ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ
Поняття «випадкової величини»

Визначення:

1) **Випадковою величиною** називається змінна величина, яка в залежності від результату випробування випадково приймає одне значення з безлічі можливих значень.
2) Випадкова величина, яка приймає різні значення, які можна записати у вигляді кінцевої або нескінченної послідовності, називається **дискретною випадковою величиною**.
3) Випадкова величина, яка може приймати всі значення з деякого числового проміжку, називається **безперервною випадковою величиною**.
4) Під сумою (добутком) випадкових величин X і $У$ розуміють випадкову величину $Z = X + У$ ($Z = XУ$), можливі значення якої складаються з сум (добутків) кожного можливого значення величини X і кожного можливого значення величини $У$.

X: x_1, x_2 Y: y_1, y_2 $Z = X + У$ Z: $x_1+y_1, x_1+y_2, x_2+y_1, x_2+y_2$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	. . .	p_{n-1}	p_n

$$\boxed{p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1}$$

ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Математичне очікування дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	. . .	p_{n-1}	p_n

Визначення:

1) **Математичним очікуванням** *M*(*X*) випадкової величини *X* називається сума добутків всіх можливих значень величини X на відповідні ймовірності: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

Теорема:

Математичне очікування дискретної випадкової величини *X* приблизно дорівнює середньому арифметичному всіх її значень (при досить великій кількості випробувань) $\bar{x}_{cp} \approx M(X)$

Властивості математичного очікування дискретної випадкової величини

1) $M(C) = C \cdot 1 = C$
2) $M(CX) = CM(X)$
3) $M(X+У) = M(X) + M(У)$
4) $M(X-У) = M(X) - M(У)$
5) $M(X \cdot У) = M(X) \cdot M(У)$

Дисперсія дискретної випадкової величини

X	−2	0	2
P	0,4	0,2	0,4

У	−100	0	100
P	0,3	0,4	0,3

$M(X) = -2 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 = 0,0;$

$M(У) = -100 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 + 100 \cdot 0,3 = 0,0.$

Незважаючи на те що МО величин *X* і *У* однакові проте можливі значення величин *X* і *У* «розкідані» або «розсіяні» близько своїх МО по різному: можливі значення величини *X* розташовані набагато ближче до свого МО, ніж значення величини *У*.

Дисперсія дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	. . .	p_{n-1}	p_n

Визначення:

1) **Відхиленням випадкової величини** *X* від її МО *M*(*X*) (або просто відхиленням випадкової величини X) називається випадкова величина [*X* - *M*(*X*)].

Видно, що для того, щоб відхилення випадкової величини X прийняло значення $x_1 - M(X)$ достатньо, щоб випадкова величина X прийняла значення x_1.

X− M(X)	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	. . .	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	. . .	p_n

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0$$

Теорема:

Математичне очікування відхилення випадкової величини від власного математичного очікування дорівнює нулю.

Дисперсія дискретної випадкової величини

$[X-M(X)]^2$	$[x_1-M(X)]^2$	$[x_2-M(X)]^2$	. . .	$[x_n-M(X)]^2$
P	p_1	p_2	. . .	p_n

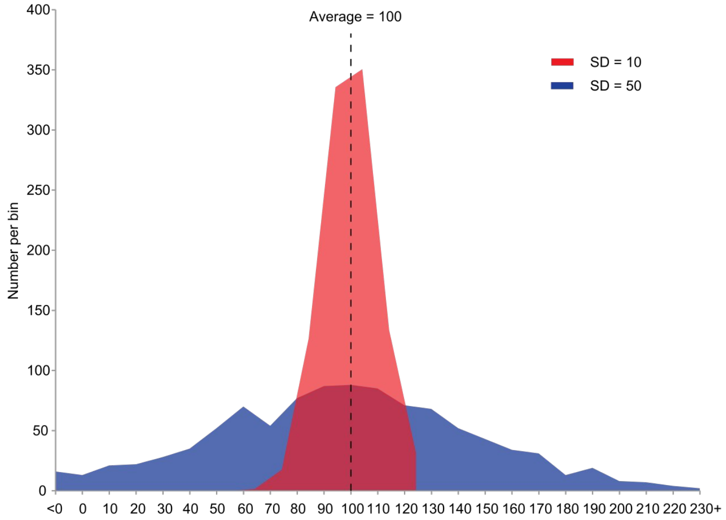
Визначення:

