Алгебра и начала математического анализа

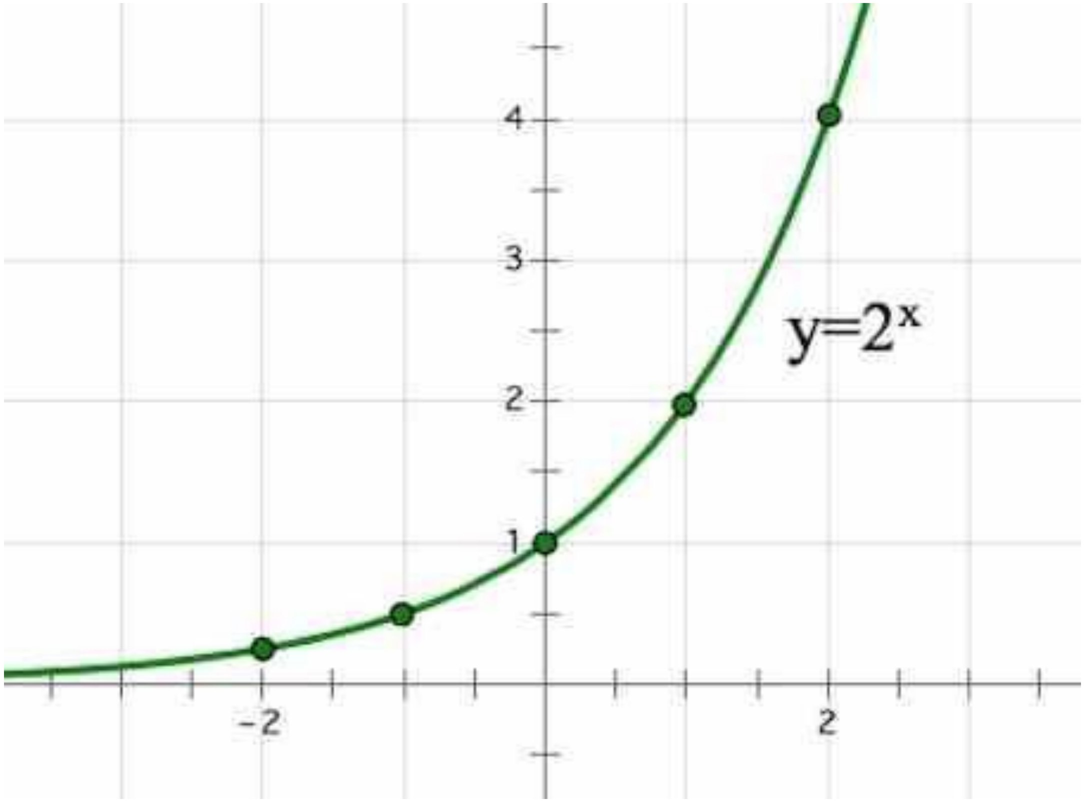
11 класс

Дифференцирование показательной и логарифмической функции

Число e. Функция $y = e^x$, её свойства, график, дифференцирование

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$, где а > 1.
Построим для различных оснований ***a*** графики:

1. $y = 2^x$



2. $y = 3^x$ (1 вариант)

