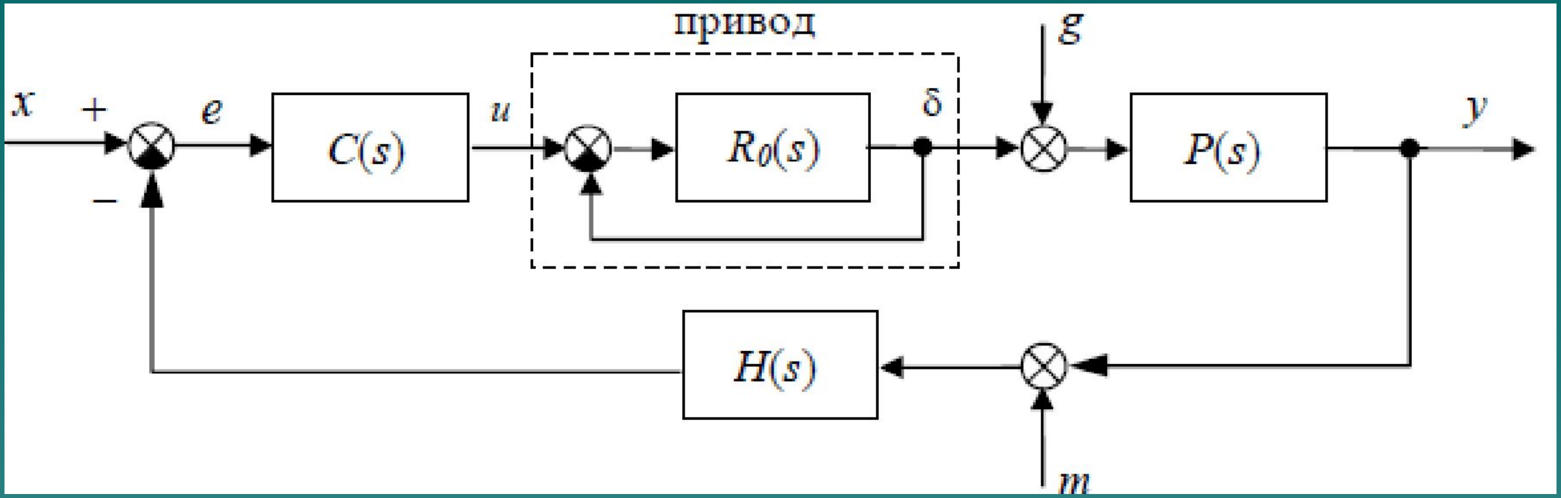
ЛЕКЦИЯ

Тема № Устойчивость САУ.

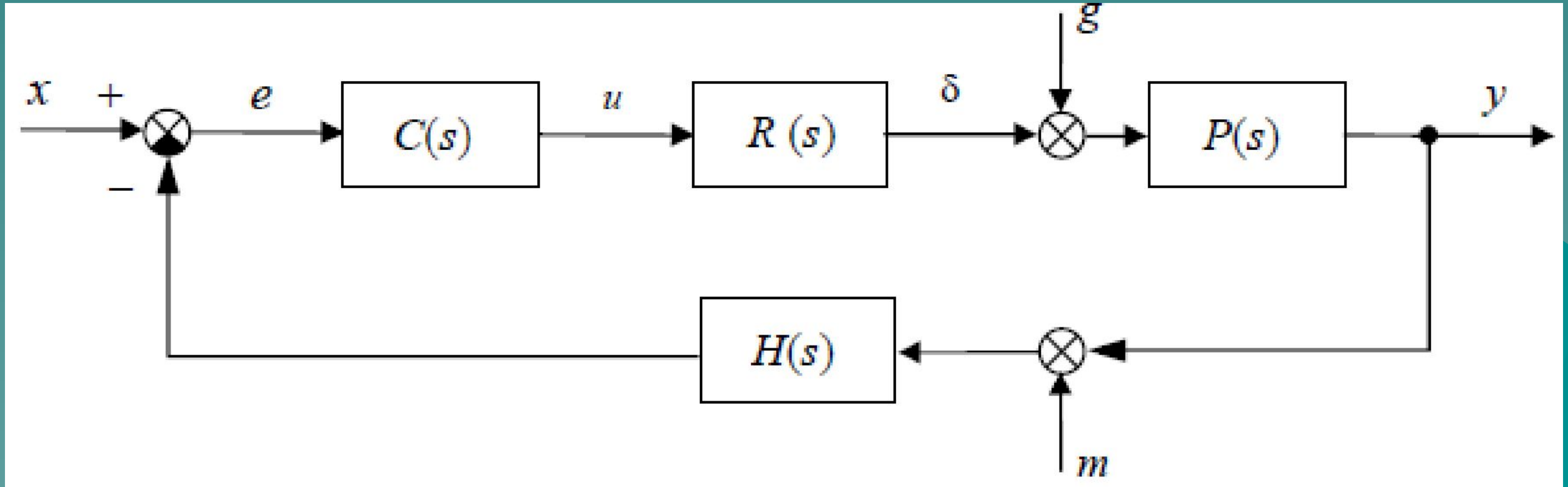
1.УСТОЙЧИВОСТЬ САУ.

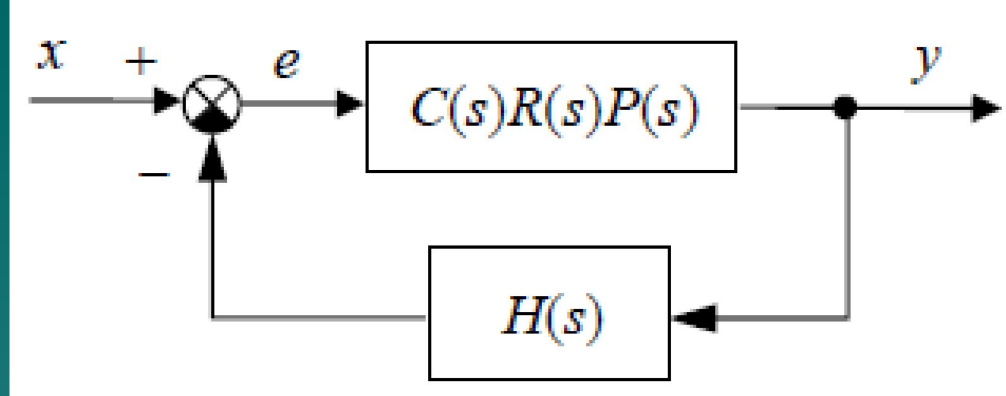
2.АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ САУ.

