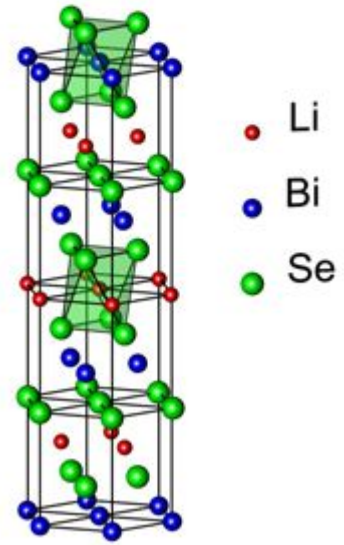
Модели
и моделирование

Тема 1. Модели и их типы

Модели в нашей жизни

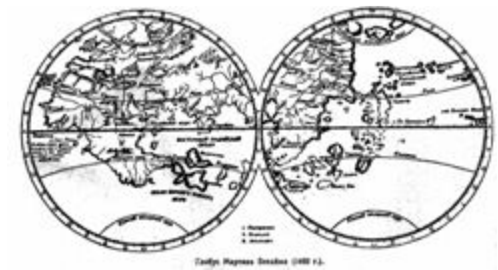


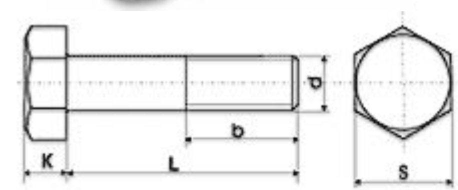
Что такое модель?

Модель – это объект, который обладает некоторыми свойствами другого объекта (*оригинала*) и используется вместо него.

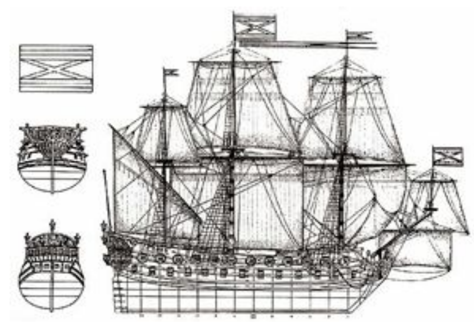
Оригиналы и модели











Первый линейный русский корабль «Гото Предестинация»


Что можно моделировать?

Модели объектов:

- уменьшенные копии зданий, кораблей, самолетов, …
- модели ядра атома, кристаллических решеток
- чертежи
- …

Модели процессов:

- изменение экологической обстановки
- экономические модели
- исторические модели
- …

Модели явлений:

- землетрясение
- солнечное затмение
- цунами
- …

Моделирование

Моделирование – это создание и использование моделей для изучения оригиналов.

Когда используют моделирование:

- **оригинал не существует**
  - древний Египет
  - последствия ядерной войны (Н.Н. Моисеев, 1966)
- **исследование оригинала опасно для жизни или дорого:**
  - управление ядерным реактором (Чернобыль, 1986)
  - испытание нового скафандра для космонавтов
  - разработка нового самолета или корабля
- **оригинал сложно исследовать непосредственно:**
  - Солнечная система, галактика (большие размеры)
  - атом, нейтрон (маленькие размеры)
  - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
  - геологические явления (очень медленные)
- **интересуют только некоторые свойства оригинала**
  - проверка краски для фюзеляжа самолета

Цели моделирования

- **исследование оригинала**

  изучение сущности объекта или явления

  «Наука есть удовлетворение собственного любопытства за казенный счет» (Л.А. Арцимович)

- **анализ («что будет, если …»)**

  научиться прогнозировать последствия различных воздействиях на оригинал

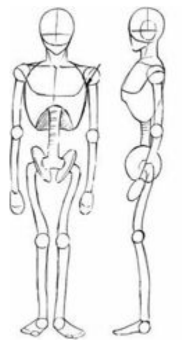
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**

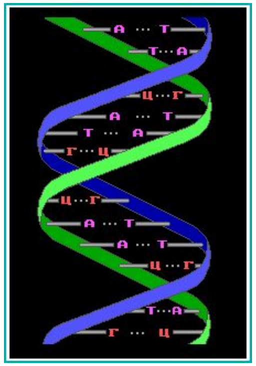
  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия

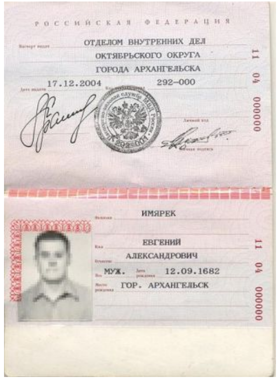
- **оптимизация («как сделать лучше»)**

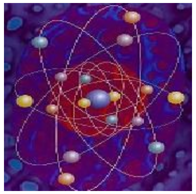
  выбор наилучшего решения в заданных условиях

Один оригинал – одна модель?







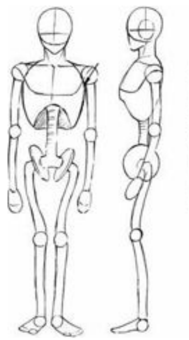


- материальная точка

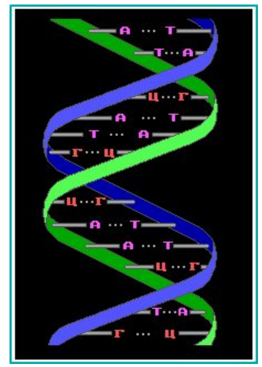
! Оригиналу может соответствовать несколько разных моделей и наоборот!

Зачем нужно много моделей?

Тип модели определяется целями моделирования!



