13.3. Ряды с положительными членами

Рассмотрим ряды с неотрицательными членами. Основное свойство таких рядов заключается в том, что

Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является неубывающей.

ТЕОРЕМА 1.
(необходимое и достаточное условие сходимости ряда)

Для того, чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

ТЕОРЕМА 2. (признак сравнения)

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1) \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2)$$

причем $u_n \leq v_n$

Тогда

1. ***Если сходится второй ряд, то сходится и первый;***
2. ***Если расходится первый ряд, то расходится и второй.***

Доказательство:

1

Пусть частичные суммы рядов (1) и (2) равны, соответственно, s_n и S_n

По условию ряд (2) сходится, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$S_n \le S$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм s_n

Эта последовательность является возрастающей, т. к. с ростом n увеличивается сумма положительных слагаемых.

Эта последовательность является также ограниченной, т.к. $s_n \leq S_n \leq S$

Поэтому на основании признака существования предела эта последовательность имеет предел и ряд (1) – сходится.

2

От противного:

Предположим, что ряд (2) сходится, следовательно будет сходиться и ряд (1), что противоречит условию теоремы.

Следовательно, ряд (2) – расходится.

Замечание:

Так как сходимость ряда не меняется при отбрасывании конечного числа членов ряда, то условие сравнения не обязательно должно выполняться с первых членов рядов. Достаточно, чтобы оно выполнялось, начиная с некоторого номера k.

Примеры

1

Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^{2}}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}+\ldots$$

Решение

Сравним этот ряд с геометрическим рядом

$$a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \ldots + a\cdot q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$$

При

$$a = 1, \quad q = \frac{1}{3} < 1$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots$$ **- ряд сходится.**

$$\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} < \frac{1}{3^{n-1}}$$

Т.к. члены заданного ряда, начиная со второго, меньше членов геометрического сходящегося ряда, то заданный ряд сходится.

2

Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}+\ldots$$

Решение

Сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}<\frac{1}{n}$$

Т.к. члены заданного ряда, начиная со второго, больше членов гармонического расходящегося ряда, то заданный ряд расходится.

Эталонные ряды, используемые для сравнения

1

Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$

сходится при $|q| < 1$

и расходится при $|q| \geq 1$

2

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

- расходится.

3

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

сходится при $\alpha > 1$

и расходится при $\alpha \leq 1$

ТЕОРЕМА 3. (предельный признак сравнения)

Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **и** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$$

то ряды одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство:

Так как $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$$

то по определению предела числовой последовательности для любого ε>0 существует такой номер N, что для всех n>N выполняется неравенство:

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|u_n-k\cdot v_n\right|<\varepsilon\cdot v_n$$

$$(k-\varepsilon)\cdot v_n < u_n < (k+\varepsilon)\cdot v_n$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **сходится, то ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)\cdot v_n$

тоже сходится, и в силу признака сравнения будет сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Аналогично, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится, то ряд**

$\sum_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)\cdot v_n$ **тоже сходится, и**

будет сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Пример

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{n^3}$$

Решение:

Сравним этот ряд с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

поскольку при больших n

$$\frac{2n^2+5}{n^3}\approx\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2}=2$$

Так как гармонический ряд – расходящийся, то и заданный ряд тоже расходится.

ТЕОРЕМА 4. (признак Даламбера)

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **с положительными членами существует конечный предел отношения его (n+1) –го члена к n – му:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

Если l <1 – ряд сходится; если l >1 – ряд расходится; если l=1 – вопрос о сходимости остается нерешенным.

Доказательство:

По определению предела числовой последовательности для любого ε>0 существует такой номер N, что для всех n>N выполняется неравенство:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$$

1

Пусть *l*<1. Выберем ε таким малым, что число q=*l*+ε<1, т.е.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \qquad \text{или} \qquad u_{n+1} < q \cdot u_n$$

Это неравенство будет выполняться для всех n>N, т.е. для n=N+1, N+2…

$$u_{N+2} < q \cdot u_{N+1}$$

$$u_{N+3} < q \cdot u_{N+2} < q^2 \cdot u_{N+1}$$

$$u_{N+k} < q \cdot u_{N+k+1} < q^{k-1} \cdot u_{N+1}$$

Получили, что члены ряда

$$u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots + u_{N+k} + \ldots$$

меньше членов геометрического ряда

$$q \cdot u_{N+1} + q^2 \cdot u_{N+1} + \ldots + q^{k-1} \cdot u_{N+1} + \ldots$$

который сходится при q<1.
Следовательно, этот ряд сходится и заданный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **тоже сходится, т.к. он отличается от рассматриваемого на первые (n+1) членов.**

2

Пусть l>1. Выберем ε таким малым, что число l-ε>1, т.е.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon \quad \textbf{или} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Значит члены ряда будут возрастать, начиная с номера N+1, поэтому предел общего члена не может быть равен нулю и не выполняется необходимый признак сходимости.

Ряд расходится.

Примеры

1

Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

Решение:

$$u_n = \frac{n}{2^n} \qquad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ряд сходится.

2

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^3}$$

Решение:

$$u_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^3} \qquad u_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n \cdot n!} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot (n+1)}{(n+1)^3} = \infty > 1$$

Ряд расходится.

ТЕОРЕМА 5.
(интегральный признак сходимости)

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **члены которого положительны и не возрастают, т.е.**

$$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$$

а функция f(x), определенная при $x \geq 1$ **непрерывна и не возрастает, и**

$$f(1) = u_1 \quad f(2) = u_2 \ldots f(n) = u_n \ldots$$

Тогда для сходимости ряда необходимо, чтобы сходился несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Доказательство:

Рассмотрим ряд

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \ldots \qquad \boxed{1}$$

Его n-частичной суммой будет

$$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Сходимость этого ряда означает, что существует предел последовательности его частичных сумм, т.е. сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$

т.к.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx$$

Т.к. функция *f(x)* – монотонна на любом отрезке [n,n+1]

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

или

$$u_n \geq f(x) \geq u_{n+1}$$

$$\int_n^{n+1} u_n dx \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} u_{n+1} dx$$

$$u_n \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq u_{n+1}$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **- сходится, то по признаку сравнения должен сходится и ряд (1). Следовательно несобственный интеграл**

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

тоже будет сходящимся, и наоборот.

Пример

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Решение:

Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$

При x>0 эта функция положительна и не возрастающая.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx =$$

Если $\alpha = 1$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln|x|\Big|_1^{b} = \lim_{b\to\infty} \ln|b| = \infty$$

Т.е. интеграл и ряд расходятся.

Если $\alpha \neq 1$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 - \textit{сходится} \\ \infty, & \alpha > 1 - \textit{расходится} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 6. (признак Коши)

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **члены которого положительны. Если существует предел**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$$

то L <1 – ряд сходится; если L >1 – ряд расходится.

Доказательство:

По определению предела числовой последовательности для любого ε>0 существует такой номер N, что для всех n>N выполняется неравенство:

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - L\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < L + \varepsilon$$

1 **Пусть L<1.**

Выберем ε таким малым, что число $q=L+\varepsilon<1$, т.е. все члены исходного ряда будут меньше соответствующих степеней бесконечной сходящейся геометрической прогрессии и по признаку сравнения ряд будет сходиться.

2

Пусть $L>1$.

Выберем ε таким малым, что число $L-\varepsilon>1$, т.е. предел общего члена не может быть равен нулю и не выполняется необходимый признак сходимости.

Ряд расходится.

Пример

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{c_n}\right)^n$$

где

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{c_n}\right) = \frac{b}{c}$$

При $b < c$ **ряд сходится.**

При $b > c$ **ряд расходится.**