Типовая одноконтурная система

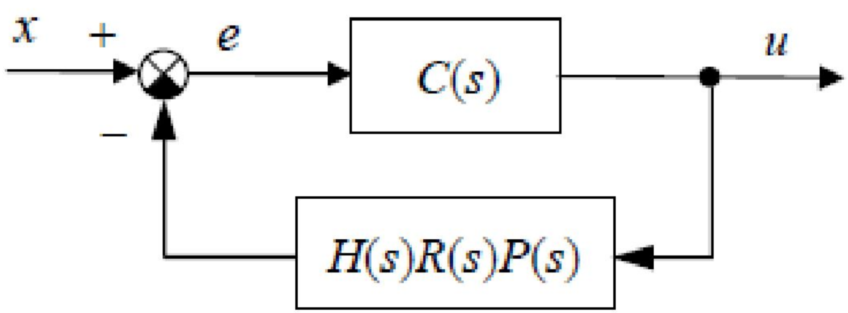


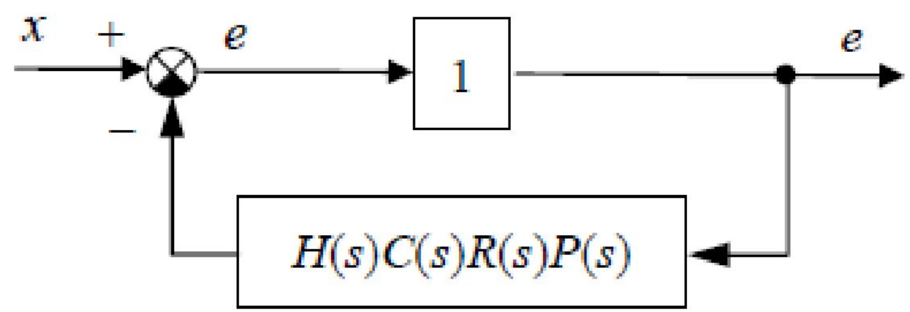
$$R(s)=\frac{R_0(s)}{1+R_0(s)}.$$





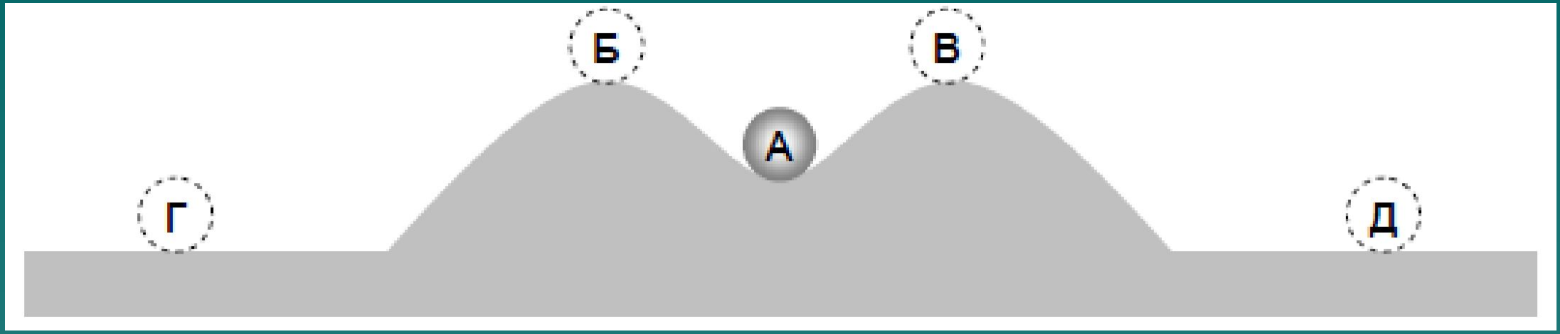
$$W(s)=\frac{C(s)R(s)P(s)}{1+H(s)C(s)R(s)P(s)}.$$

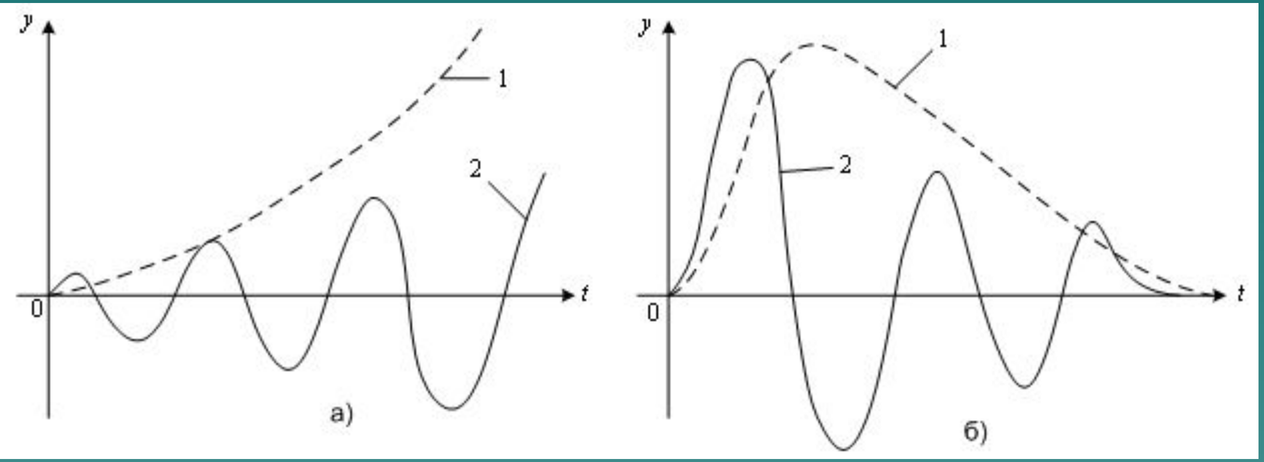




$$W_u(s)=\frac{C(s)}{1+H(s)C(s)R(s)P(s)},\qquad W_e(s)=\frac{1}{1+H(s)C(s)R(s)P(s)}.$$

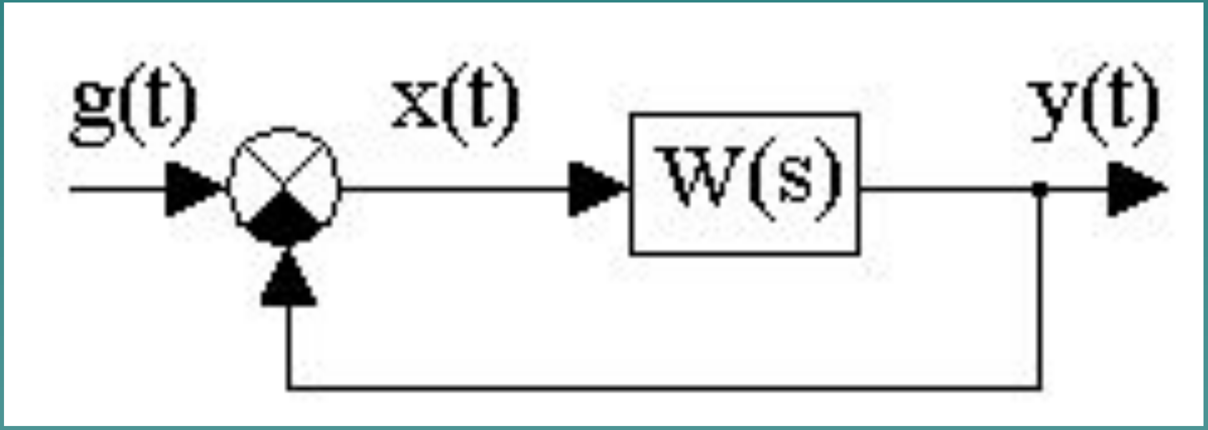
Анализ систем управления. Устойчивость.





Под устойчивостью понимается способность системы возвращаться к установившемуся режиму работы после приложения или снятия внешних воздействий.

Устойчивость линейной системы определяется ее характеристиками и не зависит от действующих воздействий.



Структурная схема линейной системы

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$$ - передаточная функция разомкнутой системы. (1)

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}$$ - передаточная функция замкнутой системы. (2)

$$W_3(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad (3)$$

$$B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m \quad (4)$$

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n \qquad m < n \quad (5)$$

$$A(p)y(t) = B(p)g(t) \quad (6)$$

$$y(t) = y_c(t) + y_e(t). \quad (7)$$

$y_e(t)$ - частное решение неоднородного уравнения определяется внешним воздействием на систему - это вынужденное движение системы.

$y_c(t)$ - общее решение однородного уравнения определяет свободное движение системы.

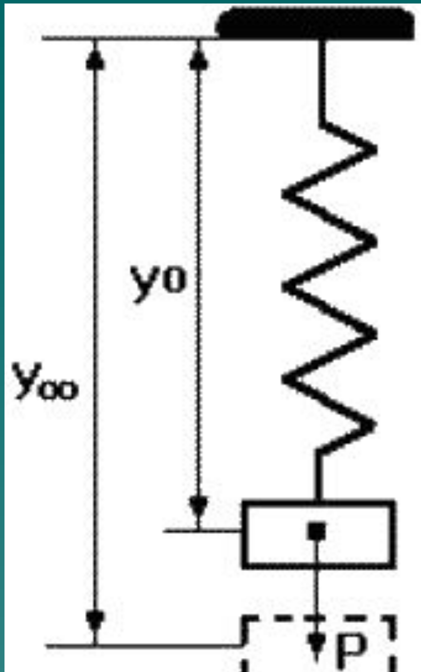


Рис. 62

$$A(p)y(t) = 0 \quad (1)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} \quad (2)$$

C_i – постоянные коэффициенты, определяемые начальными условиями;