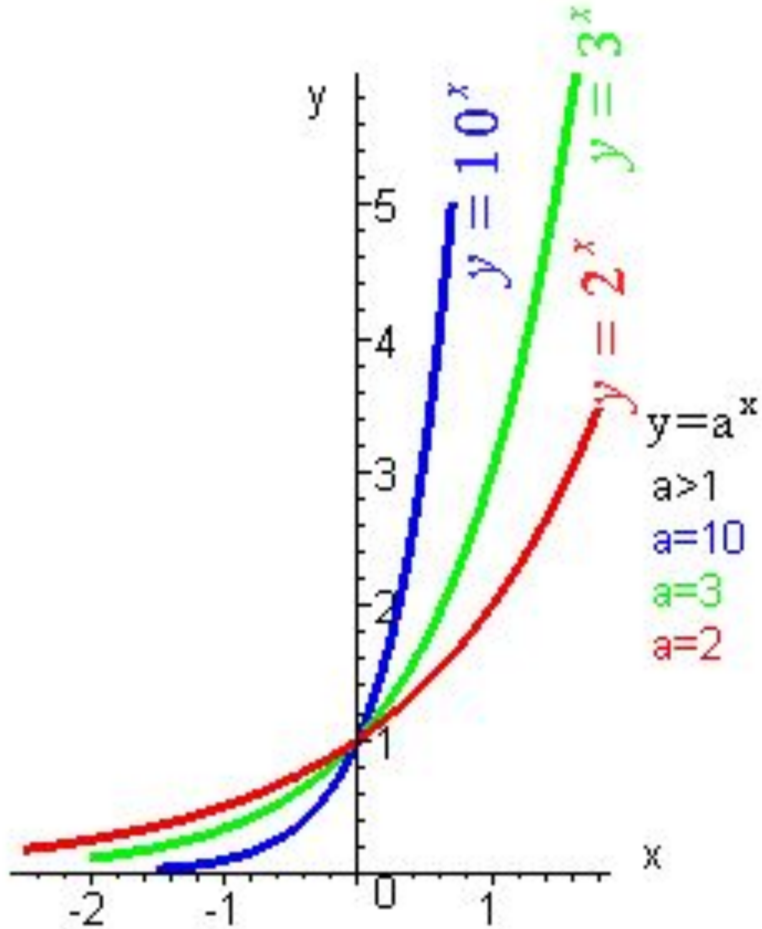
3. $y = 10^x$ (2 вариант)

1)Все графики проходят через точку (0 ; 1);

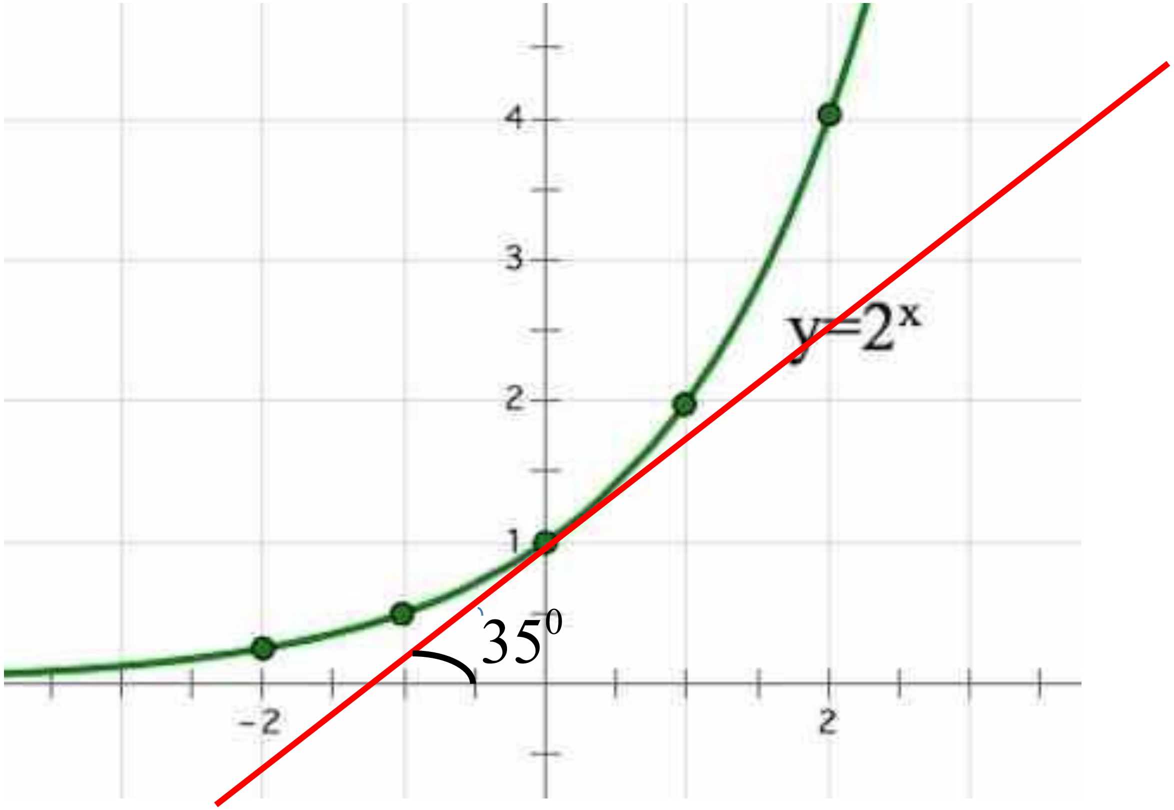
2) Все графики имеют горизонтальную асимптоту *y = 0* при *x* □ ∞;