1) **Дисперсією** $D(X)$ випадкової величини X називається МО квадрата відхилення випадкової величини X від її МО:

$$D(X)=M\left\{\left[X-M(X)\right]^2\right\}$$

$$D(X)=\left[x_1-M(X)\right]^2 p_1+\left[x_2-M(X)\right]^2 p_2+\cdots+\left[x_n-M(X)\right]^2 p_n$$

Дисперсія є мірою розсіяння значень випадкової величини відносно середнього значення розподілу. Більші значення дисперсії свідчать про більші відхилення значень випадкової величини від центру розподілу.



← Приклад двох сукупностей із однаковим середнім значенням але різною дисперсією. Червоним позначено вибірку із середнім 100 і дисперсією 100, а синім показано вибірку із середнім 100 і дисперсією 2500.

Властивості дисперсії дискретної випадкової величини

1) $\boxed{D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)}$

$$D(X)=M\left[\left(X-M(X)\right)^2\right]=M\left[X^2-2XM(X)+M^2(X)\right]=M\left(X^2\right)-2M(X)M(X)+M^2(X)=$$
$$=M\left(X^2\right)-2M^2(X)+M^2(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$$

2) $\boxed{D(C)=M\left(C^2\right)-M^2(C)=C^2-C^2=0}$

3) $\boxed{D(CX)=C^2D(X)}$

$$D(CX)=M\left(C^2X^2\right)-M^2(CX)=C^2M\left(X^2\right)-C^2M^2(X)=C^2\left[M\left(X^2\right)-M^2(X)\right]=C^2D(X)$$

4) $\boxed{D(X+Y)=D(X)+D(Y)}$

$$D(X+Y)=M\left[(X+Y)^2\right]-M^2(X+Y)=M\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\left[M(X)+M(Y)\right]^2=$$
$$M\left(X^2\right)+2M(X)M(Y)+M\left(Y^2\right)-M^2(X)-2M(X)M(Y)-M^2(Y)=$$
$$=\left[M\left(X^2\right)-M^2(X)\right]+\left[M\left(Y^2\right)-M^2(Y)\right]=D(X)+D(Y)$$

5) $\boxed{D(X-Y)=D(X)+D(Y)}$

Середнє квадратичне відхилення

Середнє квадратичне відхилення — у теорії ймовірностей один із найпоширеніших показників розсіювання (розкиду) значень випадкової величини відносно її математичного сподівання, тобто центру розподілу.
Має ту ж розмірність, що і випадкова величина. В літературі для позначення стандартного відхилення використовується літера грецької абетки сигма σ:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

За визначенням середнє квадратичне відхилення є квадратним коренем із дисперсії. Як і дисперсія характеризує розсіяння значень навколо центру розподілу: більшому значенню стандартного відхилення відповідає більший їх розкид. Практична перевага середнє квадратичного відхилення як міри розсіяння в порівнянні з дисперсією полягає в тому, що його розмірність збігається з розмірністю випадкової величини, в той час як розмірність дисперсії — квадрат розмірності випадкової величини.

Іноді середнє квадратичне відхилення називають «стандартною похибкою»

ЗАДАЧА ПРО ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ (ДОСЛІДІВ)
Біноміальний розподіл

<u>Постановка задачі</u>: Нехай проводиться n випробувань, причому ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p і не залежить від результату інших випробувань (незалежні випробування). $q = 1 - p$.