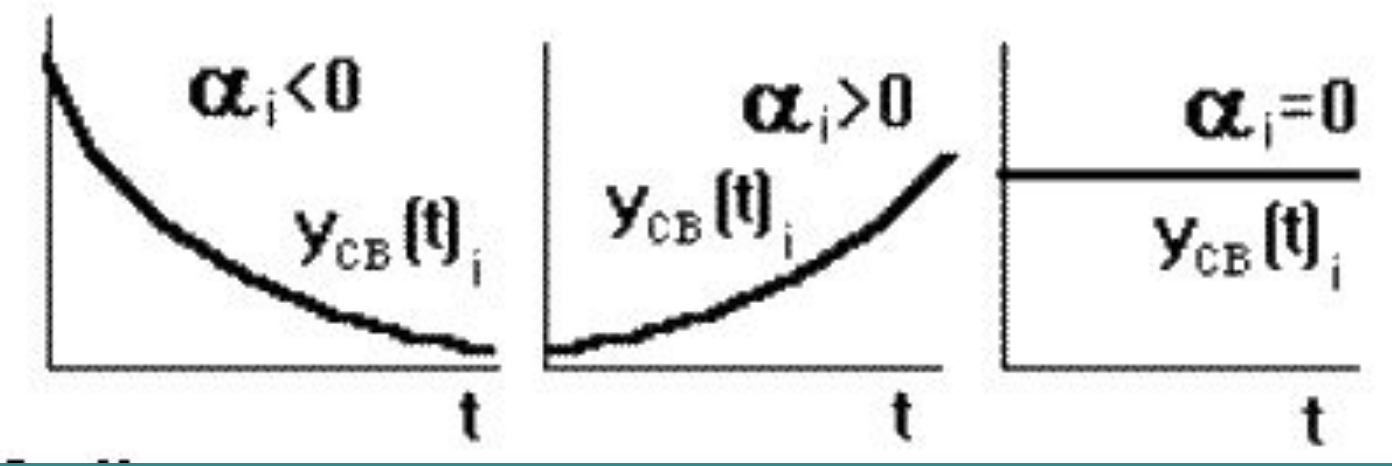
p_i - корни характеристического уравнения

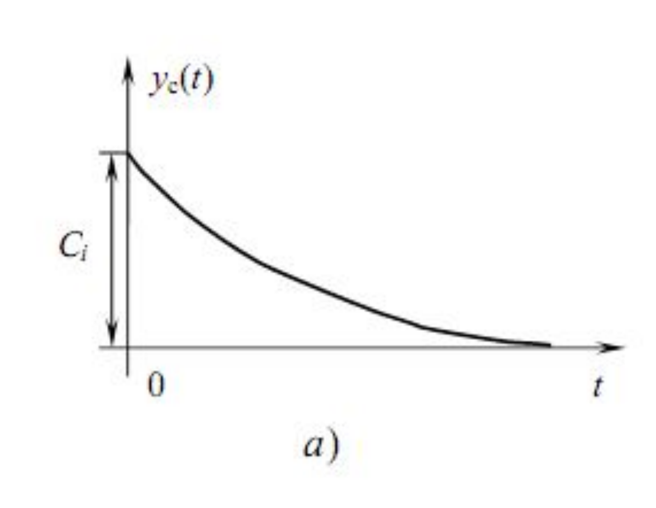
$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

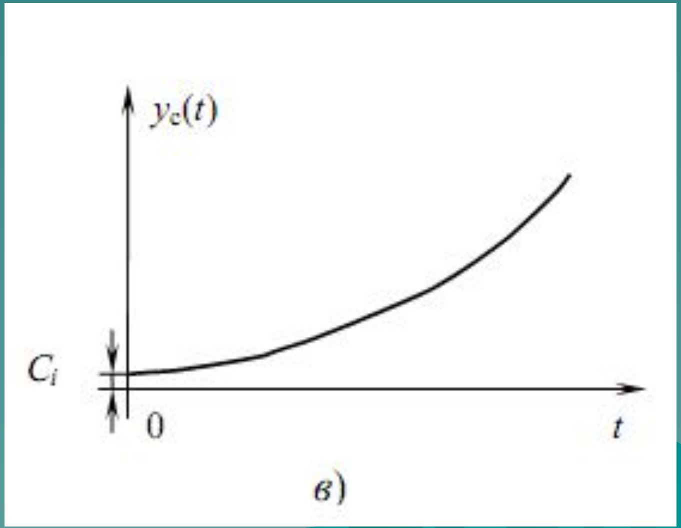
Корни характеристического уравнения могут быть вещественными, комплексными и чисто мнимыми.

Вещественный корень

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} \qquad (1)$$







Комплексные корни.

$$P_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$C_1 e^{-(\alpha + j\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha - j\beta)t} = C_i e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \phi) \quad (1)$$

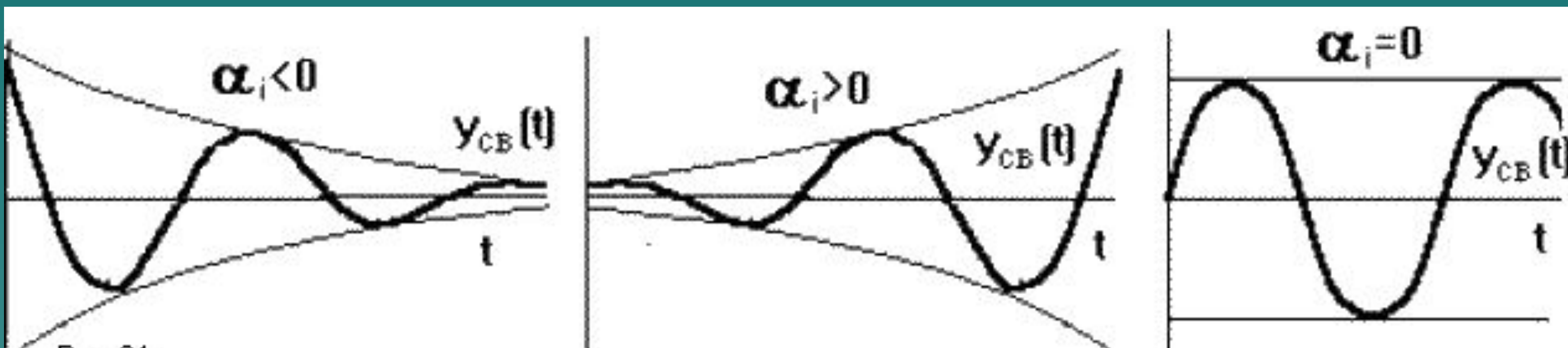
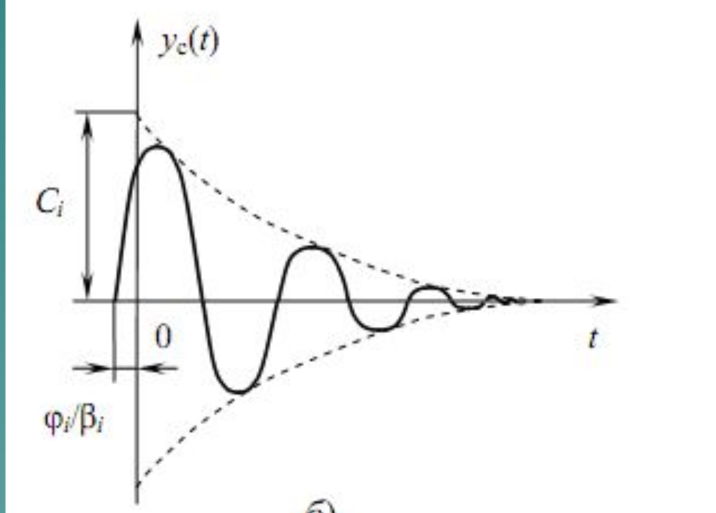
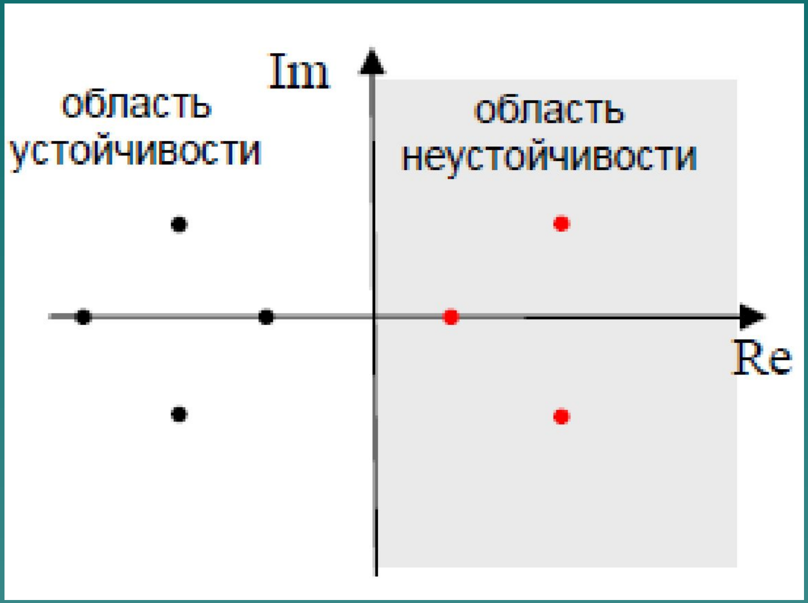