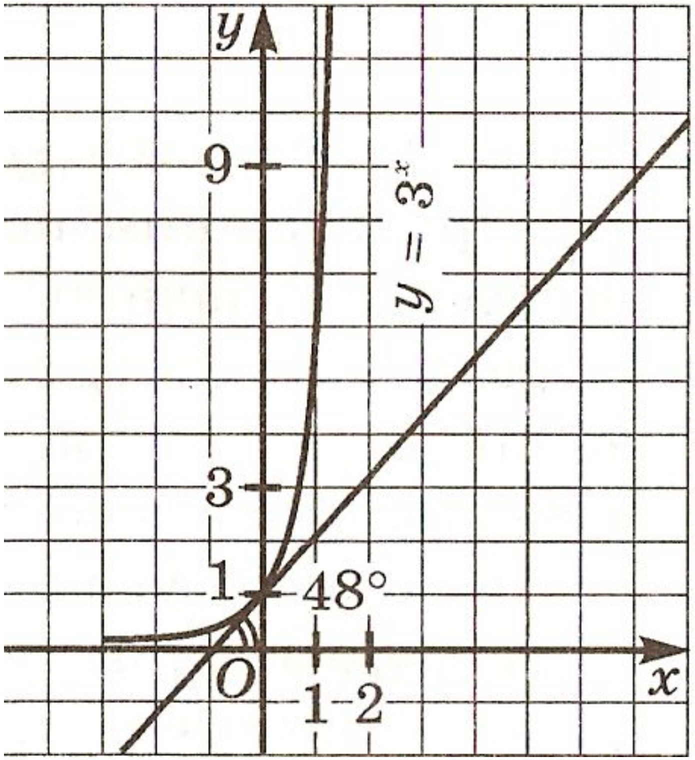
3) Все они обращены выпуклостью вниз;

4) Все они имеют касательные во всех своих точках.