Знайдемо ймовірність того, що при n випробуваннях подія A настане m раз.

$$\underbrace{A A \dots A}_{m \text{ раз}} \; \underbrace{\bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m \text{ раз}} \qquad P_n(m) = C_n^m \, p^m q^{n-m} \qquad \boxed{P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}}$$

$\leftarrow$ *Формула Бернуллі*

$$P_5(3) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{5!}{3!2!} 0,4^3 \, 0,6^2 = 0,2304 \qquad P_5(4) = \frac{5!}{4!1!} 0,4^4 \, 0,6^1 = 0,0768 \qquad P_5(5) = \frac{5!}{5!0!} 0,4^5 \, 0,6^0 = 0,01024$$

$$P = 0,2304 + 0,0768 + 0,01024 = 0,31744$$

Біноміальний розподіл

Знову розглянемо *n* незалежних випробувань, в кожному з яких настає подія *A* з ймовірністю *p*. Позначимо через *X* випадкову величину, рівну числу появ події *A* в *n* випробуваннях.

$$\boxed{P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}}$$

X	0	1	$\dots$	m	$\dots$	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$\dots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\dots$	p^n

↑ закон біноміального розподілу

↑

X_i	0	1
P_i	q	p

$$M(X_i) = 0q + 1p = p$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\boxed{M(X) = np}$$

X_i^2	0^2	1^2
P_i	q	p

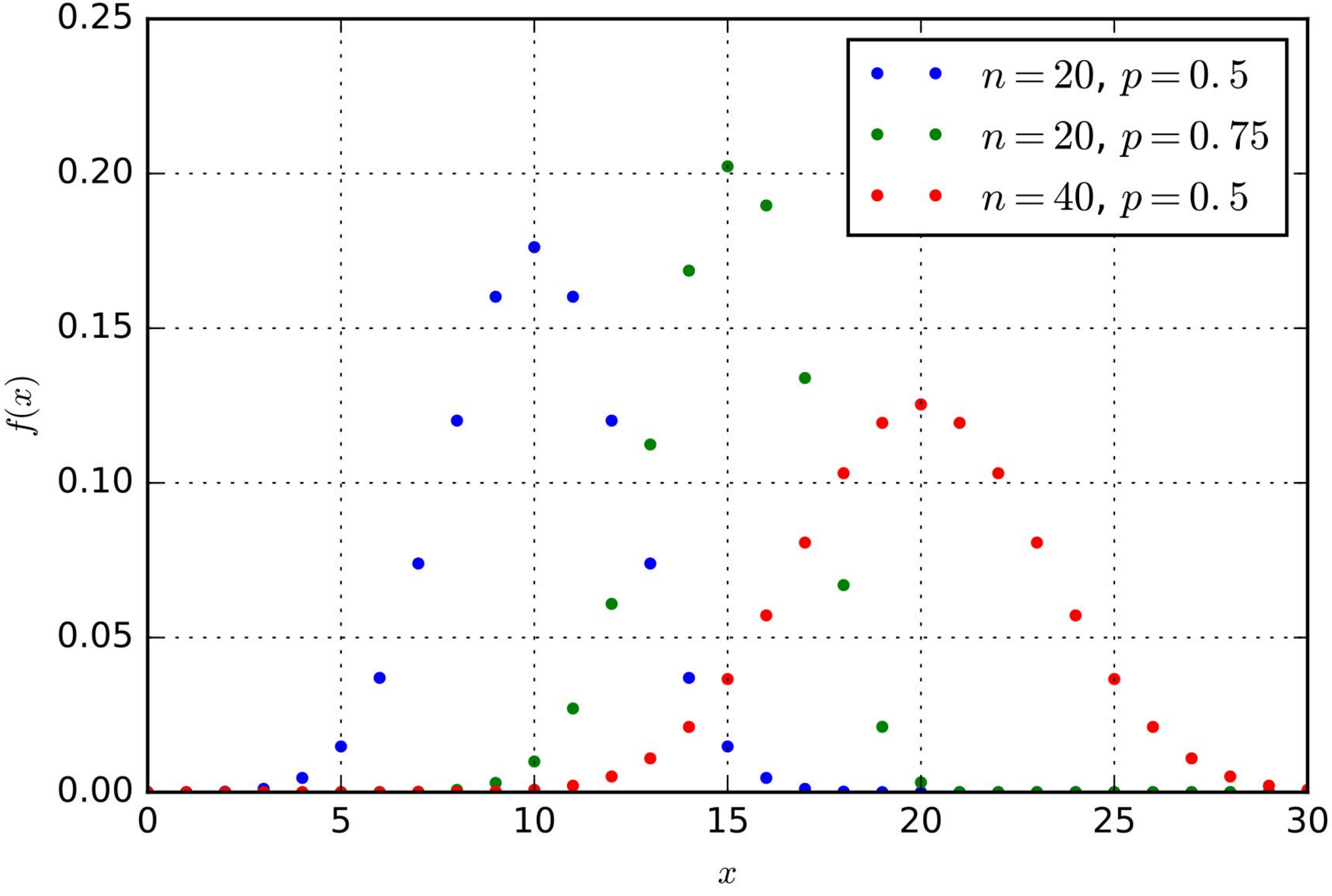
$$\boldsymbol{M}(X_i^2) = 0^2\boldsymbol{q} + 1^2\boldsymbol{p} = p$$