Рис. 64

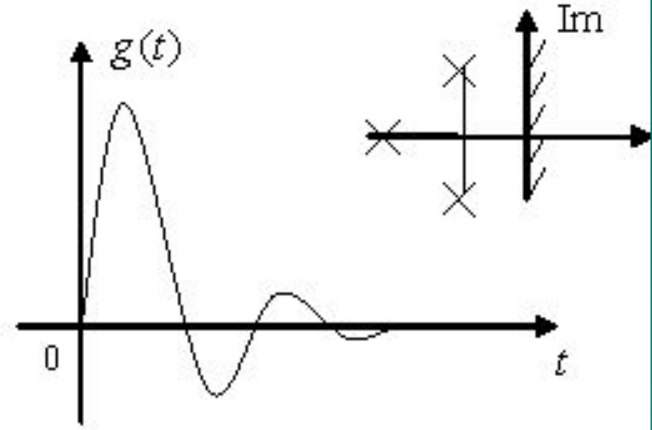


б)

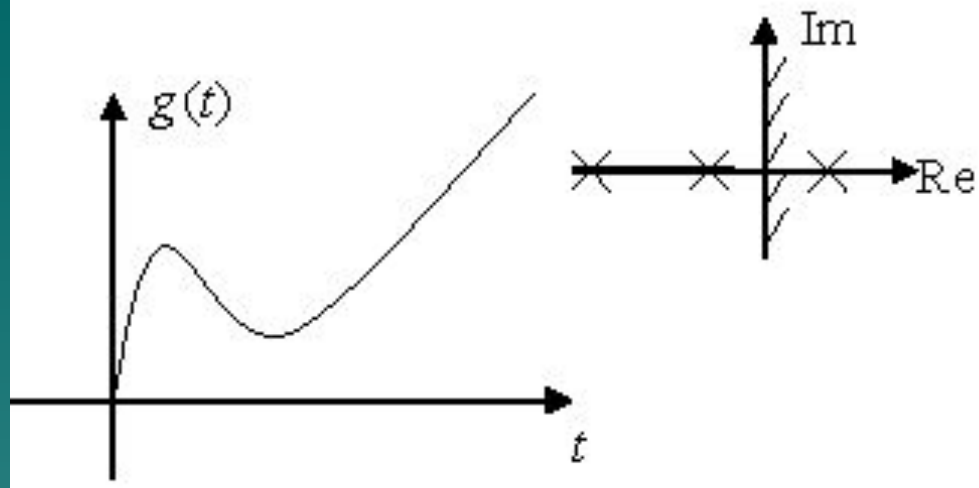
Корни характеристического уравнения можно представить в виде точек на комплексной плоскости



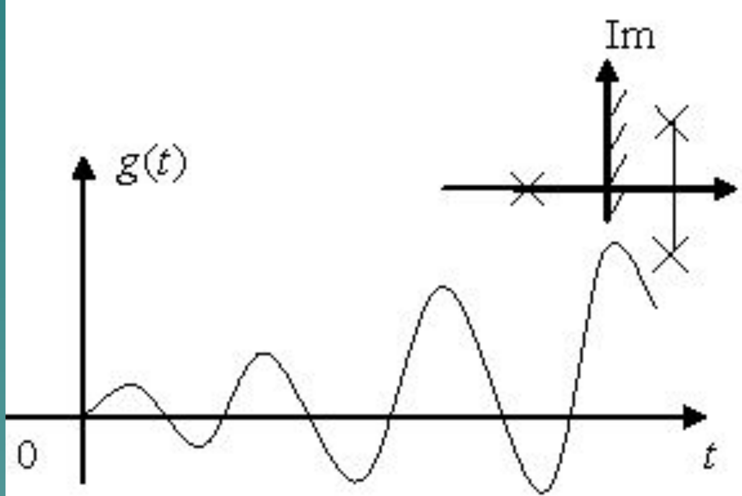
Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали слева от мнимой оси плоскости корней. Если хотя бы один корень окажется справа от мнимой оси, то система будет неустойчивой. Мнимая ось в плоскости корней представляет собой границу устойчивости. Вся левая полуплоскость является областью устойчивости.



Расположение комплексно-сопряженных корней в устойчивой системе.



Расположение корней неустойчивой системы



Расположение комплексно-сопряженных корней в неустойчивой системе.

Алгебраические критерии устойчивости

Необходимое условие устойчивости

Необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

$$a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)=0 \quad (1)$$

$$a_0(P+\alpha_1)(P+\alpha_2)\dots(P+\alpha_n)=0 \quad (2)$$

$$a_0(P+\alpha-j\beta)(P+\alpha+j\beta)=(P+\alpha)^2+\beta^2 \quad (3)$$

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным условием устойчивости, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни являются левыми. Однако для систем третьего и высшего порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием устойчивости, но не достаточным. В этом случае все вещественные корни характеристического уравнения левые, комплексные же корни могут быть и правыми.

Критерий Гурвица

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} \qquad (a_0 > 0)$$

1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от **a1** до **an**;
2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;
3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули.

Критерий Гурвица

Критерий Гурвица. Для того система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно чтобы все определители Гурвица были положительные.

Для устойчивости полинома необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительными. Поэтому достаточно проверить только n −1 первых определителей Гурвица. Например, для n=5 речь идет об определителях.

$$D_1 = a_1 > 0\,,\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,,\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,,\quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0\,.$$

$$D_5 = \det H_5 = a_5 D_4$$

Критерий устойчивости Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова предназначен для оценки устойчивости системы по его характеристическому уравнению.

Порядок расчета устойчивости по критерию Михайлова:

Записывается характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$F(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 \ .$$

Производится замена *p = jω и выделяются реальная P(ω)* и мнимая *Q(ω) слагаемые.*

В осях координат *P(ω), jQ(ω)* при изменении *ω* от *0* до *+∞ строят характеристический частотный вектор (годограф Михайлова).*

По виду годографа Михайлова судят об устойчивости системы. Устойчивые годографы проходят поочередно *n* квадрантов. На границе устойчивости системы годограф проходит через начало координат.

Критерий устойчивости Михайлова

Для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении частоты ω от 0 до ∞ начинался при ω = 0 на вещественной положительной полуоси комплексной плоскости и обходил только против часовой стрелки (в положительном направлении) последовательно n квадрантов, где n –порядок характеристического уравнения системы.