изучение строения тела

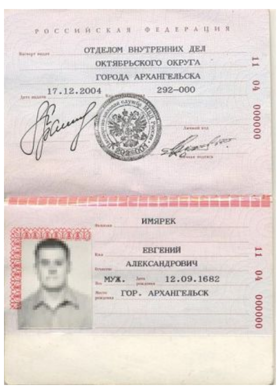


изучение наследственности

учет граждан страны

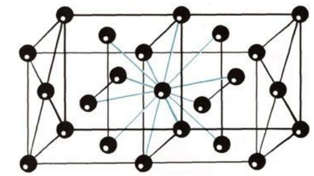
примерка одежды

тренировка спасателей



Природа моделей

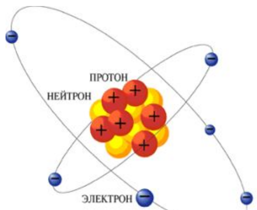
- **материальные (физические, предметные) модели:**

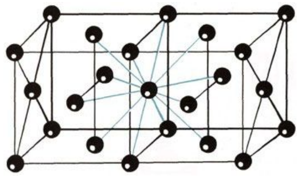
    

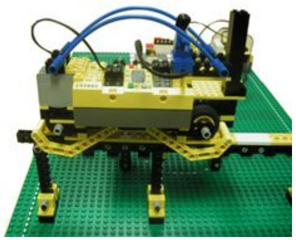
- **информационные модели** представляют собой информацию о свойствах и состоянии объекта, процесса, явления, и его взаимосвязи с внешним миром:
  - **вербальные** – словесные или мысленные
  - **знаковые** – выраженные с помощью формального языка
    - **графические** (рисунки, схемы, карты, …)
    - **табличные**
    - **математические** (формулы)
    - **логические** (различные варианты выбора действий на основе анализа условий)
    - **специальные** (ноты, химические формулы)

Модели по области применения

- **учебные** (в т.ч. тренажеры)







- **опытные** – при создании новых технических средств

аэродинамическая труба

испытания в опытовом бассейне

- **научно-технические**

имитатор солнечного излучения

вакуумная камера в Институте космических исследований

вибростенд НПО «Энергия»

Модели по фактору времени

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
  - силы, действующие на тело в состоянии покоя
  - результаты осмотра врача
  - фотография
- **динамические**
  - модель движения тела
  - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
  - история болезни
  - видеозапись события

Модели по характеру связей

- **детерминированные**
  - связи между входными и выходными величинами жестко заданы
  - при одинаковых входных данных каждый раз получаются одинаковые результаты

  Примеры

  - ❑ движение тела без учета ветра
  - ❑ расчеты по известным формулам

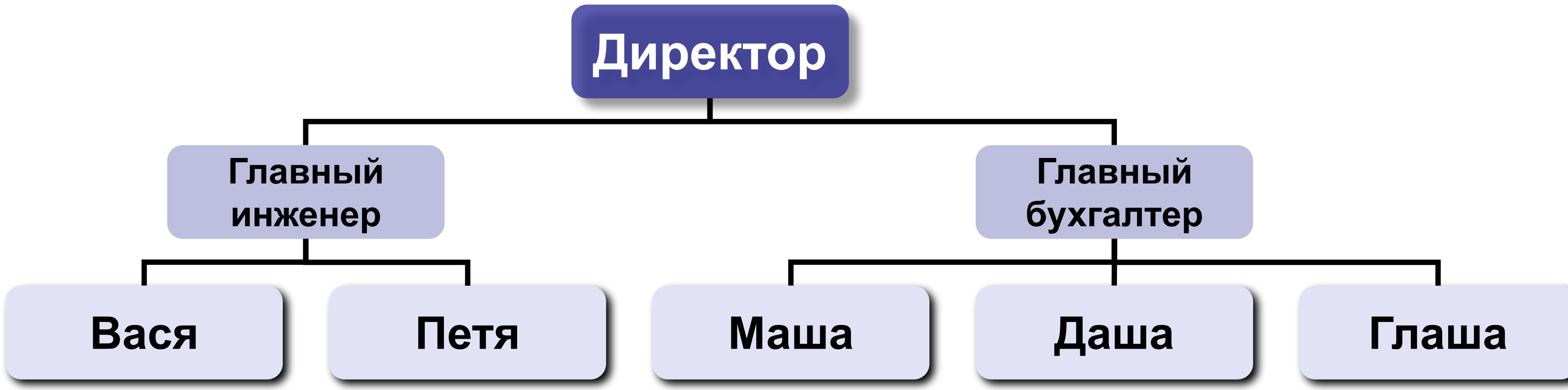
- **вероятностные (стохастические)**
  - учитывают случайность событий в реальном мире
  - при одинаковых входных данных каждый раз получаются немного разные результаты

  Примеры

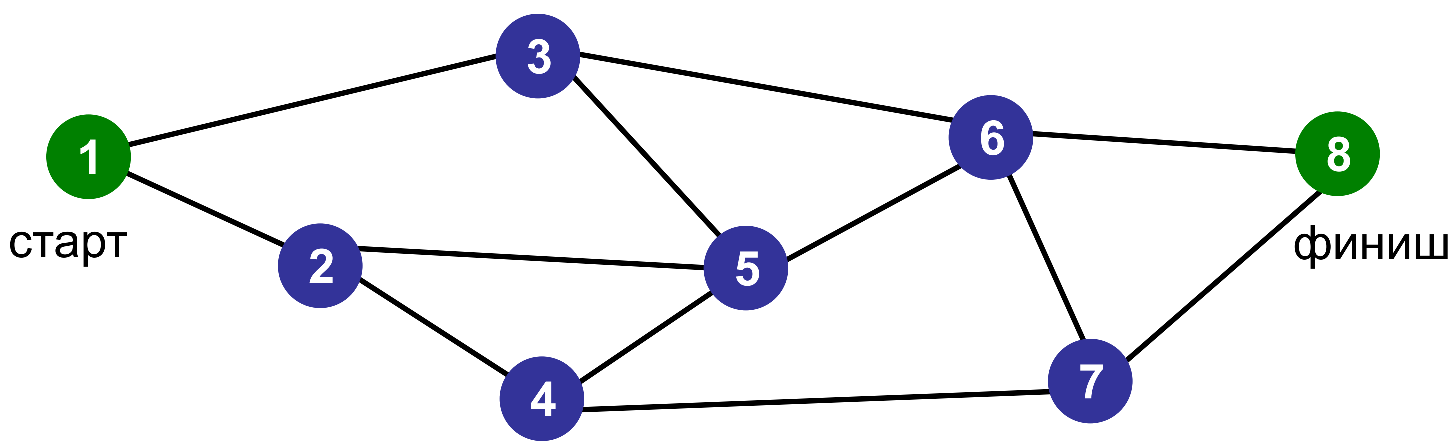
  - ❑ движение тела с учетом ветра
  - ❑ броуновское движение частиц
  - ❑ модель движения судна на волнении
  - ❑ модели поведения человека

