретных  
случайных величин

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Для непрерывных  
случайных величин



## 5. 2. Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

**Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.**

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

**Теорема.** Математическое ожидание  $M(X)$  числа появления события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.

$$M(X) = np$$

### □ 5.3. Дисперсия.

- Математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.
- Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.
- **Определение.** Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

□

## Дисперсия – рассеяние вокруг математического ожидания

$$D(X) = M(x - M(x))^2,$$

отклонение

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 \cdot p_i,$$

$$D(X) = M(x^2) - (M(x))^2.$$

Для дискретных  
случайных величин

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx.$$

Для непрерывных  
случайных величин

Пример. Закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,5625 = 1,5$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1,5)^2 = 2,25$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1,5)^2 = 0,25$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1,5)^2 = 0,25$$

Тогда

$[X - M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2,25 \cdot 0,0625 + 0,25 \cdot 0,375 + 0,25 \cdot 0,5625 = 0,375$$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

#### 5. 4. Вычисление дисперсии.

**Теорема.** *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины  $X$  и квадратом ее математического ожидания.*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

$X$	0	1	2
$X^2$	0	1	4
$p$	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,5625 = 2,625$$

$$D(X) = 2,625 - [1,5]^2 = 0,375$$



## 5. 5. Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

**Теорема.** Дисперсия числа появления события  $A$  в  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность  $p$  появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в каждом испытании.

$$D(X) = npq$$



5. 6. Среднее квадратическое отклонение.

**Определение.** Средним квадратическим отклонением случайной величины  $X$  называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

**Теорема.** Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}$$

## Функция распределения

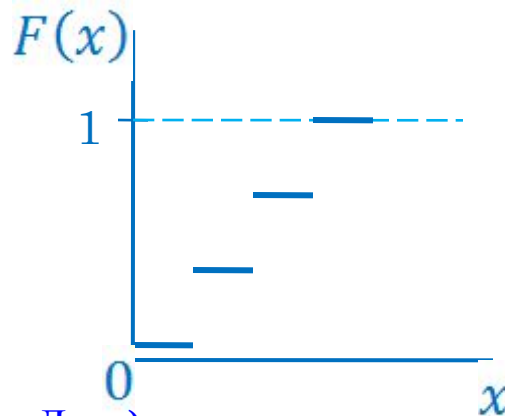
$$F(x) = P(X < x)$$

Для дискретной и непрерывной случайных величин.

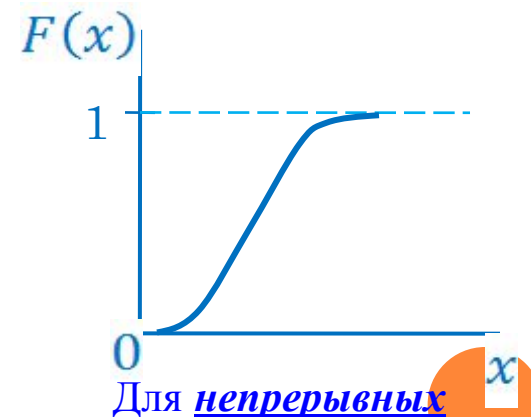
**Функция распределения** = = **интегральная** функция распределения – это вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение меньше некоторого наперед заданного числа  $x$ - малое

### Свойства:

- 1  $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2 неубывающая



Для дискретных случайных величин



Для непрерывных случайных величин

## Нормальное распределение

Определение. Случайная величина  $X$  имеет нормальный закон распределения, если ее функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $\sigma$  и  $a$  – параметры распределения.

Определение. График функции  $f(x)$  называется *нормальной кривой* или кривой нормального распределения.

Методами дифференциального исчисления можно установить, что:

1. кривая симметрична относительно прямой  $x=a$ ;
2. функция имеет максимум при  $x=a$   $f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ;
3. по мере удаления  $x$  от точки  $a$  функция убывает и при  $x \rightarrow \pm\infty$  кривая приближается к оси  $Ox$ ;
4. кривая выпукла вверх при  $x \in (a - \sigma; a + \sigma)$  и выпукла вниз при  $x \in (-\infty; a - \sigma)$  и  $x \in (a + \sigma; +\infty)$ .

