Способы задания графов. Матрицы смежности и инцидентности для графа.

11

Графы G' и G'' называются **изоморфными**, если существует взаимно-однозначное соответствие между их ребрами и вершинами, причем соответствующие ребра соединяют соответствующие вершины.

можно так переобозначить

вершины первого графа, что в новых обозначениях вершины и ребра будут совпадать со вторым графом, причем кратным ребрам первого G'_8 должны соответствовать кратные ребра второго G''_8 такой же кратности (рис. 2.5).

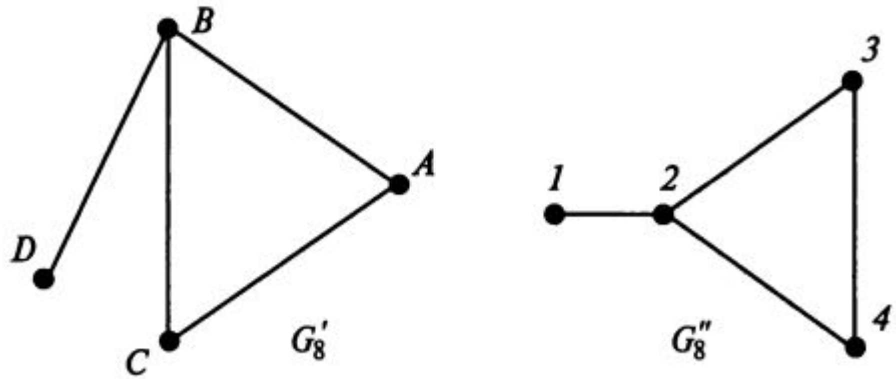


Рис. 2.5. Изоморфные графы

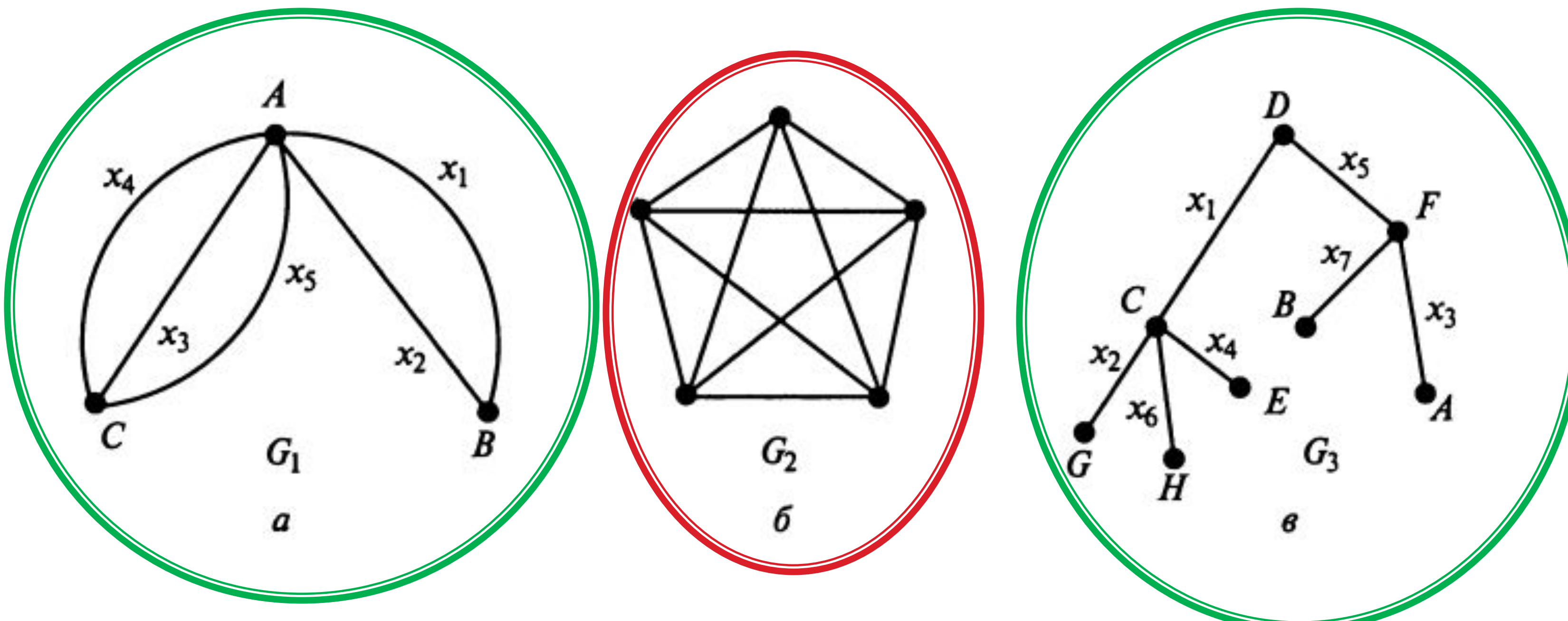
Пример

G_1 G_2

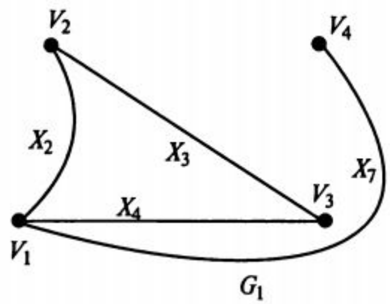
Данные графы не являются изоморфными, так как имеют разное количество вершин.