Модели по структуре

- табличные модели (пары соответствия)
- иерархические (многоуровневые) модели



- сетевые модели (графы)



Специальные виды моделей

- **имитационные**
  - нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия;
  - максимальный учет всех факторов;
  - только численные результаты;

! Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:

- испытания лекарств на мышах, обезьянах, …
- математическое моделирование биологических систем
- модели бизнеса и управления
- модели процесса обучения

Специальные виды моделей

- **игровые** – учитывающие действия противника

Примеры:

- модели экономических ситуаций
- модели военных действий
- спортивные игры
- тренинги персонала

!

Задача – найти **лучший вариант действий в самом худшем случае!**

Адекватность модели

Адекватность – совпадение существенных свойств модели и оригинала:

- результаты моделирования согласуются с выводами **теории** (законы сохранения и т.п.)
- … подтверждаются **экспериментом**

! Адекватность модели можно доказать только **экспериментом!**

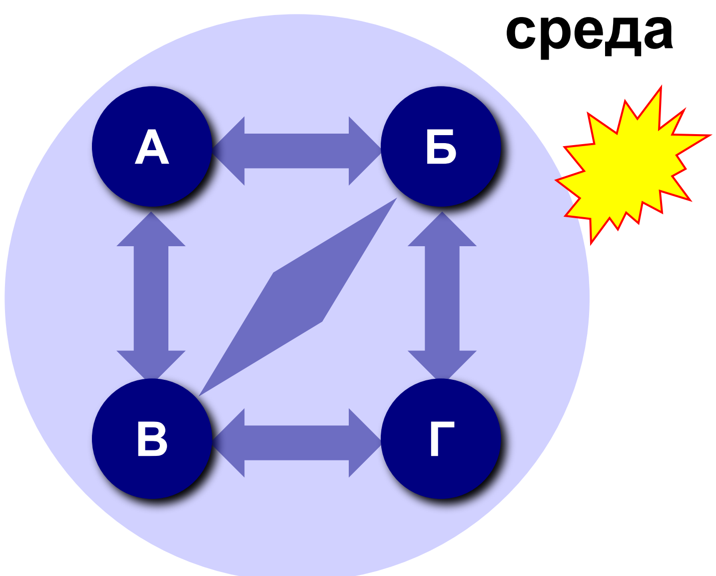
Модель всегда отличается от оригинала

↓

! Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Системный подход

Система – группа объектов и связей между ними, выделенных из среды и рассматриваемых как одно целое.



Примеры:

- семья
- экологическая система
- компьютер
- техническая система
- общество

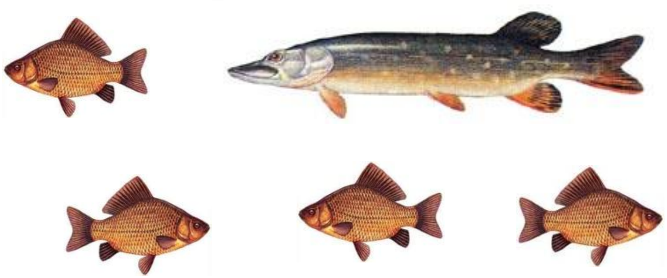
! Система обладает (за счет связей!) особыми свойствами, которыми не обладает ни один объект в отдельности!

Системный подход

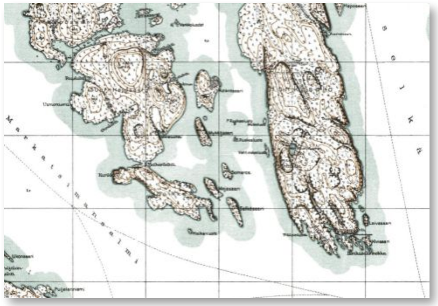
Модель-не-система:

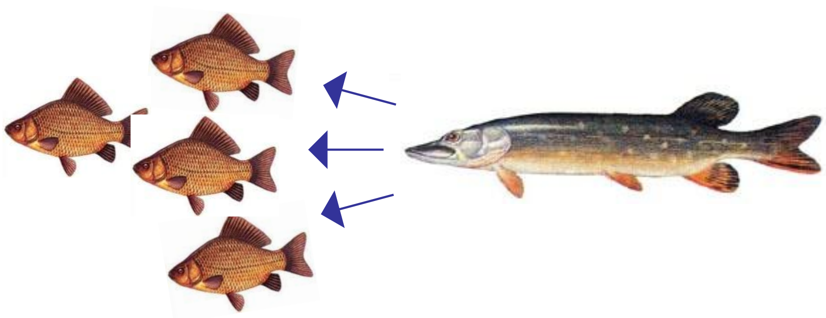
1-я линия:
Пр. Ветеранов
Ленинский пр.
Автово
Кировский завод
Нарвская
...

2-я линия:
Купчино
Звездная
Московская
Парк Победы
Электросила
...