$$D(X_i)=M\left(X_i^2\right)-M^2(X_i)=p-p^2=p(1-p)=pq$$

$$\boxed{D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\dots+D(X_n)=npq}$$

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{npq}}$$

Біноміальний розподіл



Розподіл Пуассона

<u>Постановка задачі</u>: Нехай проводиться серія n незалежних випробувань (n = 1, 2, 3, ...), причому ймовірність появи цієї події A в цій серії $P(A) = p_n > 0$ залежить від її номера n і прагне до нуля при $n \to \infty$.

$$np_n = \mu = \text{const} \quad \to \quad p_n = \mu/n \qquad P_n(m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m}$$

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{m!\,n^m}\mu^m = \frac{\mu^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right] = \frac{\mu^m}{m!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right]^{-\mu}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-m}\right\} = e^{-\mu}\cdot 1 = e^{-\mu} \qquad \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$$

$$\boxed{P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}} \quad \leftarrow \text{формула Пуассона}$$

Розподіл Пуассона

<u>Визначення</u>:

1) Кажуть, що випадкова величина X визначена за законом Пуассона, якщо ця величина задана таблицею:

X	0	1	2	3	$\ldots$
P	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!}e^{-\mu}$	$\frac{\mu^3}{3!}e^{-\mu}$	$\ldots$

**Розподіл Пуассона є граничною формою біноміального розподілу.*

$$\boxed{M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\mu e^{-\mu}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\mu}}=\mu e^{-\mu}e^{\mu}=\mu}$$

X^2	0	1	4	9	$\ldots$
P	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!}e^{-\mu}$	$\frac{\mu^3}{3!}e^{-\mu}$	$\ldots$