G_1 G_2

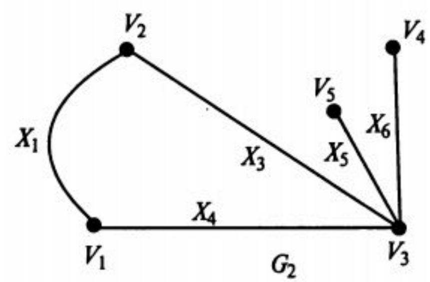
Граф G называется **планарным** (**плоским**), если существует изоморфный ему граф G', в изображении которого на плоскости ребра пересекаются только в вершинах. Иными словами, у планарного графа никакие два ребра не имеют общих точек, кроме общих вершин.



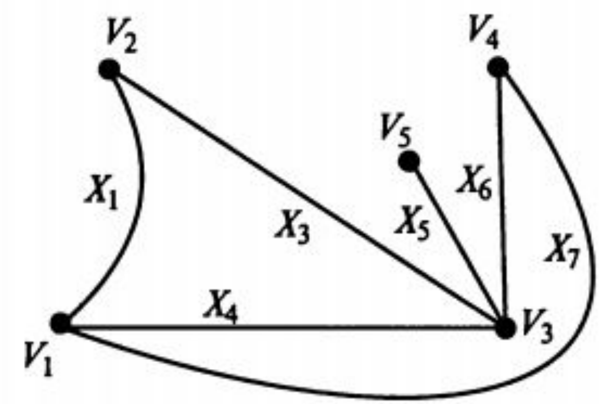
Объединением графов $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$ называется граф $G = G_1 \cup G_2$, множество вершин которого $V = V_1 \cup V_2$, а множество ребер $X = X_1 \cup X_2$.



а



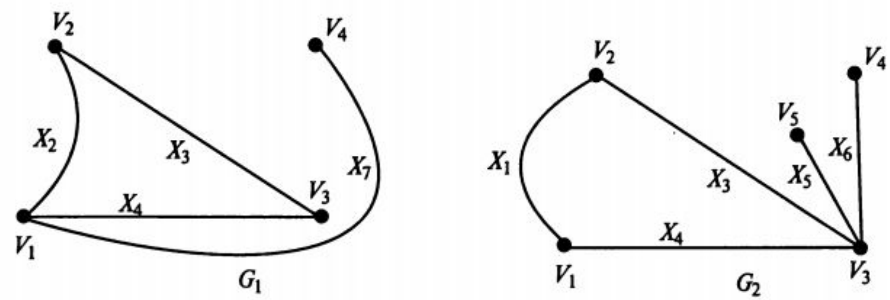
б



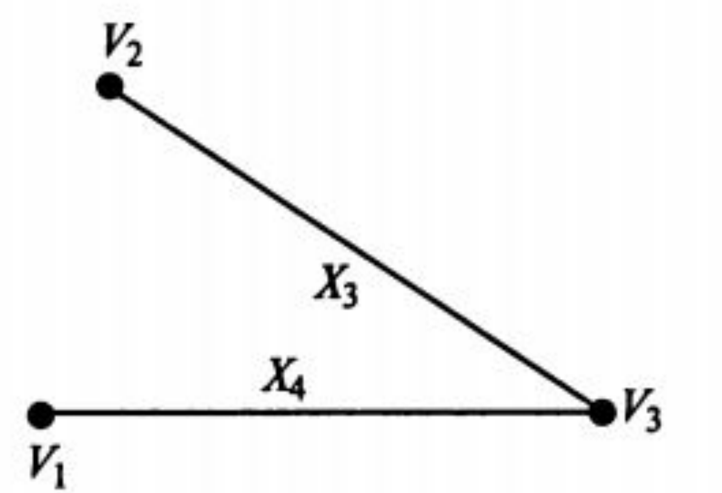
$G = G_1 \cup G_2$

в

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cap G_2$, для которого $X = X_1 \cap X_2$ — множество ребер, а $V = V_1 \cap V_2$ — множество вершин.