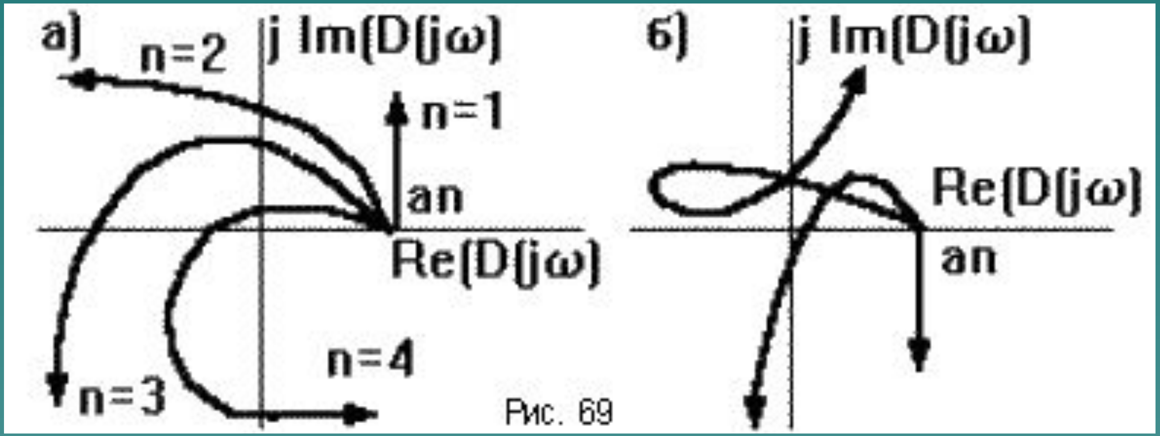
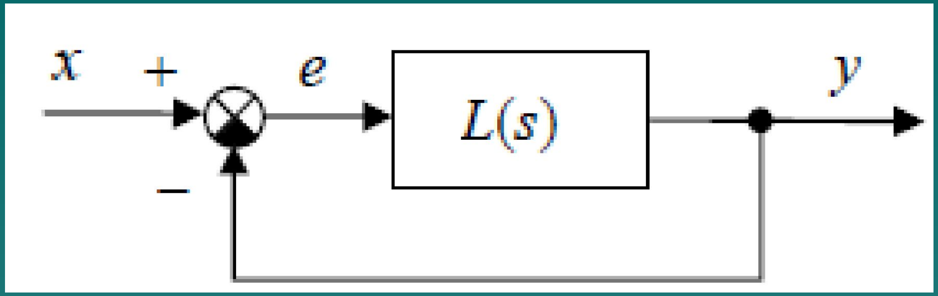
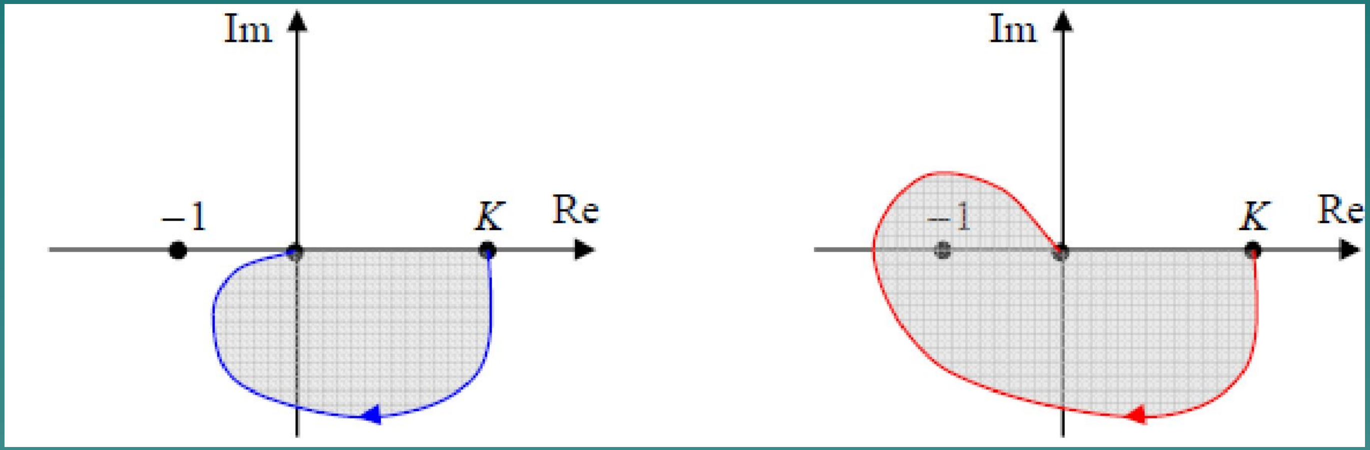


Рис. 69

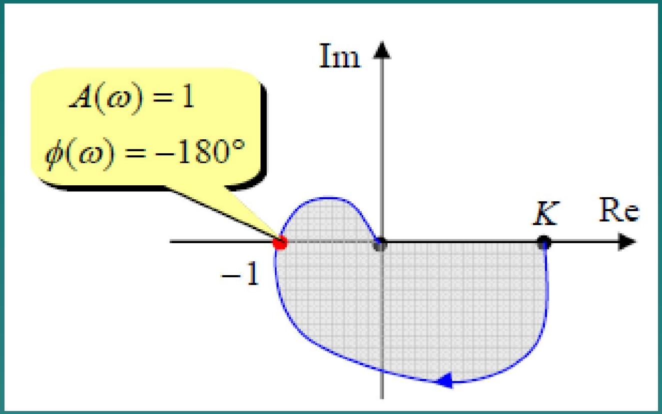
Критерий Найквиста



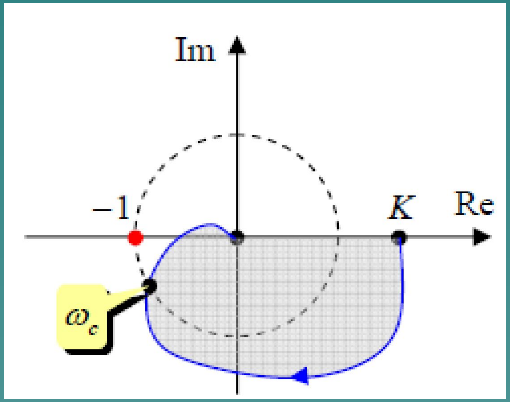


Система устойчива тогда и только тогда, когда годограф не охватывает точку (−1; 0).

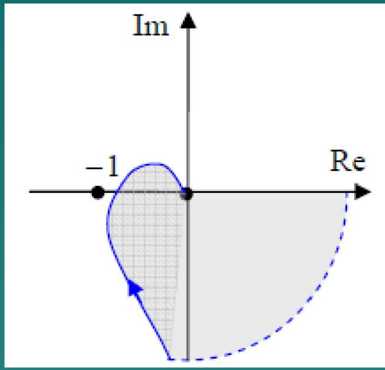
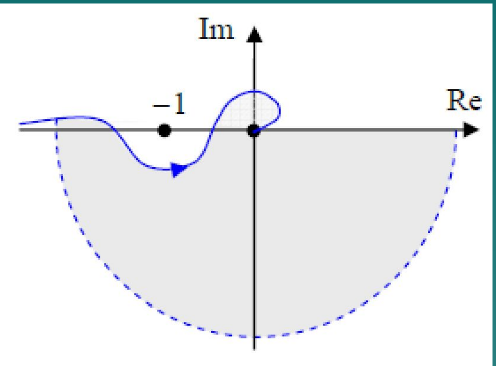
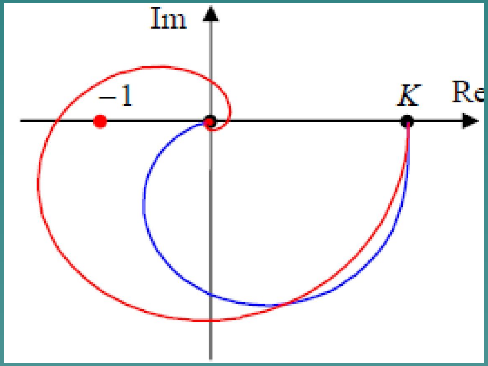
Критерий Найквиста



Выражение «система находится на границе устойчивости» означает, что частотная характеристика проходит через точку $(-1;\,0)$.