Модель-система:



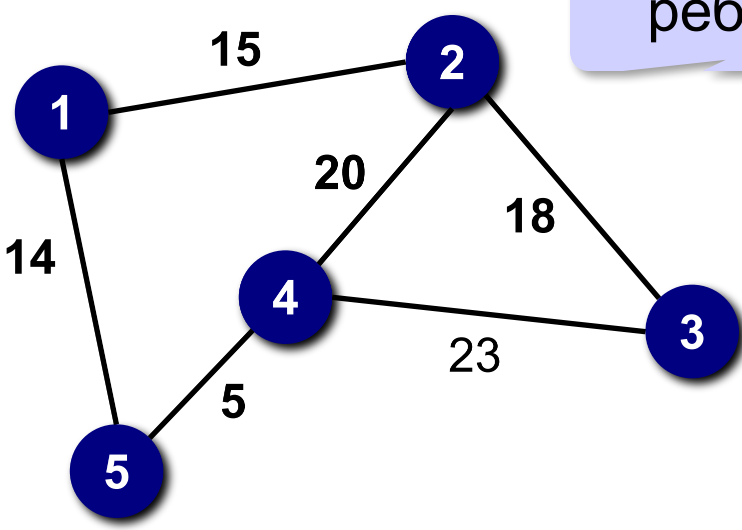


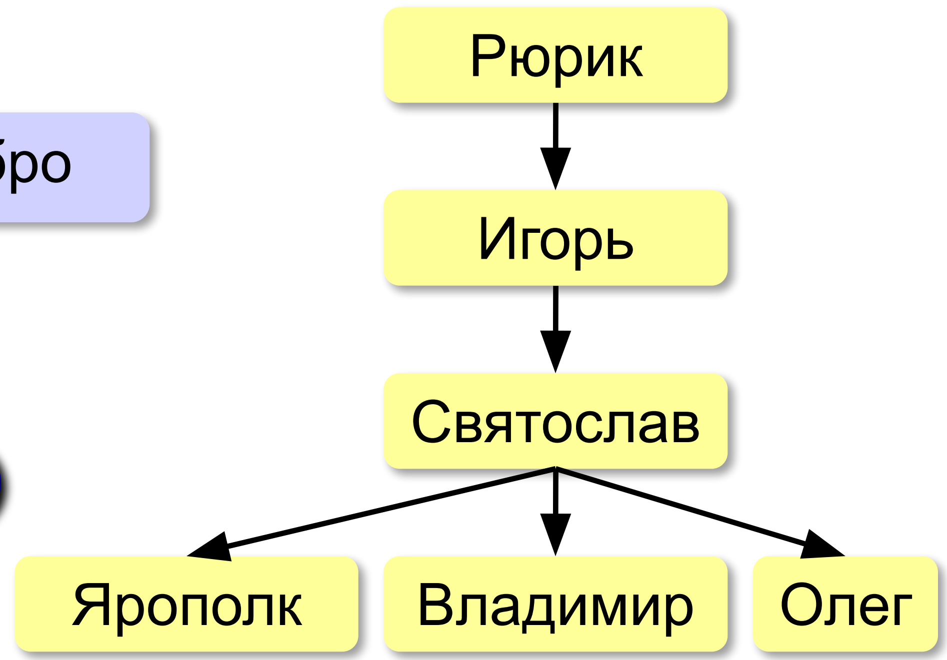
Системный подход

Граф – это набор вершин и соединяющих их ребер.

вершина

ребро





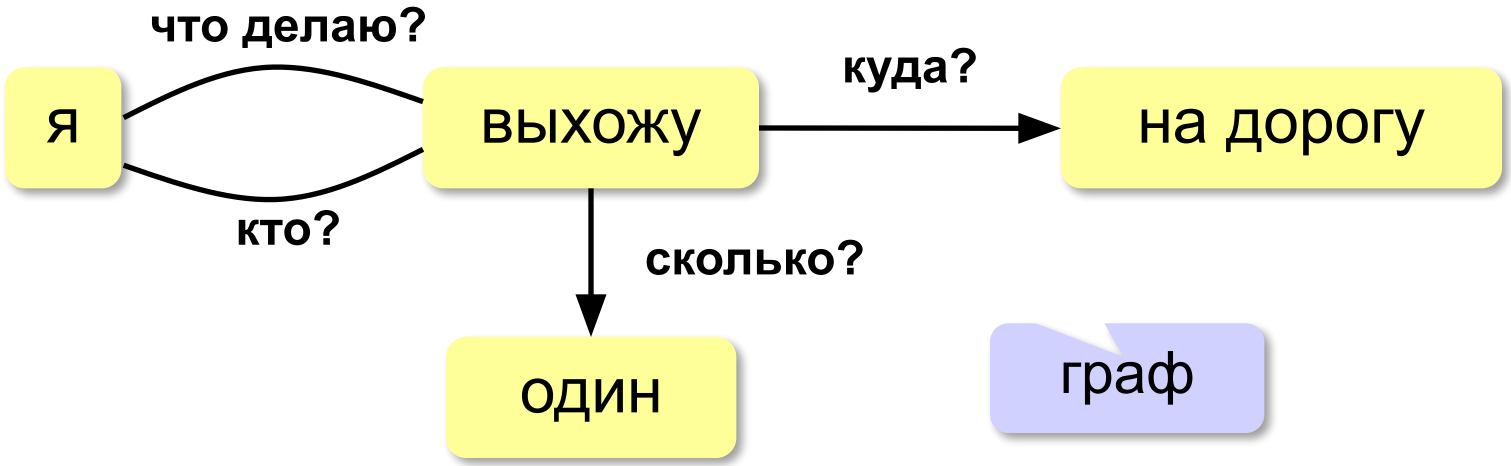
вес ребра
(*взвешенный граф*)

ориентированный граф
(*орграф*) –ребра имеют
направление

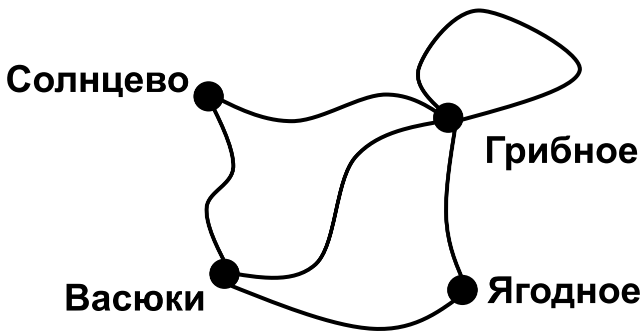
Системный подход

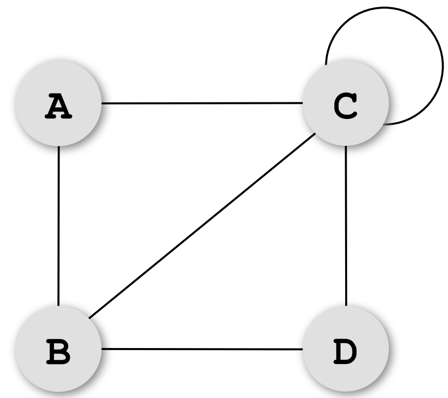
Семантическая (смысловая) **модель предложения:**