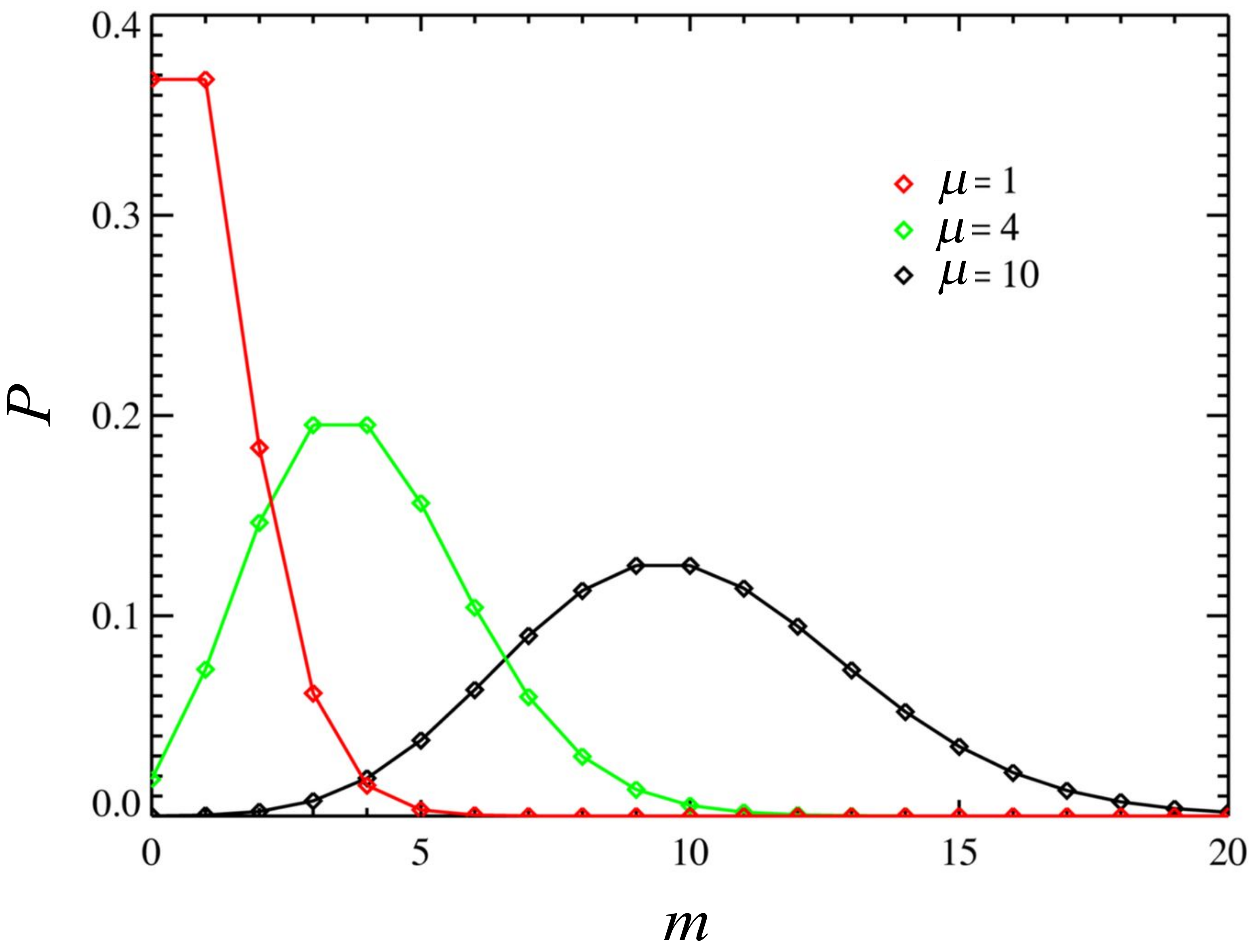
$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}=\mu e^{-\mu}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}\right]=$$

$$=\mu e^{-\mu}\left[\sum_{k=2}^{\infty} k-1\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}+e^{\mu}\right]=\mu e^{-\mu}\left[\mu\sum_{k=2}^{\infty} k-1\frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}+e^{\mu}\right]=\mu^2\left(e^{-\mu}e^{\mu}\right)+\mu\left(e^{-\mu}e^{\mu}\right)=\mu^2+\mu$$

$$\boxed{D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\mu^2+\mu-\mu^2=\mu}$$

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{\mu}}$$

Розподіл Пуассона



Розподіл Пуассона - розподіл дискретної випадкової величини, що представляє собою число подій, що сталися за фіксований час, за умови, що дані події відбуваються з деякою фіксованою середньою інтенсивністю і незалежно одна від одної.