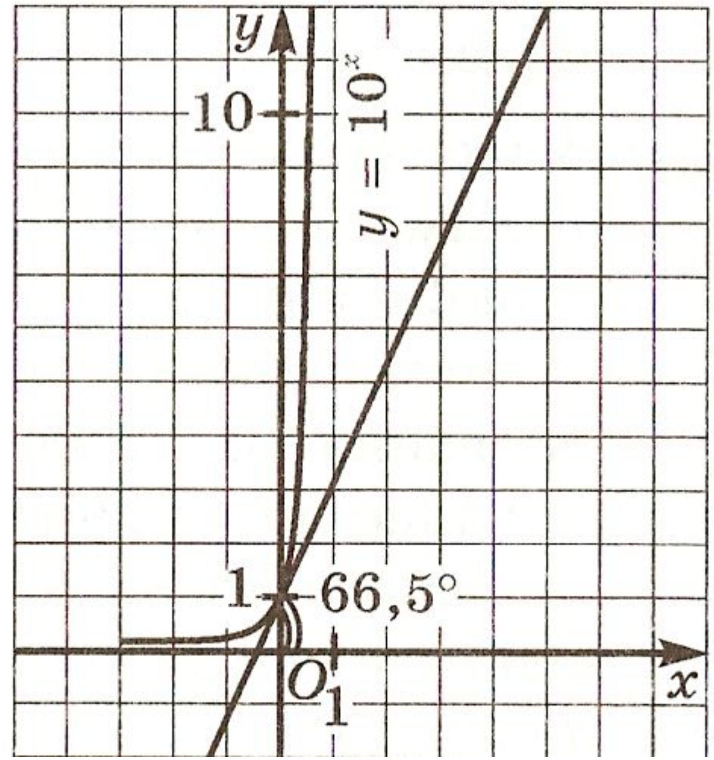


Проведем касательную к графику функции $y = 2^x$
в точке $x = 0$ и измерим угол , который образует касательная с осью x





y
9
3
1
48°
O
1
2
x
y = 3^x



y
10
1
66,5°
O
1
x
y = 10^x

С помощью точных построений касательных к графикам можно заметить, что если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно увеличивается основание от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно увеличивается от 35’ до 66,5’.

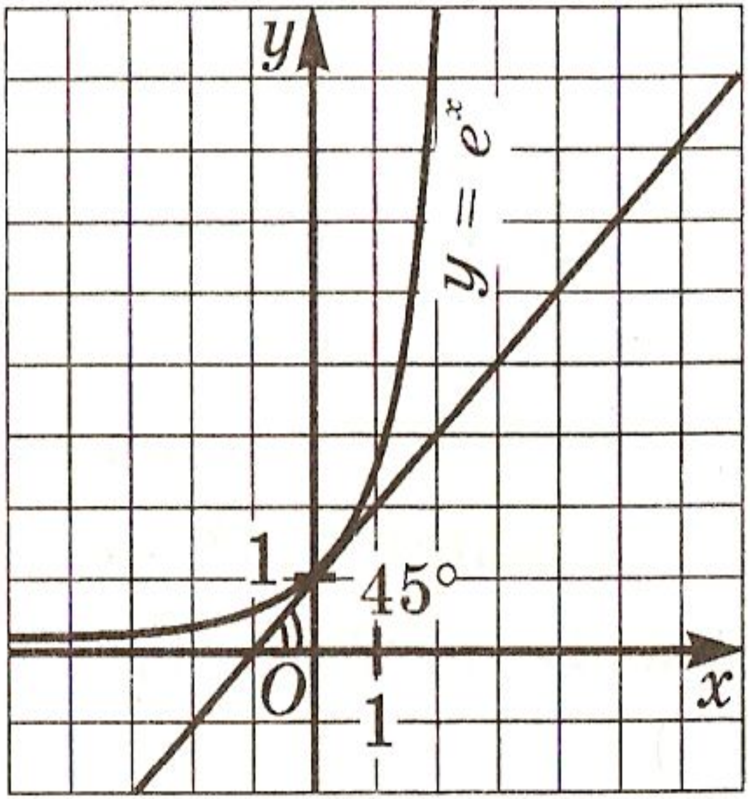
Следовательно существует основание a, для которого соответствующий угол равен 45’. И это значение a заключено между 2 и 3, т.к. при $a = 2$ угол равен 35’, при $a = 3$ он равен 48’.