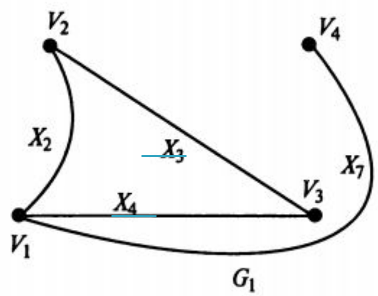


а *б*

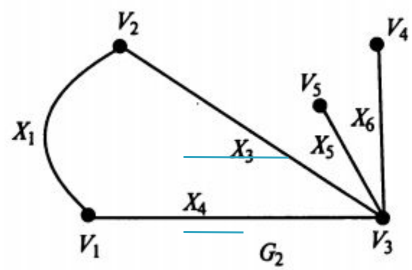


$G' = G_1 \cap G_2$

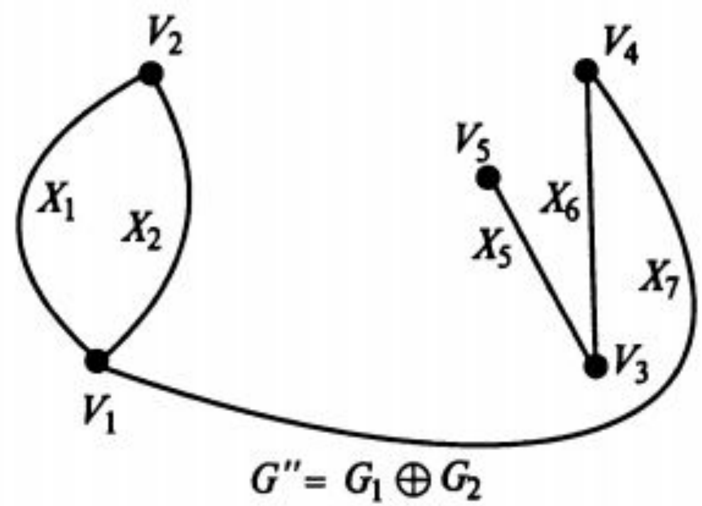
Кольцевой суммой двух графов называется граф $G = G_1 \oplus G_2$, порожденный множеством вершин $V = V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $(X_1 \cup X_2) \setminus (X_1 \cap X_2)$, т.е. множеством ребер, содержащихся либо в G_1, либо в G_2, но не в $G_1 \cap G_2$.



а



б



д

Подграфом графа $G = (V, X)$ называется граф $G_1 = (V_1, X_1)$, все вершины и ребра которого являются подмножествами множества вершин и ребер графа G. Обозначения такие же, как и для множеств: $G_1 \subset G$, если $V_1 \subset V$, $X_1 \subset X$.

Способы задания графа

Существуют различные способы задания графа: геометрический (рисунки, схемы, диаграммы), простое перечисление вершин и ребер, табличный. Человеку удобно работать с графом-рисунком, так как он может легко установить связь между вершинами в наглядном виде с помощью ребер, изображаемых непрерывными линиями. Такое геометрическое представление плоского графа называется его **реализацией**. Для машинной обработки удобнее задать граф в алгебраической форме — перечислением (списком) вершин или ребер.

Иногда граф задается **таблицей**, состоящей из n строк (вершины) и m столбцов (ребра). Главным во всех способах задания графа (диаграммой, матрицей, таблицей) является указание соответствия между множествами n вершин V_i и m ребер X_i.

Одним из самых распространенных способов задания графа является **матричный способ**. Пусть дан граф $G(V, X)$, где $V = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ — вершины, а $X = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$ — ребра графа.

Назовем **матрицей инцидентности** таблицу B, состоящую из n строк (вершины) и m столбцов (ребра), в которой:

- для неориентированного графа:

$b_{ij} = 1$, если вершина V_i инцидентна ребру X_j;
$b_{ij} = 0$, если вершина V_i не инцидентна ребру X_j;

- для ориентированного графа:

$b_{ij} = 1$, если вершина V_i является началом дуги X_j;
$b_{ij} = 0$, если вершина V_i не инцидентна дуге X_j;
$b_{ij} = -1$, если вершина V_i является концом дуги X_j.

Очевидно, что в каждом столбце матрицы инцидентности должно быть только два ненулевых числа, так как ребро инцидентно двум вершинам. Число ненулевых элементов каждой строки — степень соответствующей вершины. Но в математике удобнее работать с квадратными матрицами, так как для них хорошо разработан соответствующий алгебраический аппарат.

Назовем **матрицей смежности** графа $G(V, X)$ без кратных ребер квадратную матрицу A порядка n, в которой:

$a_{ij} = 1$, если $(V_i, V_j) \in X$;

$a_{ij} = 0$, если $(V_i, V_j) \notin X$.