«Выхожу один я на дорогу…»



Матрица смежности

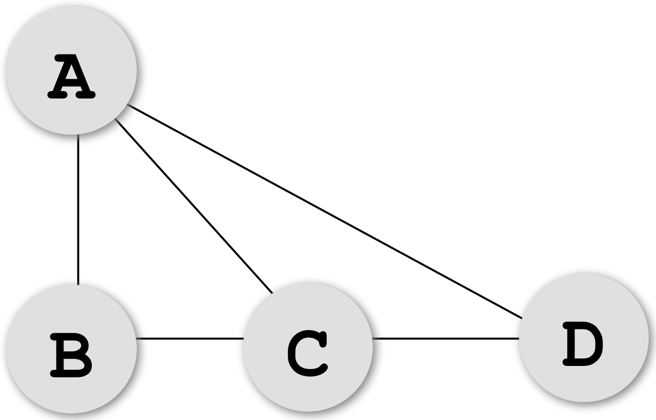


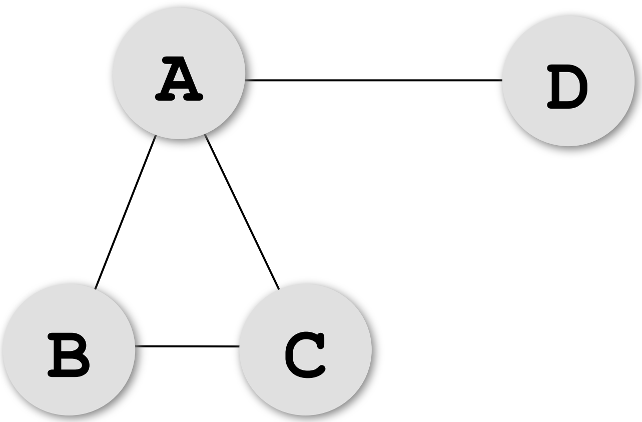


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

петля

Матрица смежности





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

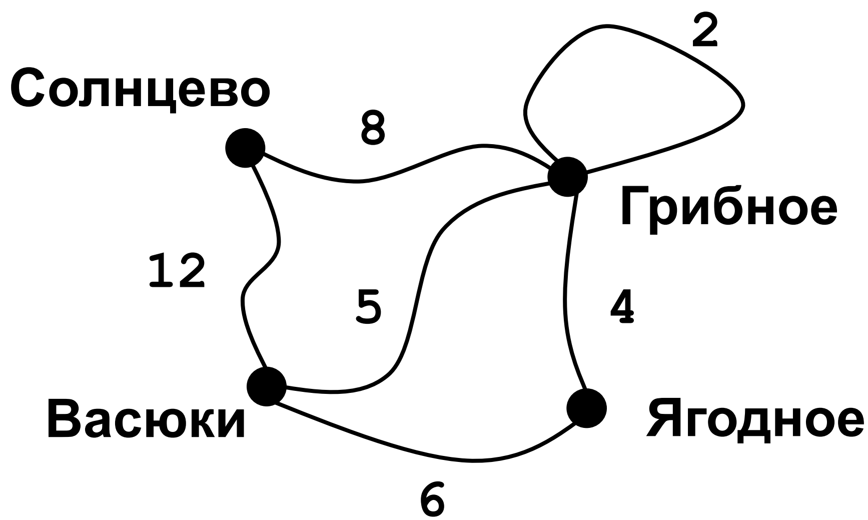
	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