В курсе математического анализа доказано, что данное основание существует, его принято обозначать буквой ***e*.**

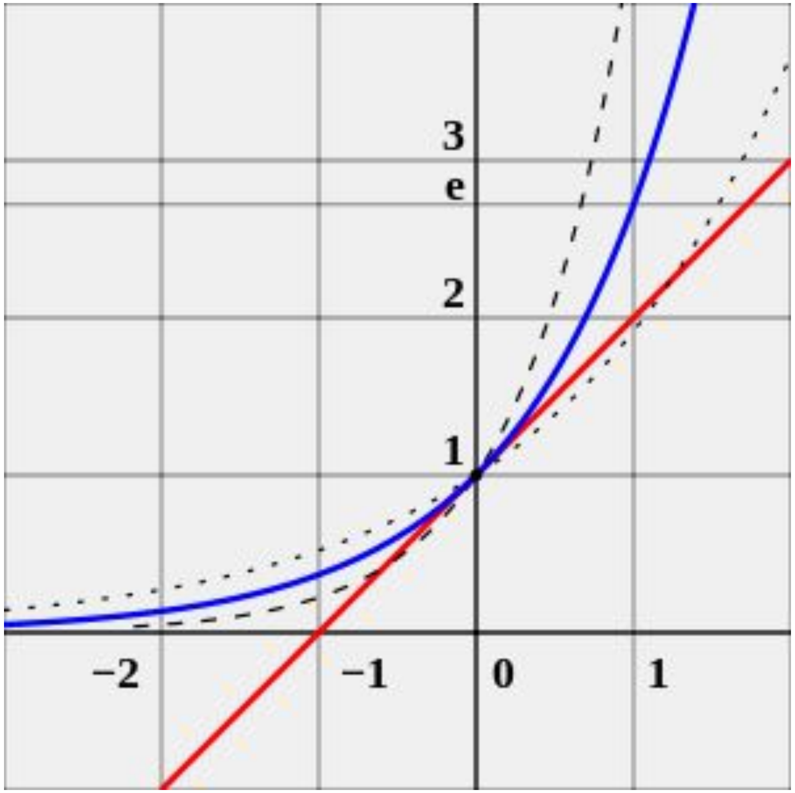
Установлено, что ***e*** **–** иррациональное число, т. е. представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь:

$$\boldsymbol{e = 2,\ 7182818284590\ldots}\ ;$$

На практике обычно полагают, что ***e*** **≈ 2,7.**

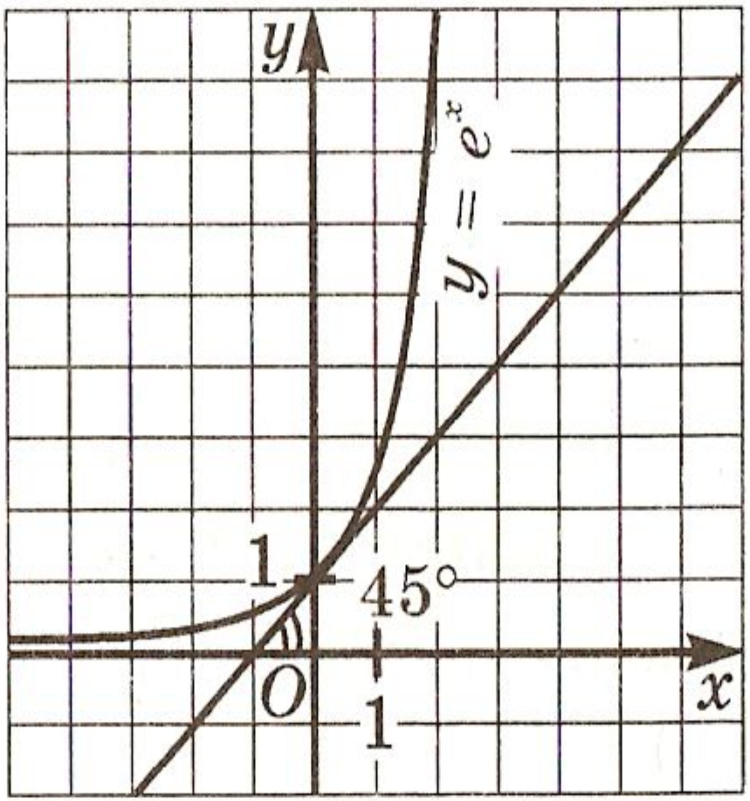


y
$y = e^x$
1
45°
O
1
x



3
e
2
1
−2
−1
0
1

График и свойства функции $y = e^x$:



1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз;
9) дифференцируема.