Поскольку для неориентированного графа ребра (V_i, V_j) и (V_j, V_i) одновременно принадлежат или не принадлежат графу, так как символизируют одно и то же ребро, то $a_{ij} = a_{ji}$. Матрица смежности неориентированного графа является симметрической и не меняется при транспонировании.

Хотя формально каждая вершина всегда смежна сама с собой, в матрице смежности мы будем ставить $a_{kk} = 0$, если у нее нет петли, и $a_{kk} = 1$, если есть одна петля. Итак, если граф имеет матрицу смежности и не имеет петель, на главной диагонали у него всегда стоят нули.

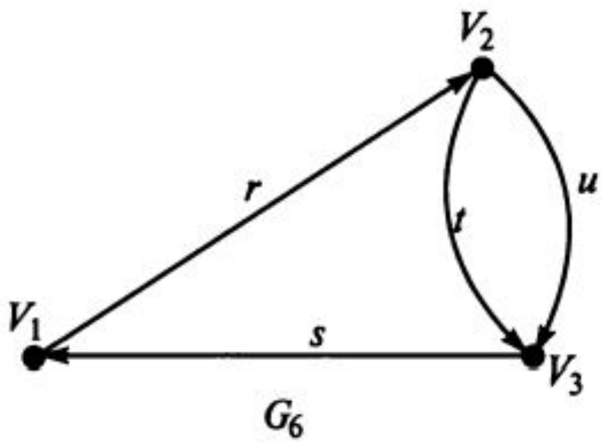


Рис. 2.3. Ориентированный граф

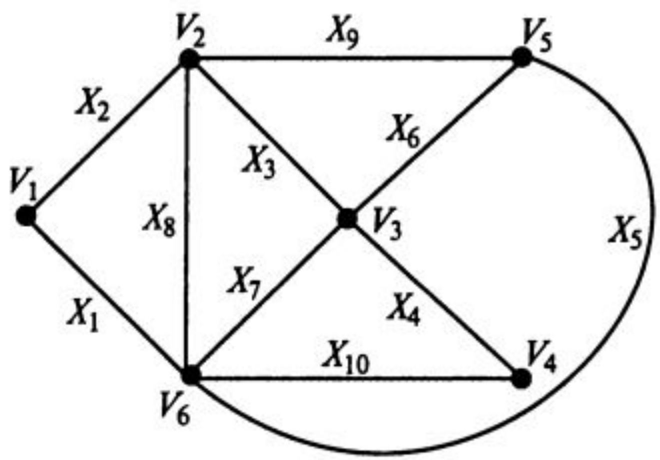
Таблица инцидентности орграфа

V_i	X_j			
	s	t	r	u
V_1	–1	0	1	0
V_2	0	1	–1	1
V_3	1	–1	0	–1

Его же можно задать матрицей $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Таблица инцидентности графа

V_i	X_j									
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
V_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
V_2	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
V_3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
V_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
V_5	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
V_6	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1



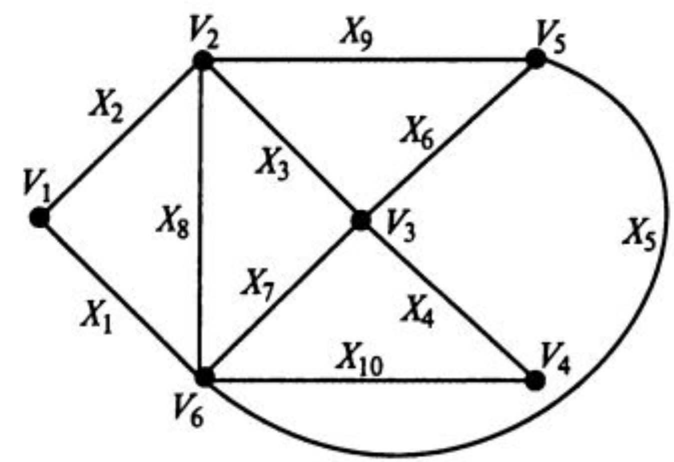
Матрица инцидентности для него имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица смежности графа G

V_i	V_j					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	1	0	1	0	1
V_2	1	0	1	1	0	1
V_3	0	1	0	1	1	1
V_4	1	1	1	0	0	1
V_5	0	0	1	0	0	1
V_6	1	1	1	1	1	0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Граф с кратными ребрами (особенно орграф) сложно задать с помощью матрицы смежности. Сделаем это формально. Если граф неориентированный, то справедливо $a_{ij} = a_{ji}$ и равно кратности ребра (V_j, V_i). В частности, если $i = j$, то a_{ij} — число петель при V_i. Недостаток подобного подхода заключается в том, что остается неучтенным взаимное расположение кратных ребер. Так, ребра могут переплетаться между собой, что, к сожалению, не отразится на матрице смежности.

Словесное описание. В двухкомнатной квартире помещения считаются соединенными между собой, если из одного в другое можно попасть за один шаг (рис. 20).