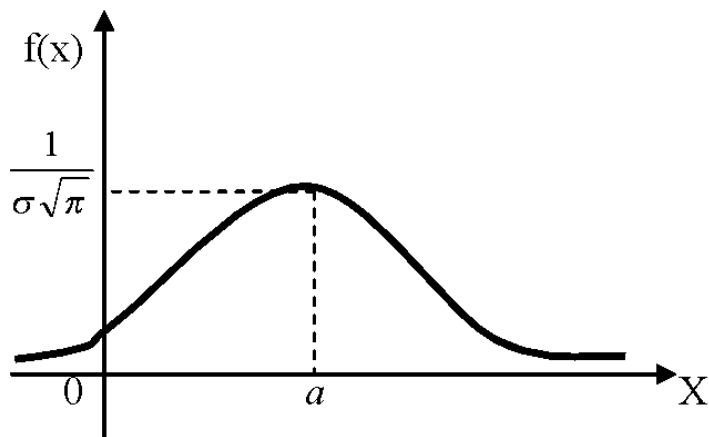
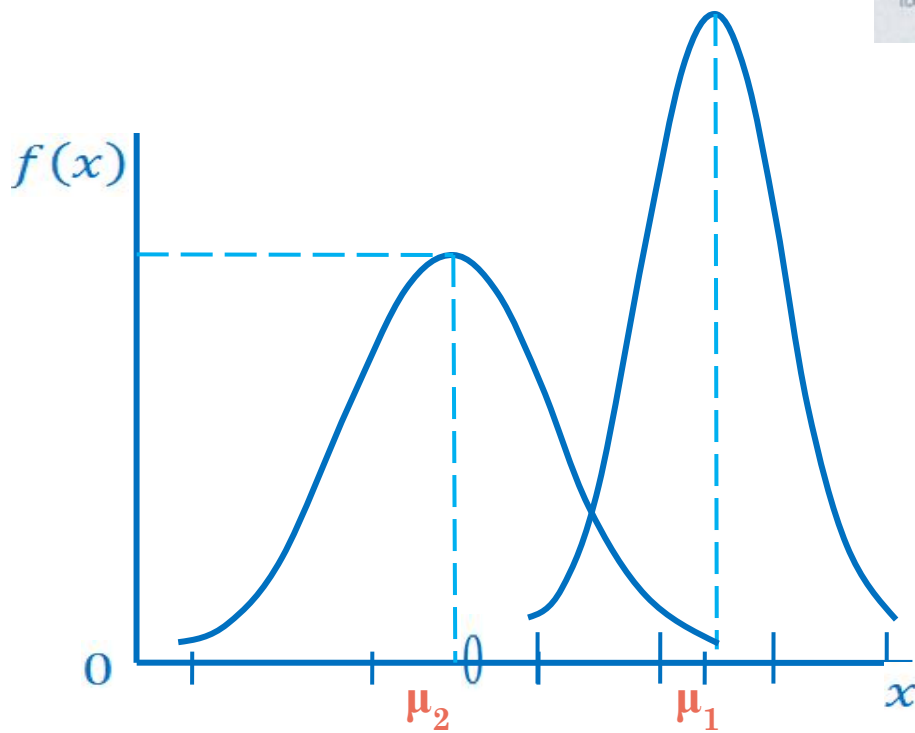


Рис. 4. Кривая нормального распределения.

**Замечание.** Форма кривой изменяется с изменением параметра  $\sigma$ . С возрастанием  $\sigma$  кривая  $f(x)$  становится более полой и растянутой вдоль оси  $Ox$ .

# Влияние параметров НЗР на форму кривой

$$\mu_1 > \mu_2 \quad \sigma_1 < \sigma_2$$



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**