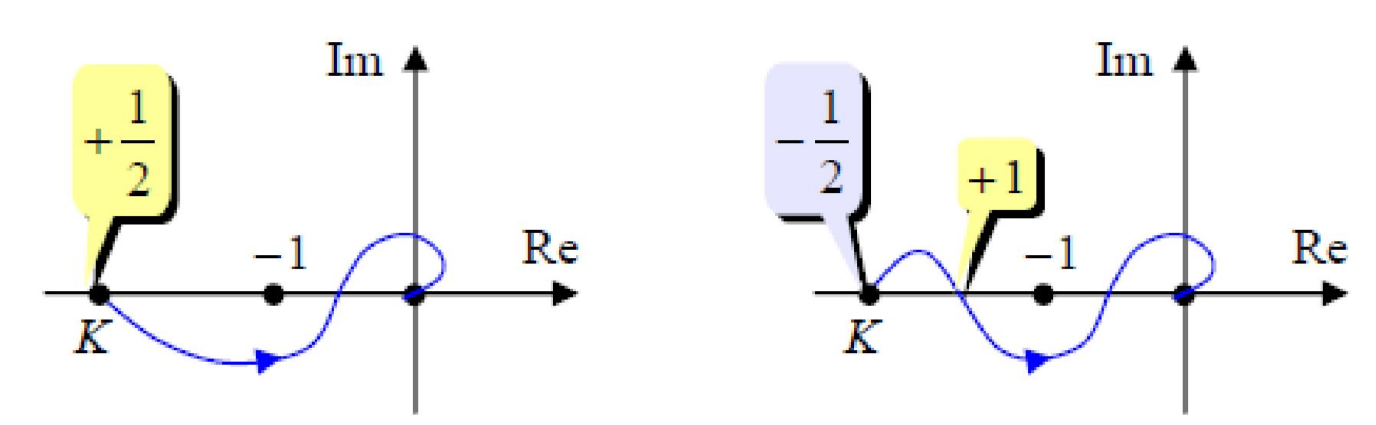


Частота ω_c , для которой $A(\omega_c)=1$, называется **частотой среза**. Для устойчивой системы значение фазы на частоте среза должно быть больше, чем $-180°$; в этом случае годограф не охватит точку $(-1;\,0)$.


Im
Re
−1

Im
Re
−1

Im
Re
−1
K

Если разомкнутая система неустойчива и её характеристический полином имеет **l** *правых корней, то для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ охватывала бы точку с координатами (-1,j0) в положительном направлении* ***l/2*** *раз.*

Для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разница между числом положительных и отрицательных переходов была равна l/2 , где l – число неустойчивых полюсов функции W(jω). Начальная точка на оси абсцисс левее точки (−1; 0) считается за половину перехода.

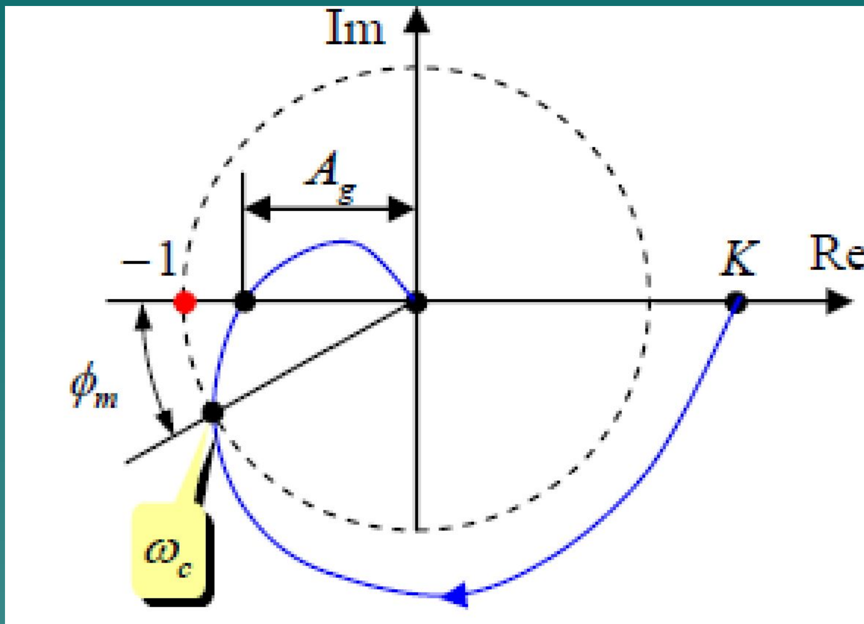


Оценка качества процесса управления

Оценка качества по временным и частотным характеристикам

1. Критерии, используемые для оценки точности работы системы в различных типовых режимах. Точность работы определяется ошибкой управления.
2. Критерии, определяющие величину запаса устойчивости.
3. Показатели, характеризующие быстродействие системы. Под быстродействием понимают быстроту реагирования системы на задающие и возмущающие воздействия.
4. Интегральные оценки качества.

Показатели характеризующие запас устойчивости САУ.



Запас устойчивости по амплитуде

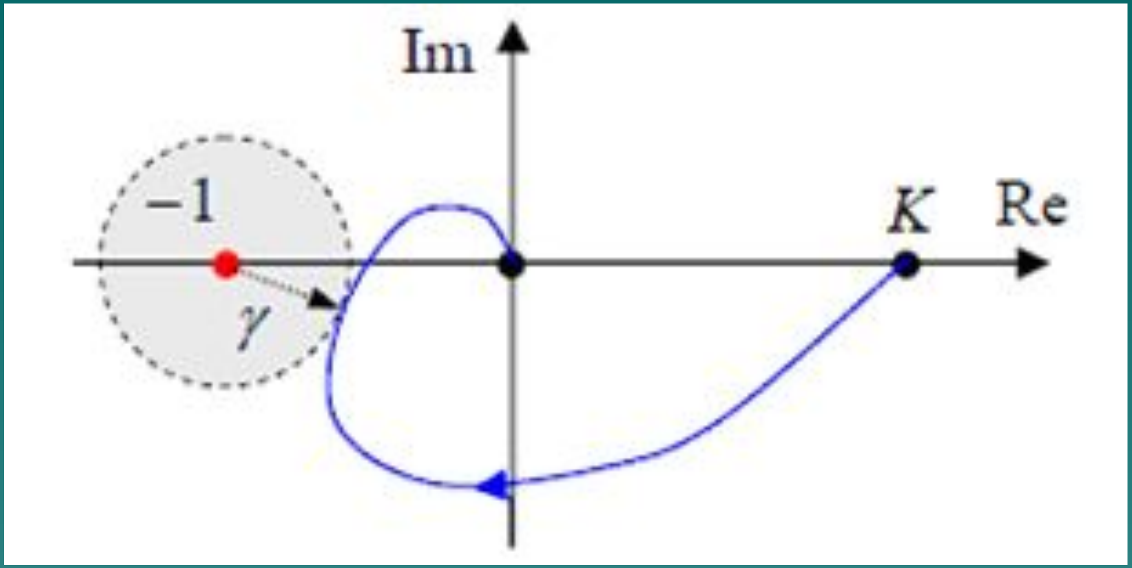
g_m – это дополнительное усиление контура, которое необходимо, чтобы вывести систему на границу области устойчивости. Эта величина измеряется в децибелах

$$g_m = 20\lg(1/A_g)$$

где фазовая характеристика равна −180° . В практических задачах нужно обеспечивать запас по амплитуде не менее 6 дБ.

Запас устойчивости по фазе

это дополнительный сдвиг фазы который необходим для того, чтобы вывести систему на границу устойчивости. Он определяется на *частоте среза*. Запас по фазе должен быть не менее 30° .


Im
Re
−1
K
γ

Показатели, определяемые по виду переходной характеристики.

