Аналитическая геометрия

Занятие №13

Фролов Игорь Владимирович

IVFrolov@mephi.ru

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицей порядка $m \times n$ называют прямоугольную таблицу чисел (вещественных или комплексных), содержащую m строк и n столбцов.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, а число ее строк - порядком матрицы.

Перестановки

Всякое расположение чисел 1, 2,..., n в некотором определенном порядке называется перестановкой из n чисел

Обозначим $N(i_1,i_2,\dots i_n)$ число беспорядков (инверсий) в перестановке $(i_1,i_2,\dots i_n)$ т.е. таких пар чисел в ней, в которых большее число стоит впереди.

Например, в перестановке (4, 2,1,3) беспорядки образуют пары: (4,2), (4,1), (4,3), (2,1) и N (4, 2, 1, 3) =4.

Перестановка является четной.

Определители

Пусть A - квадратная матрица порядка n. Определителем этой матрицы называется алгебраическая сумма всевозможных произведений из n элементов, взятых по одному из каждого столбца и каждой строки матрицы A.

Во всяком таком произведении множители располагают в порядке следования столбцов.

Со знаком плюс берутся те произведения, у которых перестановка первых индексов четная,

со знаком минус — те, у которых перестановка нечетная.

Свойства определителя

I. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то он равен нулю.

II. Если переставить две строки (два столбца) определителя, то он изменит знак.

III. Если две строки (два столбца) определителя одинаковы, то он равен нулю.

IV. Если две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

V. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на некоторое число K, то сам определитель умножится на K.

VI. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде $a_{ij}=b_j+c_j$ то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, прежние, а в i-й строке в первом определителе стоят элементы b_j во втором — элементы c_j.

Аналогичное свойство справедливо и для столбцов.

VII. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Вычисление определителя

Рекуррентная формула 1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель матрицы (n — 1)-го порядка, получающийся из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

формула разложения определителя по i-й строке

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

формула разложения определителя по j-му столбцу

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}$$

Вычисление определителя

Рекуррентная формула 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Метод элементарных преобразований столбцов

Выделяем строку i, в котором мы хотим получить (n —1) нулей.

Выделяем элемент a_{ij} , который мы хотим оставить ненулевым.

Из каждого столбца k≠j вычитаем линейную комбинацию оставшихся столбцов так чтобы коэффициент в позиции ik обращался в 0

Определитель будет равен $(-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$

Аналогичная процедура может быть сформулирована для строк

Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, принимается расположение 1, 2, 3, ... в возрастающем порядке):

123. 2, 3, 5, 4, 1.

125. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

189. $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

190. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

208. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

212. Как изменится определитель порядка n, если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

239. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

257. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

261. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 14 \\ -3 & 2 & 4 & -12 \\ 2 & -5 & -7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 & 14 \\ 2 & 4 & -12 \\ -5 & -7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -21 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 18$$

Операции над матрицами.

Линейные операции

- **Операция сложения** - *возможна только для матриц одинаковой размерности*

Складываются элементы матрицы с одинаковыми индексами

- **Операция умножения на число** – *для любых матриц*.

Все элементы матрицы умножаются на одно число

$$C = A + B \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$B = xA. \qquad b_{ij} = xa_{ij}.$$

1°. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения).

3°. $x(A + B) = xA + xB$ (распределительное свойство относительно числового сомножителя).

4°. $(x + y)A = xA + yA$ (распределительное свойство относительно матричного сомножителя).

5°. $x(yA) = (xy)A$.

Операции над матрицами.

Транспонирование матриц

При транспонировании строки и столбцы матрицы меняются местами

Меняется размерность неквадратной матрицы:
$m \times n \to \quad n \times m$

$$A^T \quad a_{ij}^T = a_{ji}, \quad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m.$$

$$1^\circ.\ (A + B)^T = A^T + B^T.$$
$$2^\circ.\ (xA)^T = xA^T.$$

Операции над матрицами.

Умножение матриц

Умножение матриц – *возможно, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.*

Размерность матрицы: *m × n · n × p → m × p*

$$C = AB. \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj},$$

$$i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., k.$$

1°. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность умножения).

2°. $A(B + C) = AB + AC$ (распределительное свойство).

3°. $(xA)B = A(xB) = x(AB)$.

4°. $(AB)^T = B^T A^T$.