Функцию $y = e^x$ называют **экспонентой**.

В курсе математического анализа доказано, что функция $y = e^x$ имеет производную в любой точке x:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{5x})' = 5e^{5x}$$

$$(e^{x-3})' = e^{x-3}$$

$$(e^{-4x+1})' = -4e^{-4x-1}$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y = e^{x}$ в точке x=1.

Решение: $$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1) $x_0=1$

2) $f(x_0)=f(1)=e$

3) $f'(x) = e^{x}; \quad f'(x_0) = f'(1) = e.$

4) $y=e+e(x-1)$; $\quad y = ex$

Ответ: $y=ex$

Пример 2.

Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке $x = 3$.

Решение:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

$$y'(3) = (e^{4\cdot 3-12})' = 4e^{0} = 4$$

Ответ: 4

Пример 3.

Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 e^x$

Решение:

1) $y' = (x^2 e^x)' = \left(x^2\right)' e^2 + x^2 \left(e^x\right)' =$

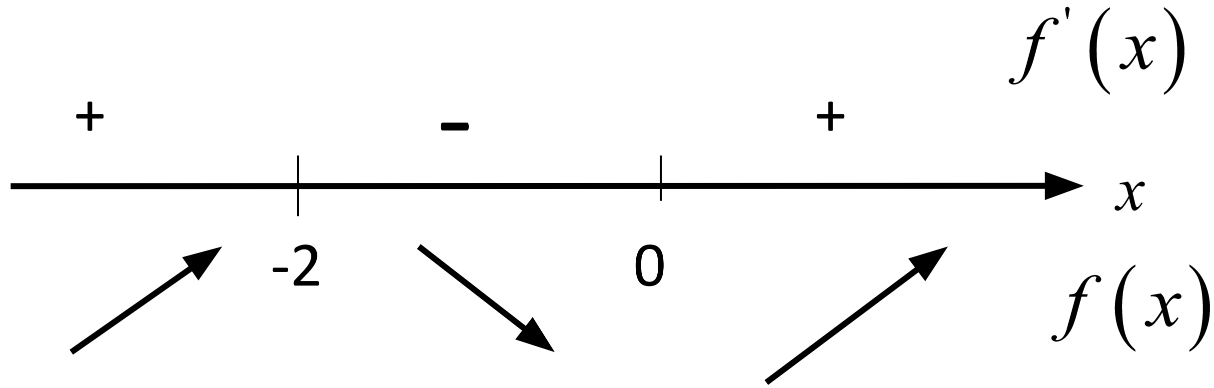
$= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x \left(x+2\right);$

2) $y' = 0;$ xe^x и $= x0$ $\left(\quad + 2\right) = 0;$

$xe^x \left(x+2\right) = 0;$

x=0 и x=-2

3) $y' = xe^{x}(x+2)$;



4) $x = -2$ – точка максимума

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$$

$x = 0$ – точка минимума

$$y_{\min} = (0)^2 e^{0} = 0$$

Ответ: $y_{\min} = 0$; $y_{\max} = \dfrac{4}{e^2}$.

Натуральные логарифмы. Функция $y = \ln x$, её свойства, график, дифференцирование

Если основанием логарифма служит число *e*, то говорят, что задан ***натуральный логарифм***. Для натуральных логарифмов введено специальное обозначение ***ln*** (l – логарифм, n – натуральный).