Пусть комнаты — вершины графа G, а ребра проводятся, если комнаты соединены. Это неориентированный граф. Числами от 1 до 8 обозначены ребра.

Геометрическое задание графа показано на рис. 21.

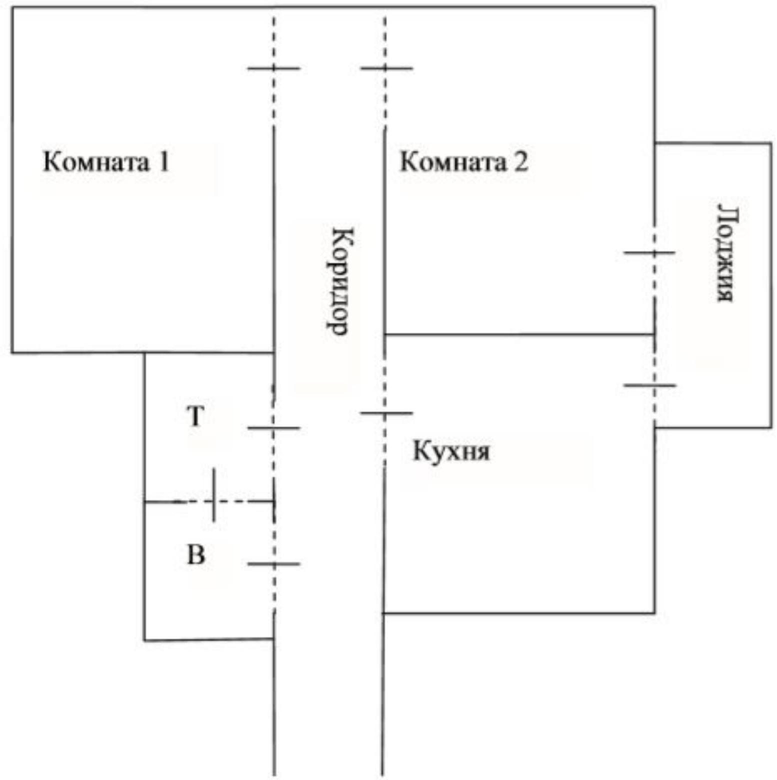


Рис. 20

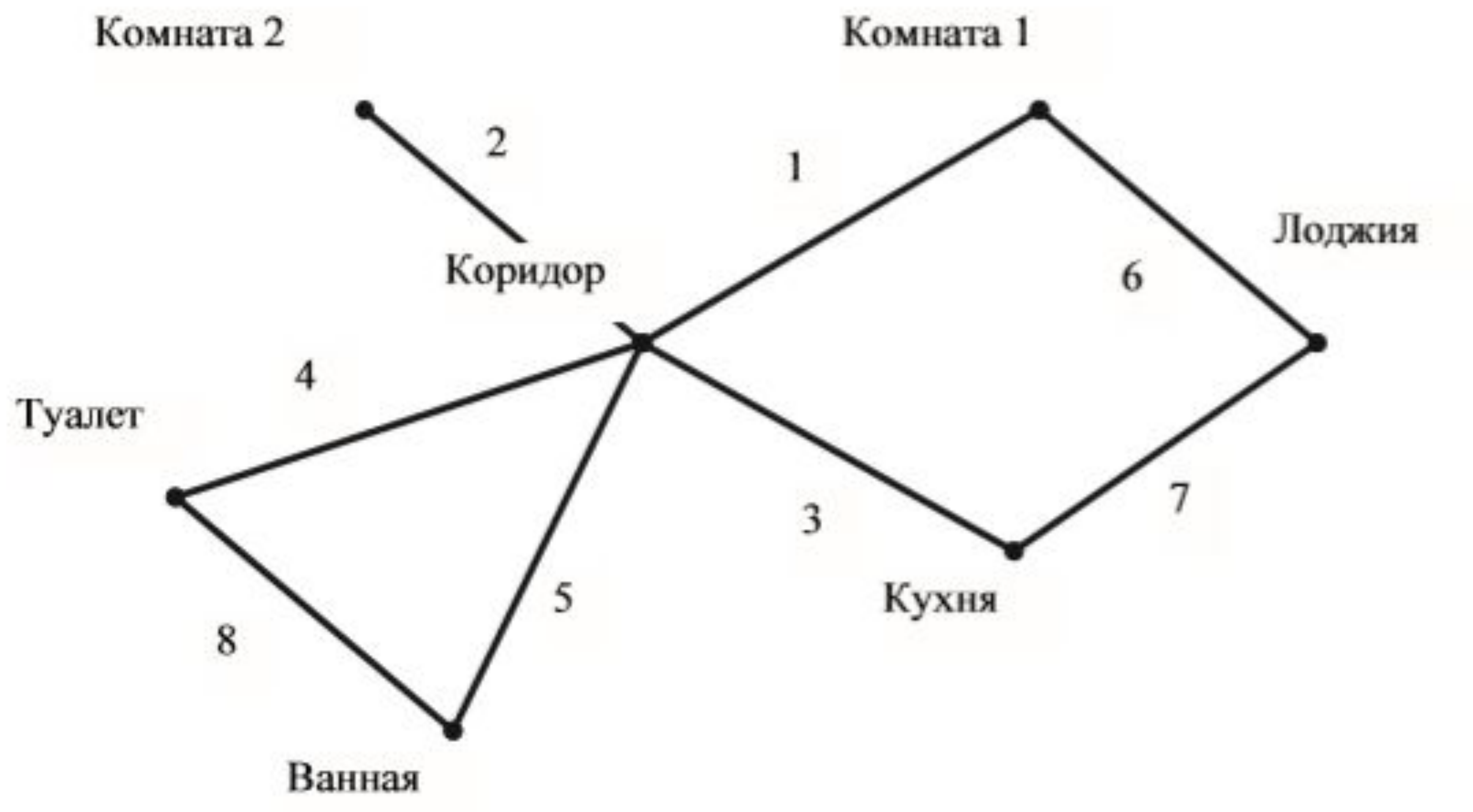

Комната 2
Комната 1
2
1
Коридор
Лоджия
6
4
Туалет
3
7
Кухня
5
8
Ванная

Рис. 21

Матрица смежности $S(G)$ этого графа имеет следующий вид:

	Коридор	Комната 1	Комната 2	Кухня	Лоджия	Ванная	Туалет
Коридор	1	1	1	1	0	1	1
Комната 1	1	1	0	0	1	0	0
Комната 2	1	0	1	0	0	0	0
Кухня	1	0	0	1	1	0	0
Лоджия	0	1	0	1	1	0	0
Ванная	1	0	0	0	0	1	1
Туалет	1	0	0	0	0	1	1

Списки смежности:

коридор — {комната 1, комната 2, кухня, ванная, туалет, коридор};
комната 1 — {коридор, лоджия, комната 1};
комната 2 — {коридор, комната 2};