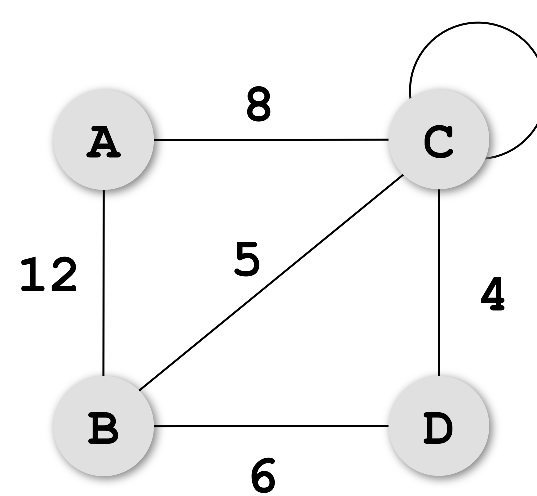
Матрица смежности

	A	B	C	D
A		0	1	1
B	0		1	0
C	1	1		0
D	1	0	0	

	A	B	C	D
A		1	0	1
B	1		1	0
C	0	1		1
D	1	0	1	

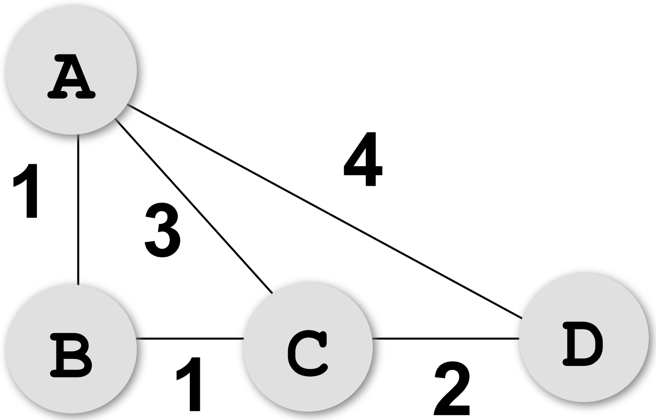
Весовая матрица

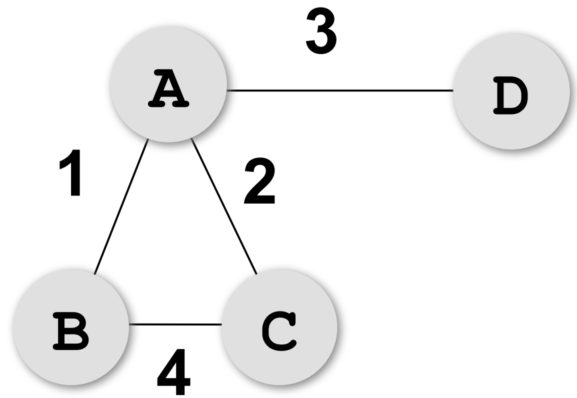




	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Весовая матрица





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Весовая матрица

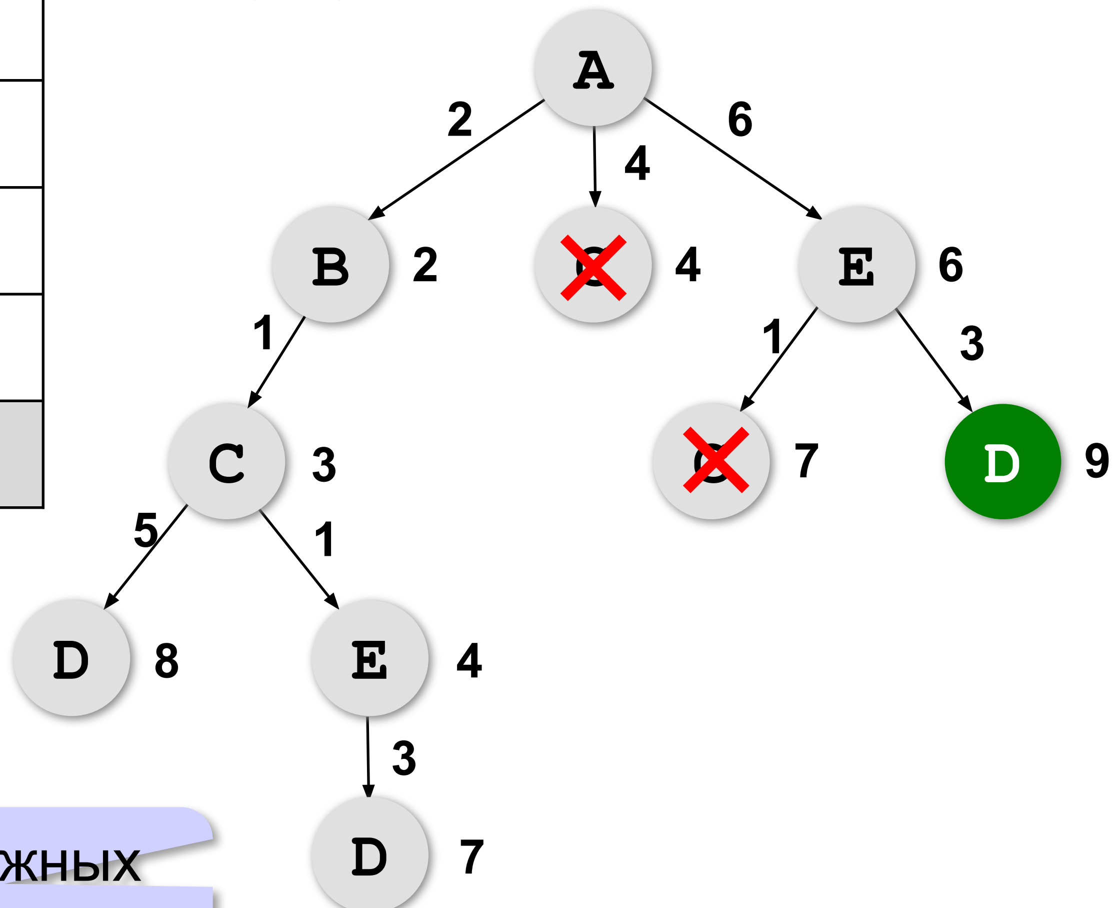
	A	B	C	D
A		4	3	
B	4			2
C	3			6
D		2	6	

	A	B	C	D
A			2	3
B				4
C	2			5
D	3	4	5	

Кратчайшие пути

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и D.



дерево возможных маршрутов

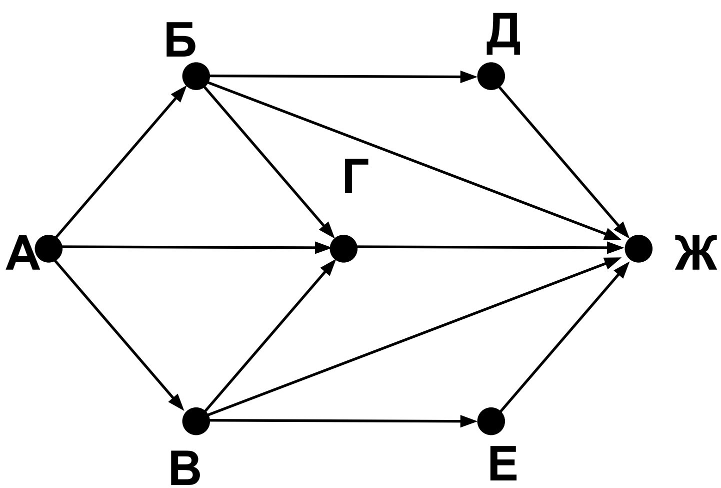
Кратчайшие пути

	A	B	C	D	E
A		2	4		
B	2		1		7
C	4	1		3	5
D			3		3
E		7	5	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и E.

Количество путей

Сколько существует различных путей из А в Ж?



1. Откуда можно приехать в Ж?