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log_e 2 = \ln 2$$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

$$\ln 1 = 0;$$

$$\ln e = 1;$$

$$\ln e^r = r;$$

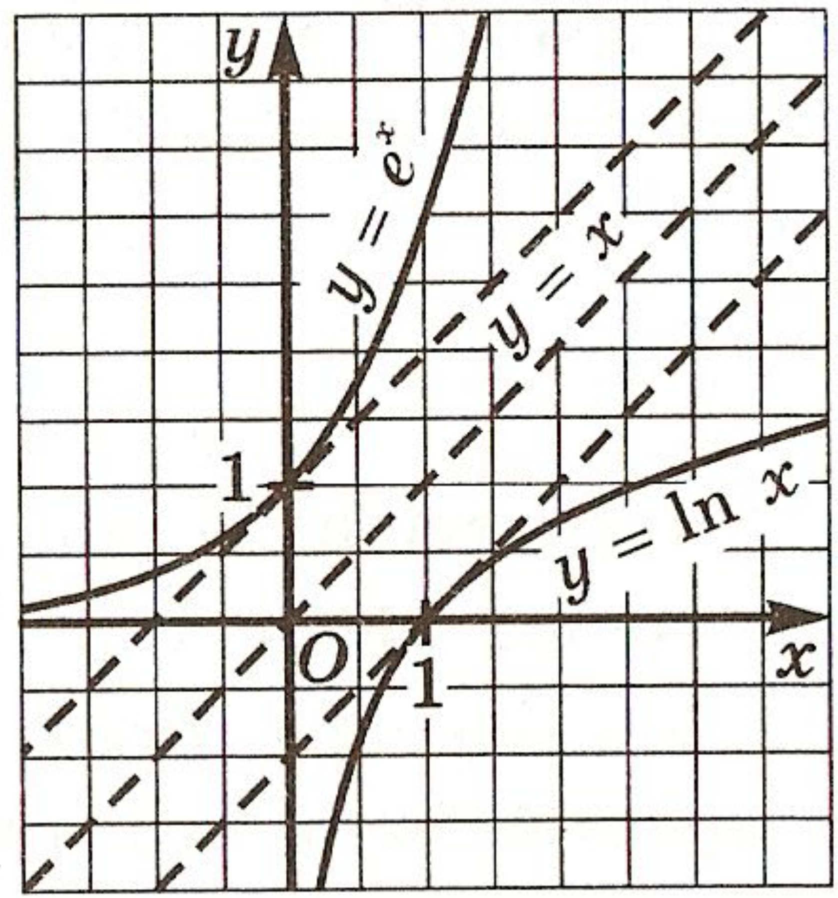
$$e^{\ln x} = x;$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

График и свойства функции y = ln x

Свойства функции y = *ln x:*

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена;
5) не имеет ни наибольшего, н наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла верх;
9) дифференцируема.



В курсе математического анализа доказано, что для любого значения $x>0$ справедлива формула дифференцирования

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

Пример 4:

Вычислить значение производной функции $y = \ln(3x+5)$ в точке x = -1.

Решение:

$$y' = \left(\ln(3x+5)\right)' = 3 \cdot \frac{1}{3x+5} = \frac{3}{3x+5};$$

$$f'(-1) = \frac{3}{3 \cdot (-1) + 5} = 1,5.$$

Ответ: 1,5

Дифференцирование функции $y = a^x$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например: $\left(2^x\right)' = 2^x \cdot \ln 2;$ $\left(4^{x+5}\right)' = 4^{x+5} \cdot \ln 4.$

$$\left(5^{-3x}\right)' = -3 \cdot 5^{-3x} \cdot \ln 5.$$

Дифференцирование функции $y = \log_a x$

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Интернет-ресурсы:

- http://egemaximum.ru/pokazatelnaya-funktsiya/
- http://or-gr2005.narod.ru/grafik/sod/gr-3.html
- http://ru.wikipedia.org/wiki/
- http://900igr.net/prezentatsii
- http://ppt4web.ru/algebra/proizvodnaja-pokazatelnojj-funkcii.html