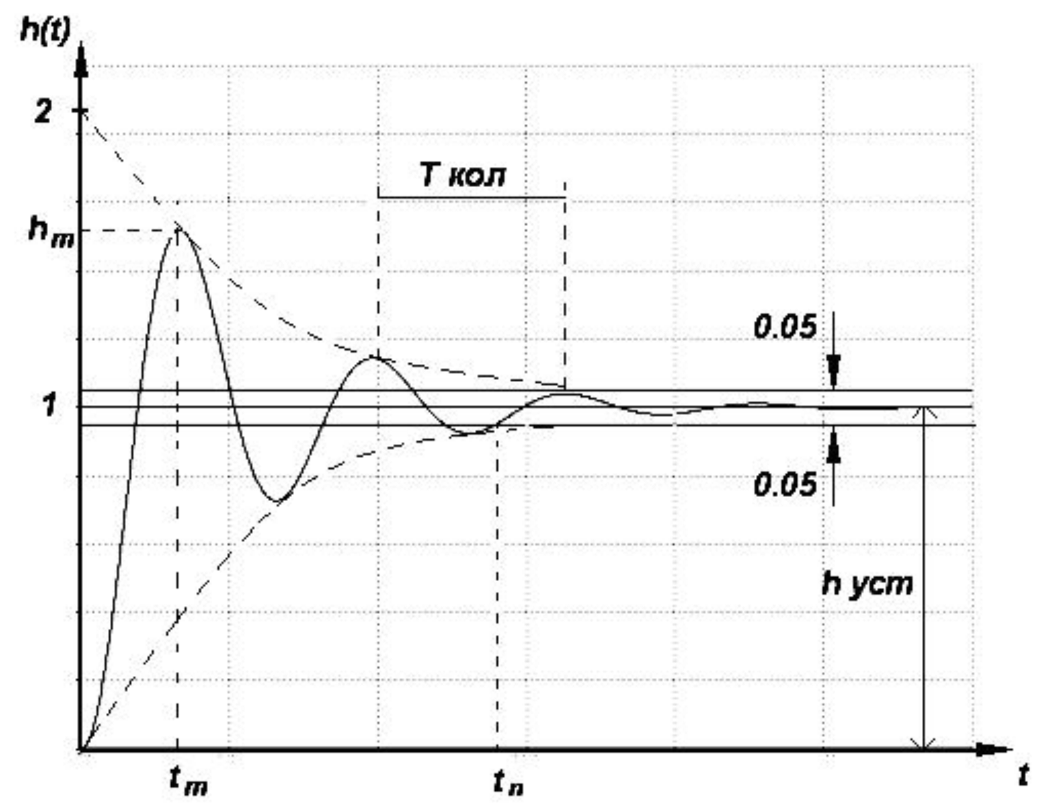


Рис. 2.28. Показатели качества, определяемые по виду переходной характеристики.

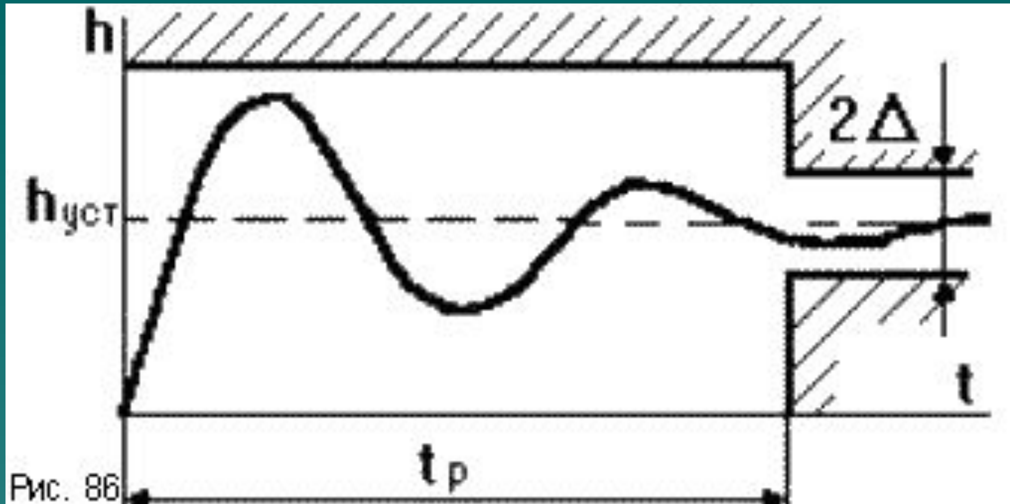
$$\sigma = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%$$

$$t_{п} \cong r \cdot \frac{2\pi}{\omega_m}$$

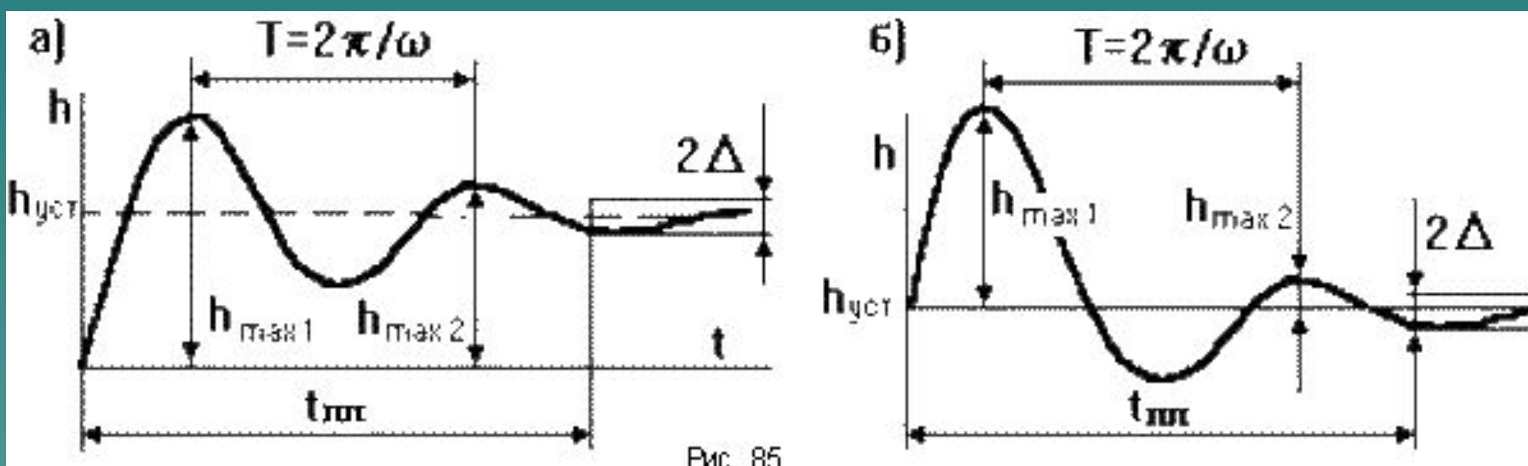
$$\kappa = \frac{\left| h_{max\,1} - h_{уст} \right|}{\left| h_{max\,2} - h_{уст} \right|}$$

tп – это момент времени, когда переходная характеристика входит в трубку 5% и больше из нее не выходит

$$\left| h(t) - h_{уст} \right| \le \Delta, \qquad \Delta = 0{,}05 h_{уст}$$



Статическая ошибка



$$e_{уст} = y_0 - y_{уст} = -h_{уст}$$

Показатели качества, определяемые по виду амплитудно – частотной характеристики системы в замкнутом состоянии

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}.$$

$$W_з(j\omega) = W(p)\Big|_{s=j\omega} = A_з(\omega)\cdot exp(j\varphi_{з(\omega)}).$$

$$A_з(\omega) = \left|W_з(p)\right|_{p=j\omega} = \left|\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}\right|$$