В общем случае коммутативность нарушается *AB ≠ BA*

789. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Умножается каждая строка матрицы слева на каждый столбец матрицы справа

Обозначим:
r1 r2 – строки матрицы слева
c1 c2 – столбцы матрицы справа

$$\begin{array}{ccccc} & & & c1 & c2 \\ r1 & a & b & \alpha & \beta \\ r2 & c & d & \gamma & \delta \end{array}$$

$$(r1c1): c_{11} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = a\alpha + b\gamma \qquad (r1c2): c_{12} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = a\beta + b\delta$$

$$(r2c1): c_{21} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = c\alpha + d\gamma \qquad (r2c2): c_{22} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = c\beta + d\delta$$

$$C = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

791. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

$$c_{11} = 5\cdot 3 + 8\cdot 4 - 4\cdot 9 = 11$$

$$c_{21} = 6\cdot 3 + 9\cdot 4 - 5\cdot 9 = 9$$

$$c_{31} = 4\cdot 3 + 7\cdot 4 - 3\cdot 9 = 13$$

$$c_{12} = 5\cdot 2 - 8\cdot 1 - 4\cdot 6 = -22$$

$$c_{22} = 6\cdot 2 - 9\cdot 1 - 5\cdot 6 = -27$$

$$c_{32} = 4\cdot 2 - 7\cdot 1 - 3\cdot 6 = -17$$

$$c_{13} = 5\cdot 5 + 8\cdot 3 - 4\cdot 5 = 29$$

$$c_{23} = 6\cdot 5 + 9\cdot 3 - 5\cdot 5 = 32$$

$$c_{33} = 4\cdot 5 + 7\cdot 3 - 3\cdot 5 = 26$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

796. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28\cdot 7+93\cdot 2 & -28\cdot 3+93\cdot 1 \\ 38\cdot 7-126\cdot 2 & 38\cdot 3-126\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & 9 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -4\cdot 10+3\cdot 14 & 4\cdot 9-3\cdot 12 \\ -7\cdot 10+5\cdot 14 & 7\cdot 9-5\cdot 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

799. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$.

802. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

799

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1-2\cdot3 & -2\cdot1+2\cdot4 \\ 3\cdot1-4\cdot3 & -2\cdot3+4\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot5+2\cdot9 & 1\cdot6-2\cdot10 \\ -3\cdot5+4\cdot9 & 3\cdot6-4\cdot10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$$

802

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix}$$

817. Доказать, что любую квадратную матрицу A можно представить, и притом единственным образом, в виде $A = B + C$, где B — симметрическая, а C — кососимметрическая матрицы.

$$B = \frac{(A + A^T)}{2}$$

$$C = \frac{(A - A^T)}{2}$$

Операции над матрицами.

Единичная матрица. Обратная матрица

Диагональная матрица (квадратная), у которой все диагональные элементы равны 1, называется <u>**единичной**</u>

$$E = (\delta_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j, \end{cases}$$

$$AE=EA=A$$

Пусть *A* — квадратная матрица. Матрица *B* той же размерности называется <u>**обратной**</u> к А и обозначается $B = A^{-1}$, если

$$AB = BA = E.$$

Операции над матрицами.

Обращение матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель матрицы (n — 1)-го порядка, получающийся из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Если выполнено условие det(A)≠0 матрица A имеет обратную $B=A^{-1}$ и ее элементы рассчитываются по формуле

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}, \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

Операции над матрицами.

Обращение матрицы

Процедура нахождения обратной матрицы: .

1. Составляем матрицу $A^* = (a^*_{ij})$, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы

2. Транспонируем ее: A^{*T}

3. Умножаем на $(detA)^{-1}$

В результате получаем обратную матрицу:

$$A^{-1}=A^{*T}/det(A)$$

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

837. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$$\det A = 21 - 20 = 1$$

$$A_{11} = 7$$

$$A_{21} = -4$$

$$A_{12} = -5$$

$$A_{22} = 3$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

841. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3\cdot 8 - 4\cdot 5 - 5\cdot 1 = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -29 & -18 & 3 \\ 11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

863. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

$$AXB = C$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

det(A)=4

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами.

2-й способ нахождения обратной матрицы.

Составляем матрицу $n \times 2n$:

$(A \;\; E)$

В нашем распоряжении элементарные операции со строками

1) перестановка строк;
2) умножение (деление) всей строки на одно и то же число не равное 0
3) прибавление к одной из строк любой другой, умноженной на. произвольное число.

Наша цель — получить единичную матрицу на месте А,

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$\textbf{841.}\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

На дом:

П. 788,790,792,797,800,804,808,828,836,838,840,862