Ж←БВГДЕ Е←В Д←Б

Г←АБВ В←А Б←А

2. Можно приехать только из А:

Б←А В←А

3. Можно приехать только из уже отобранных вершин (А, Б и В):

Б←А В←А Е←В Д←Б Г←АБВ

4. Можно приехать только из уже отобранных вершин:

Б←А В←А Е←В Д←Б Г←АБВ Ж←БВГДЕ

Количество путей

После сортировки:

Б←А В←А Е←В Д←Б Г←АБВ Ж←БВГДЕ

> **!** Количество путей в вершину X равно суммарному количеству путей в каждую из вершин, из которых есть ребро в X.

Ж←БВГДЕ

$$N_Ж \leftarrow N_Б + N_В + N_Г + N_Д + N_Е$$

Заполнение таблицы:

Б←А	В←А	Е←В	Д←Б	Г←АБВ	Ж←БВГДЕ
1	1	1	1	3	7

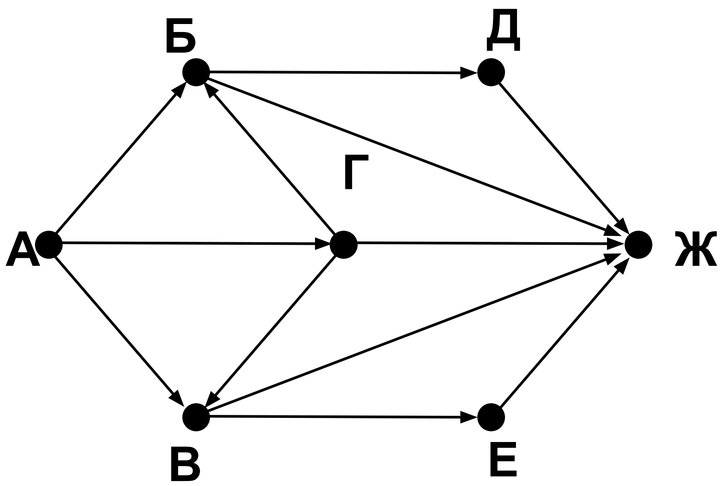
Количество путей

Форма записи:

Ж←БВГДЕ	7
Е←В	1
Д←Б	1
Г←АБВ	3
В←А	1
Б←А	1

Количество путей

Сколько существует различных путей из А в Ж?



Модели и моделирование

Тема 2. Этапы моделирования

I. Постановка задачи

- **исследование оригинала**

  изучение сущности объекта или явления
- **анализ («что будет, если …»)**

  научиться прогнозировать последствий при различных воздействиях на оригинал
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**

  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия
- **оптимизация («как сделать лучше»)**

  выбор наилучшего решения в заданных условиях

! **Ошибки при постановке задачи приводят к наиболее тяжелым последствиям!**

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Винни Пух и Пятачок построили ловушку для слонопотама. Удастся ли его поймать?
- Малыш и Карлсон решили по–братски разделить два орешка – большой и маленький. Как это сделать?
- Найти максимальное значение функции $y = x^2$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки (0,1) и (1,0) (неединственное решение).

II. Разработка модели

- **выбрать тип модели**
- **определить *существенные* свойства оригинала,** которые нужно включить в модель, отбросить несущественные (для данной задачи)
- **построить формальную модель** это модель, записанная на *формальном языке* (математика, логика, …) и отражающая только существенные свойства оригинала
- **разработать алгоритм работы модели** **алгоритм** – это четко определенный порядок действий, которые нужно выполнить для решения задачи

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

Примеры:

- устройство для сложения многозначных чисел – проверка на однозначных числах
- модель движения корабля – если руль стоит ровно, курс не должен меняться; если руль повернуть влево, корабль должен идти вправо
- модель накопления денег в банке – при ставке 0% сумма не должна изменяться

Модель прошла тестирование. Гарантирует ли это ее правильность?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели в интересующих нас условиях.

Примеры:

- устройство для сложения чисел – работа с многозначными числами
- модель движения корабля – исследование в условиях морского волнения
- модель накопления денег в банке – расчеты при ненулевой ставке

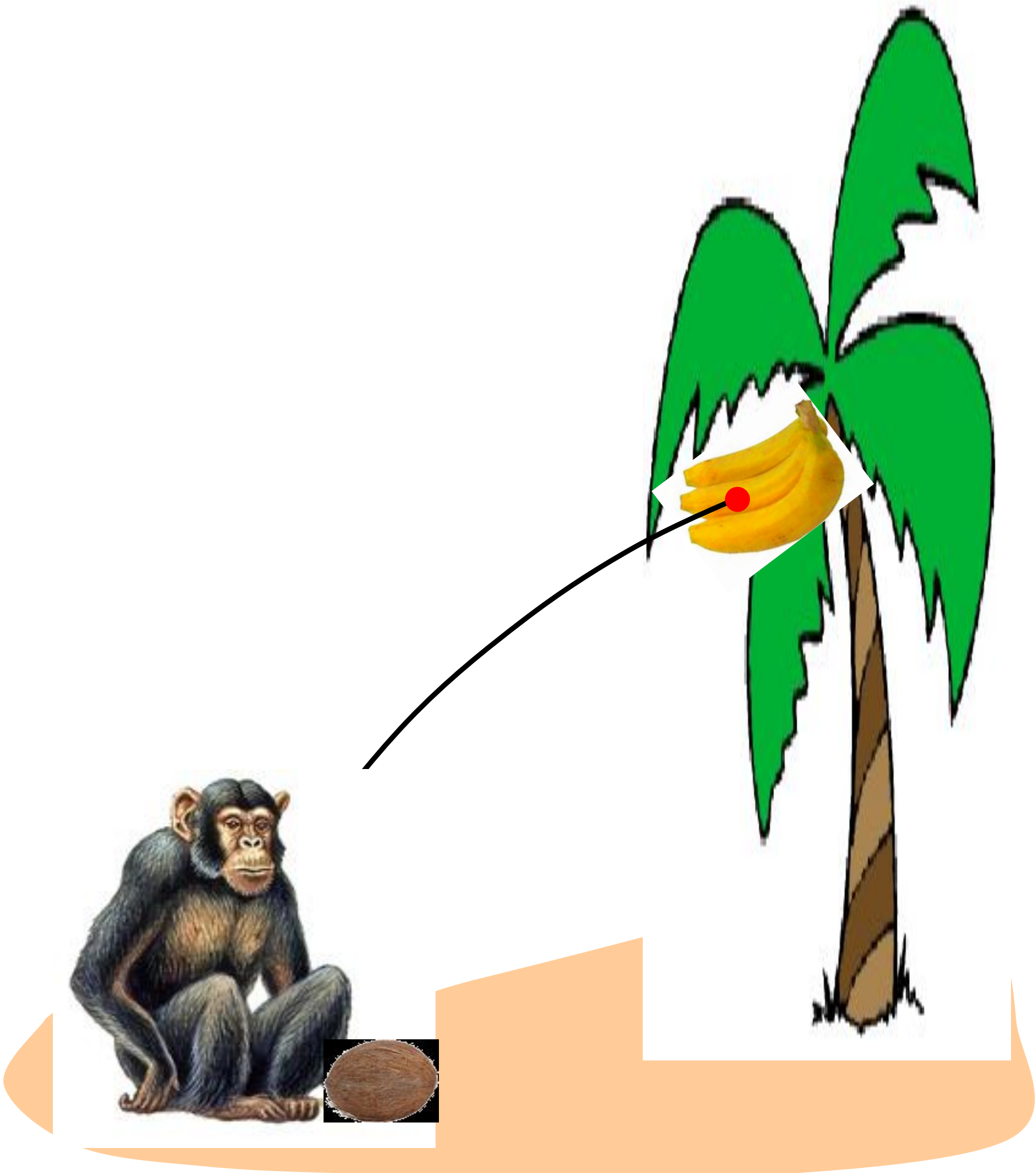
? **Можно ли 100%-но верить результатам?**