кухня — {коридор, лоджия, кухня};
лоджия — {комната 1, кухня, лоджия};
ванная — {коридор, туалет, ванная};
туалет — {коридор, ванная, туалет}.

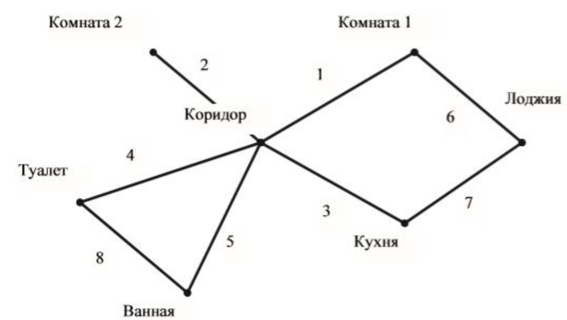


Рис. 21

Матрица инцидентности имеет следующий вид:

v_i \ e_j	1	2	3	4	5	6	7	8
Коридор	1	1	1	1	1	0	0	0
Комната 1	1	0	0	0	0	1	0	0
Комната 2	0	1	0	0	0	0	0	0
Кухня	0	0	1	0	0	0	1	0
Лоджия	0	0	0	0	0	1	1	0
Ванная	0	0	0	1	0	0	0	1
Туалет	0	0	0	0	1	0	0	1

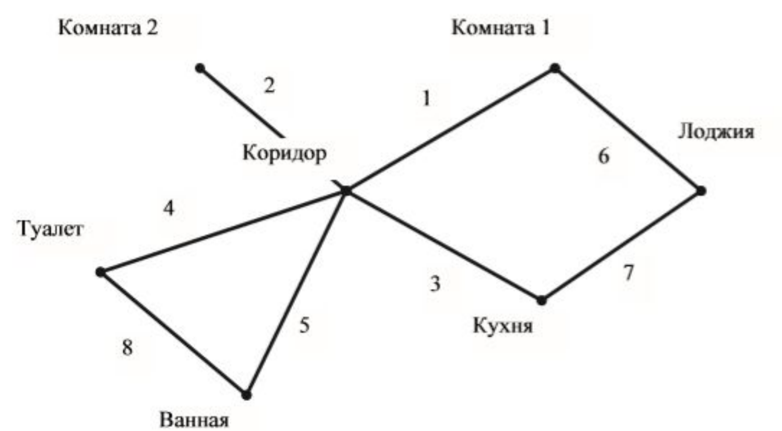


Рис. 21

Задача 19. Пусть граф G задан матрицей смежности A. Построить диаграмму этого графа, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку матрица A несимметрична (например, $a_{35} \neq a_{53}$) и указания на ориентированность нет, A не может являться матрицей смежности реального графа.