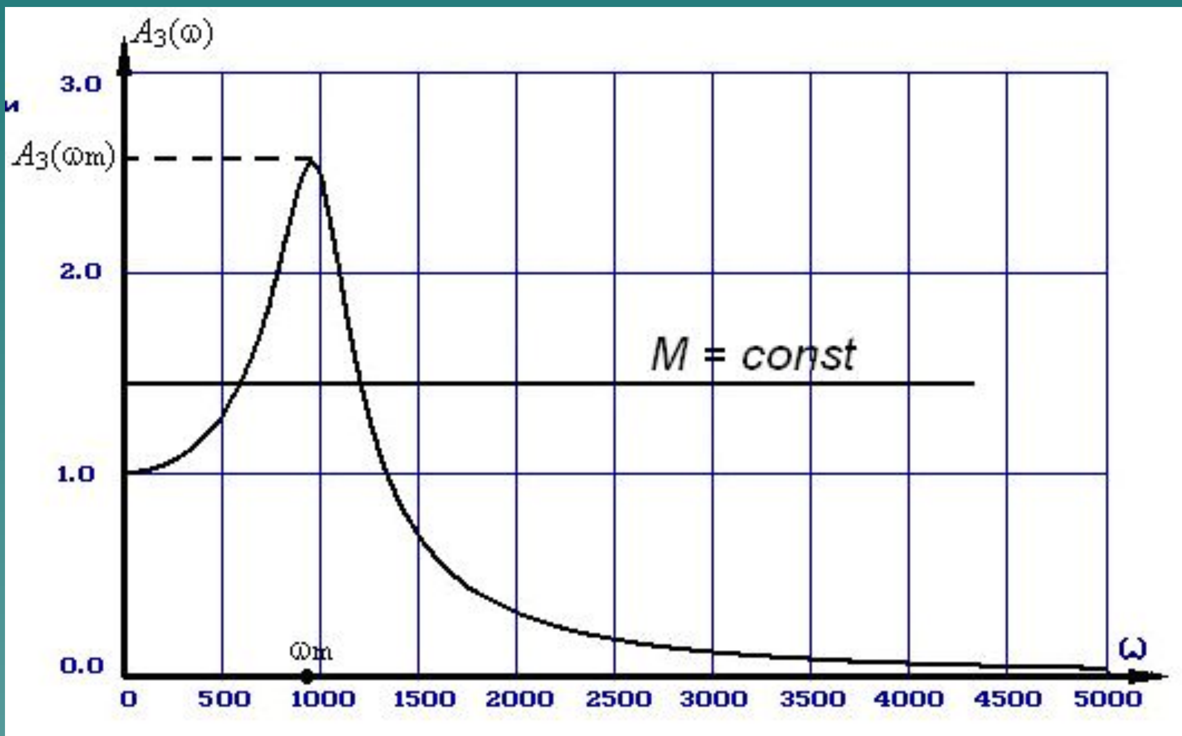


Рис. 2.29. АЧХ системы в замкнутом состоянии

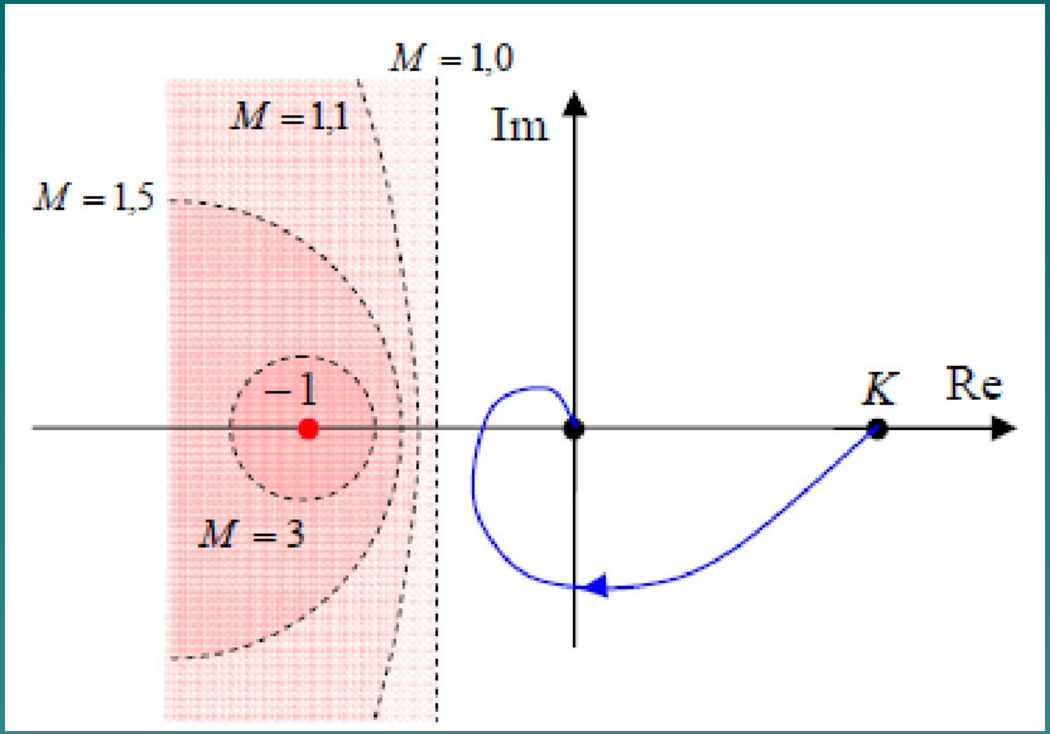
$$M = \frac{max A_з(\omega)}{A_з(0)},$$

$$M \cong max A_з(\omega) = A_з(\omega_m).$$

$$T_{кол} \cong \frac{2\pi}{\omega_m}$$

$$t_п \cong r\cdot\frac{2\pi}{\omega_m}$$

	σ	M	r
Слабоколебательная система	<15%	<1,2	<1
Среднеколебательная система	$15 \div 30\%$	$1,2 \div 1,7$	$1 \div 2$
Сильноколебательная система	$30 \div 50\%$	$1,7 \div 2,5$	$3 \div 4$

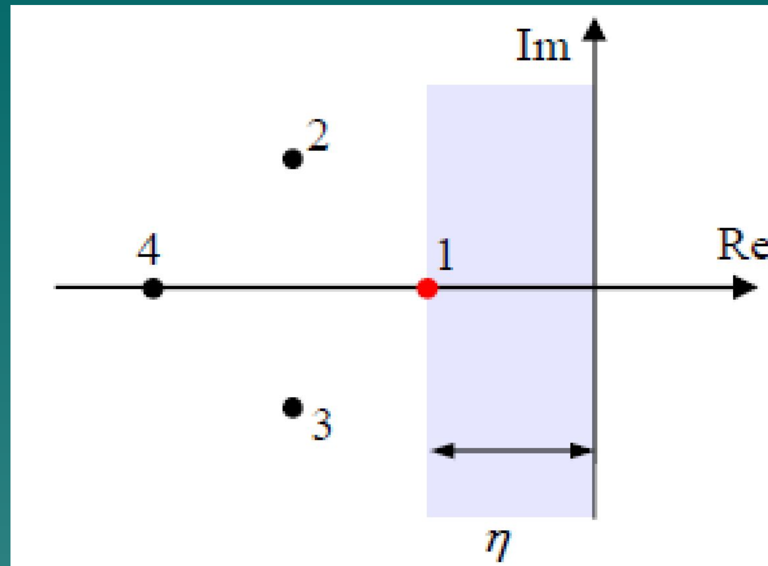


Для каждого значения *M* можно нарисовать «запретную области», в которую не должна заходить частотная характеристика *разомкнутой системы*, если ее показатель колебательности должен быть меньше *M*.

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}$$

$$\left(-\frac{M^2}{M^2 - 1} ; 0 \right)$$

Корневые оценки качества



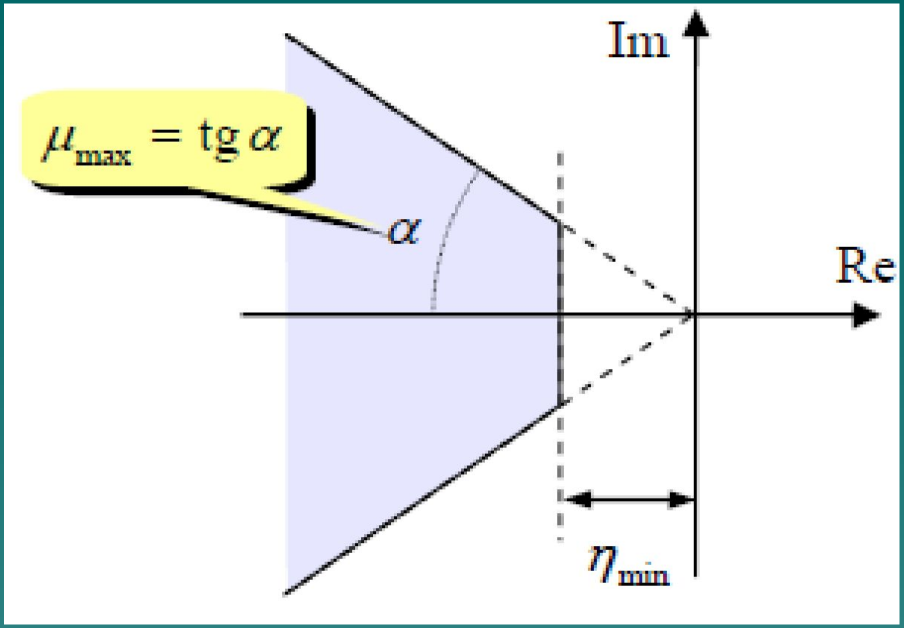
Быстродействие системы определяется **степенью устойчивости** η – так называется расстояние мнимой оси до ближайшего корня

$$t_п = \frac{3}{\eta}$$

- время переходного процесса

$$\mu = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

Параметр, определяющий скорость затухания колебаний в системе, называется колебательностью.



Линии постоянной колебательности – это лучи, выходящие из начала координат. При проектировании систем обычно требуется обеспечить быстродействие не ниже заданного и колебательность не выше заданной.