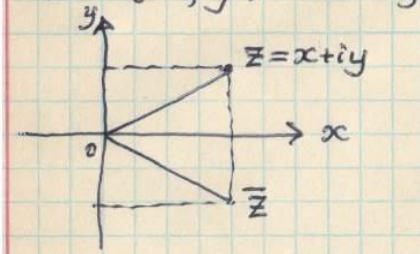
5. Комплексные числа

Возникли из вещественных, т.к. некоторые уравнения не имеют решений ($x^2=-1$)

Опр Комплексным числом (z) называется упорядоченная пара вещ. чисел (x и y)

$z=(x;y)=x+yi=x+iy$. $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$



Изображается точкой на плоскости

Ox - вещ. ось, Oy - мнимая ось

$\bar z=(x,-y)=x+(-y)i=$

$=x-yi=x-iy$ — сопряжённое число

Опр. $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются равными ($z_1=z_2$) если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

$>$, $<$ не определяются.

Опр. $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Тогда

$$z_1\pm z_2\equiv(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

$$z_1\cdot z_2\equiv(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

а если $z_2\ne 0+0i$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

Если $z_2=0+0i$, то $z_1\pm z_2=z_1$,

$z_1\cdot z_2=z_2=0+0i$, т.е. $0+0i$ это ноль

Если $z_2=1+0i$, то $z_1z_2=z_1$, т.е. $1+0i$ - единица

Вычитание и деление - обратны к сложению и умножению соотв. (Самостоят.)

$\mathbb{R}\sim\mathbb{R}_1\equiv\{z: z=x+0i,\ x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$

При этом операции сохраняются (самост.)

Т.е. вещ. числа - часть компл. $x=x+0i$

$0+iy$ наз. чисто мнимым. $iy=0+iy$

$(x)\underset{слож}{+}(iy)=(x+0i)+(0+iy)=$

$=(x+0)+i(0+y)=x+iy$ (т.е. $+$ - сложение)

Число мнимое $0+1i=1\cdot i$ запишем i

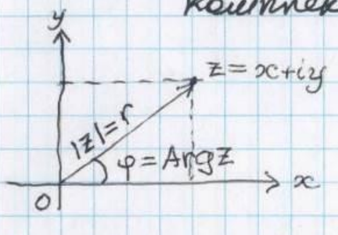
$y\underset{умнож}{\cdot} i=(y+0i)\cdot(0+1i)=0+iy=iy$ (т.е. умн.)

$i^2=i\cdot i=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1$

Поэтому действия над компл. числами - как с многочленами, заменяя i^2 на (-1).

$$\left.\begin{aligned}\overline{z_1\pm z_2}&=\bar z_1\pm\bar z_2\\ \overline{z_1\cdot z_2}&=\bar z_1\cdot\bar z_2\\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}&=\frac{\bar z_1}{\bar z_2}\end{aligned}\right\}\ \text{Проверить самостоятельно}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа



$z = x+iy$ – алгебраическая форма

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{mod}\,z = |z|$ –

– модуль (совпад. с абс. величиной для вещ. чисел), $r \geq 0$

Если $z \neq 0$ $(z \neq 0+0i)$, то $\varphi = \mathrm{Arg}\,z$ – аргумент

$\mathrm{Arg}\,z$ определяется с точностью до $2k\pi$.

$\mathrm{Arg}\,z = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $\arg z$ – главное значение определяемое на промежутке длины 2π: $-\pi < \arg z \leq \pi$ или $0 \leq \arg z < 2\pi$, или...

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);\ r = |z|,\ \varphi = \mathrm{Arg}\,z$$

$$z = 0 \Leftrightarrow r = |z| = 0;\ z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0$$

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 +$$
$$+ \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Аналогично $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

В частности $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (Муавр)

Извлечение корня из компл. чисел

<u>Опр.</u> $n \in \mathbb{N}$. w называется корнем n-й степени из z, если $w^n = z$. Обозначается $w = \sqrt[n]{z}$

Если $z = 0\ (=0+0i)$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ $w = \sqrt[n]{z} = 0$ (ед.)

Если $z \neq 0$, то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

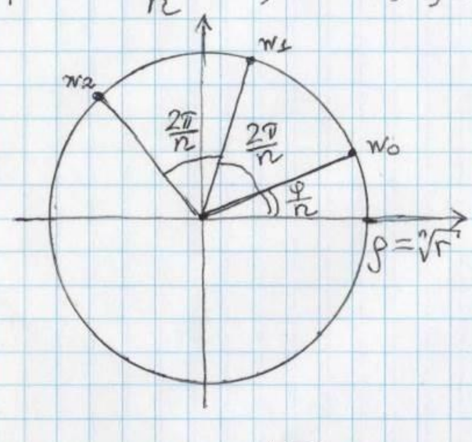
Будем искать $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$: $w^n = z$

($w = 0$ не подходит, т.к. $0^n = \underbrace{0\cdot\ldots\cdot 0}_{n\ \text{раз}} = 0$)

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z$$

$\rho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ – арифм. корень

$\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$ (далее – повторение)



Все n штук $\sqrt[n]{z}$ (при $z \neq 0$) находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в 0 и радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$.

Числовые последовательности

Опр Если $\forall n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие нек-ое $x_n \in \mathbb{R}$, то это значит, что задана числовая последовательность.

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Иногда удобнее $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty} = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}$

Счётные мн-ва – примеры последоват.

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$;

$\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$

Для двух последоват. $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно рассмотреть $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, а если $y_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$, то и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ – сумма, разность, произв., частное.

Опр $\{x_n\}$ наз. огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall n$ $x_n \leq M$

Опр. $\{x_n\}$ наз. огр. снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}$: $\forall n$ $x_n \geq m$

Опр. $\{x_n\}$ наз. ограниченной, если она огр. сверху и снизу.

Установим, что $\{x_n\}$ огр. $\Leftrightarrow \exists A > 0 : \forall n$ $|x_n| \leq A$

Д-во. $\Rightarrow$. $\{x_n\}$ – огр. т.е. $\exists m, M : m \leq x_n \leq M$ $\forall n$

$A = \max(|m|, |M|) \Rightarrow |x_n| \leq A$

$\Leftarrow$. $\exists A > 0 : \forall n$ $|x_n| \leq A$, т.е. $-A \leq x_n \leq A$

Берём $m = -A$, $M = A$. Д-зано.

Опр. $\{x_n\}$ – неогр., если $\forall A > 0 \exists n : |x_n| > A$

$[x] = E(x)$ – наиб. целое, которое $\leq x$

$([1] = 1,\ [\sqrt{2}] = 1,\ [-\sqrt{2}] = -2)$

Всегда $x - 1 < [x] \leq x$, т.е. $[x] \leq x < [x] + 1$

Примеры огр. и неогр. посл-тей

$\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ – неогр. посл-ть, т.к. $\forall A > 0$ $\exists n = [A] + 1 > A$ (13-е св-во)

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ огр., т.к. $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ огр., т.к. $|(-1)^n| = 1$, т.е. $|x_n| \leq 1$ $(-1 \leq x_n \leq 1)$

$\left\{n^{(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots, \frac{1}{2k-1}, 2k, \dots\right\}$

$\forall A > 0$ $\exists n = \underbrace{2([A]+1)}_{\text{чётное число}} > 2A > A$ – неогр.