Двудольными называются графы, в которых можно выделить два множества вершин — V_1 и V_2, две доли, так, что вершины одной доли не смежны между собой, но могут быть смежны с какими-либо вершинами другой доли. Пример двудольного графа показан на рис. 8.

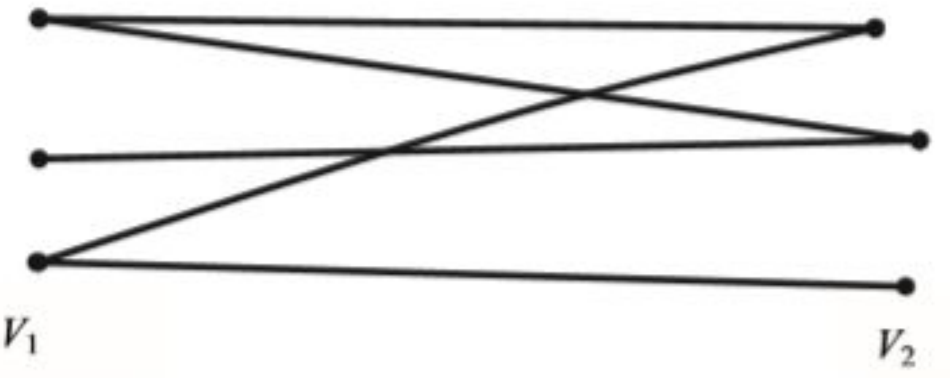
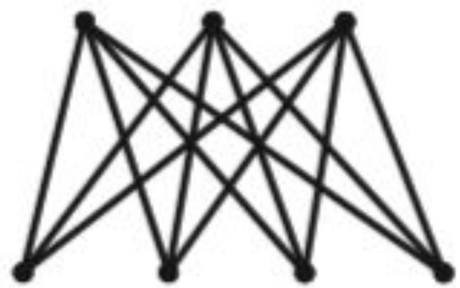


Рис. 8

Среди двудольных графов выделяют *полные двудольные* — те, у которых все вершины одной доли соединены с каждой вершиной другой доли.

$K_{2,2}$

$K_{3,3}$



$K_{3,4}$

Рис. 9

Звезды — полные двудольные графы, в которых одна доля состоит из единственной вершины, . На рис. 10 показаны звезды с тремя и пятью лучами.

$K_{3,1}$ $K_{5,1}$

Рис. 10

Колеса — графы, которые можно представить как звезду, вписанную в цикл. Их обозначают W_n. Примеры колес даны на рис. 11.

W_5

W_6

Платоновыми телами называют правильные многогранники, т. е. такие, в которых все грани одинаковы. Всего существует пять платоновых тел. На рис. 12 – 16 слева показаны тела, а справа — их графы.

• Тетраэдр (4 вершины, 6 ребер, 4 грани — треугольники, рис. 12).

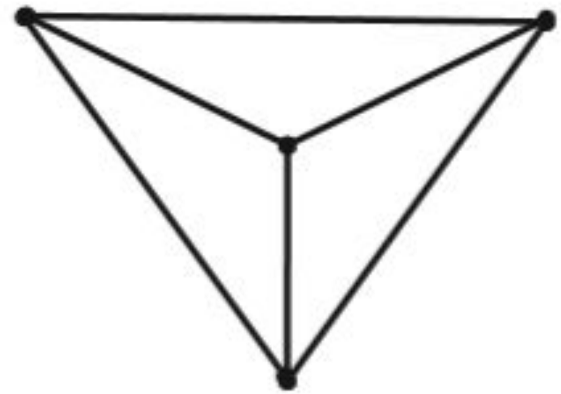


Рис. 12

• Куб, 8 вершин (12 ребер, 6 граней — четырехугольники, рис. 13).

Рис. 13

• Октаэдр (6 вершин,12 ребер, 8 граней — треугольники, рис. 14).

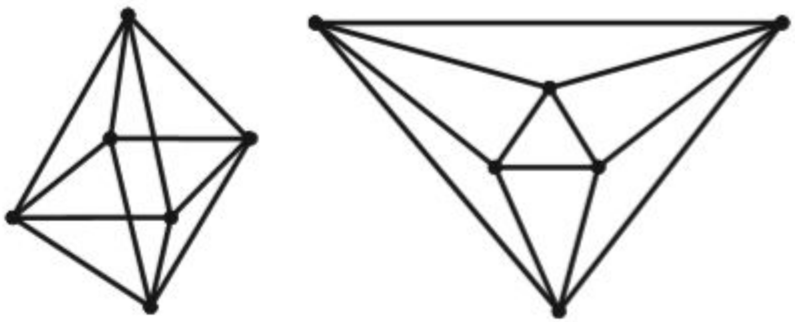


Рис. 14

• Додекаэдр (12 граней — пятиугольники, рис. 15).

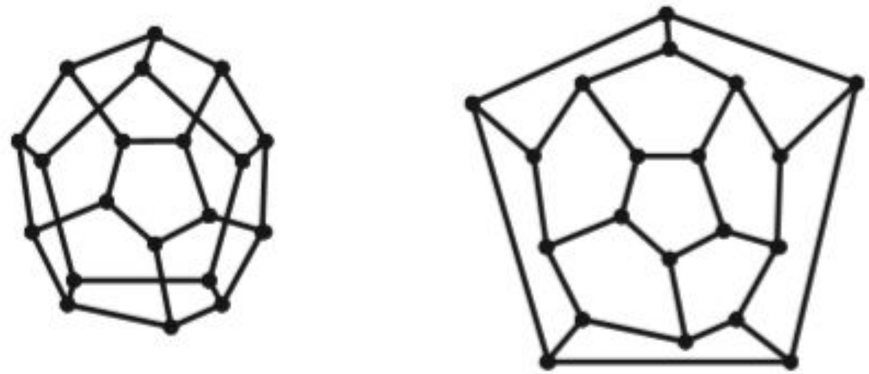


Рис. 15

• Икосаэдр (20 граней — треугольники, рис. 16).

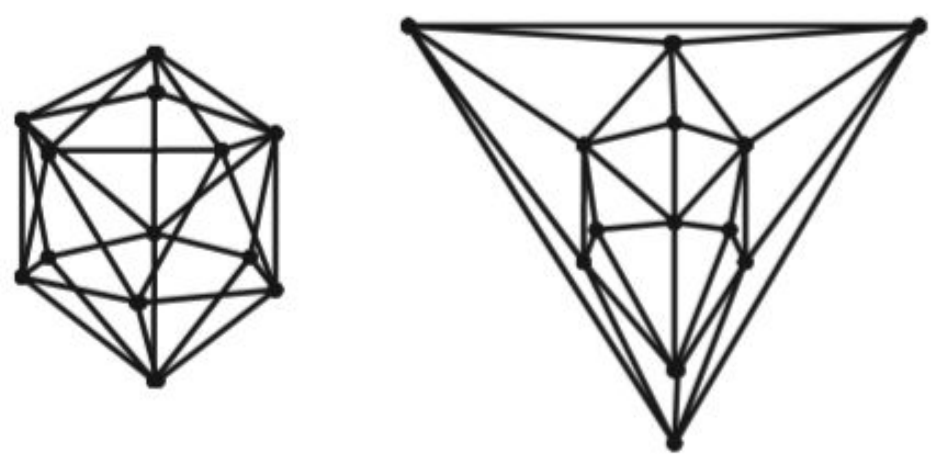


Рис. 16

Мультиграфы — графы, в которых между двумя вершинами может быть больше одной связи (рис. 17). Мультиграфы могут быть ориентированными и неориентированными.

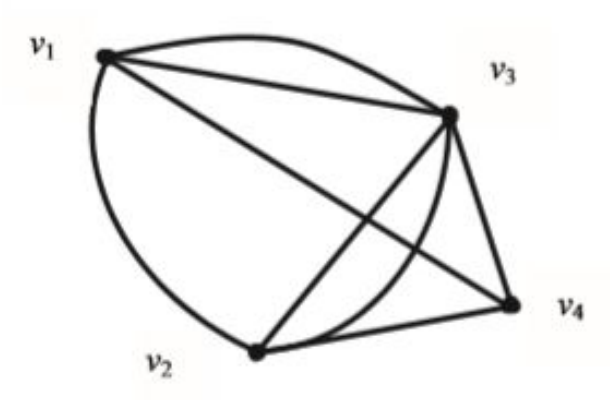


Рис. 17

Псевдографы — мультиграфы, в которых также допустимы петли — ребра или дуги, соединяющие одну и ту же вершину. Пример псевдографа дан на рис. 18.

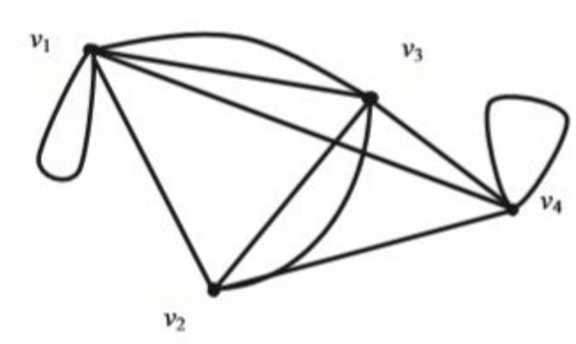


Рис. 18