V. Проверка практикой, анализ результатов

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (например, учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

Пример.



Задача. Обезьяна хочет сбить бананы на пальме. Как ей надо кинуть кокос, чтобы попасть им в бананы.

Анализ задачи:

- все ли исходные данные известны?
- есть ли решение?
- единственно ли решение?

I. Постановка задачи

Допущения:

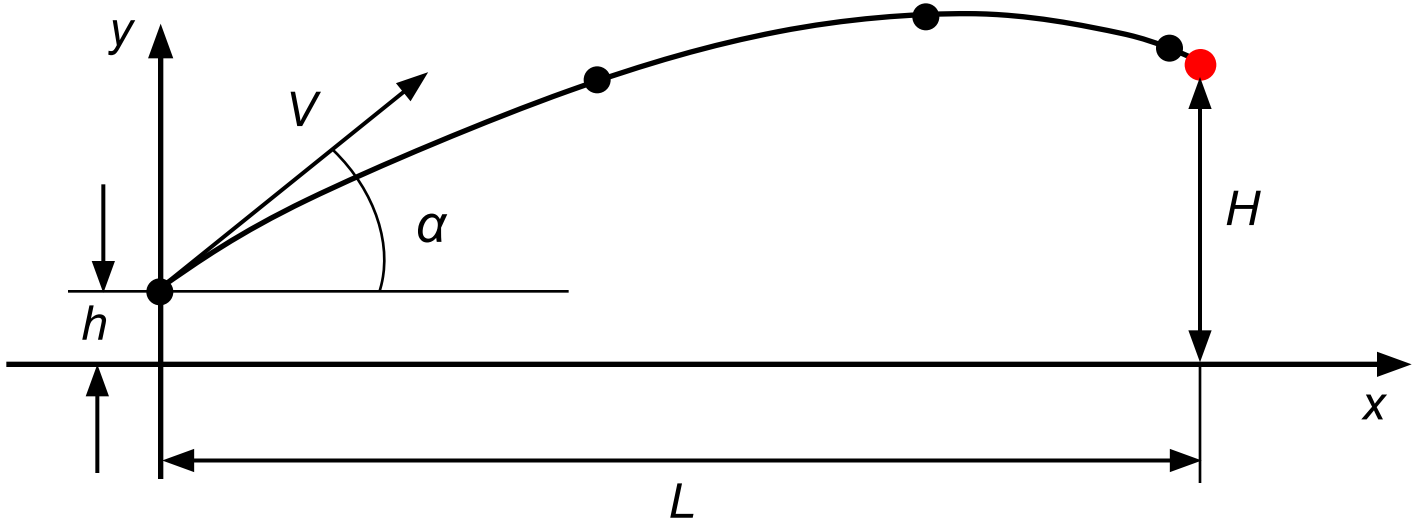
- кокос и банан считаем материальными точками
- расстояние до пальмы известно
- рост обезьяны известен
- высота, на которой висит банан, известна
- обезьяна бросает кокос с известной начальной скоростью
- сопротивление воздуха не учитываем

При этих условиях требуется найти начальный угол, под которым надо бросить кокос.

? **Всегда ли есть решение?**

II. Разработка модели

Графическая модель



Формальная (математическая) модель

$$x = V\cos\alpha \cdot t, \qquad y = h + V\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти *t*, *α*, при которых

$$V\cos\alpha \cdot t = L, \qquad h + V\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = H$$

III. Тестирование модели

Математическая модель

$$x = V\cos\alpha \cdot t$$

$$y = h + V\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

- при нулевой скорости кокос падает вертикально вниз
- при $t=0$ координаты равны $(0,h)$
- при броске вертикально вверх ($\alpha=90^o$) координата x не меняется
- при некотором t координата y начинает уменьшаться (ветви параболы вниз)

! Противоречий не обнаружено!

IV. Эксперимент

Метод I.

Меняем угол α. Для выбранного угла α строим траекторию полета ореха. Если она проходит выше банана, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$V \cos\alpha \cdot t = L \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{L}{V \cos\alpha}$$

Меняем угол α. Для выбранного угла α считаем t, а затем – значение y при этом t. Если оно больше H, уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.

не надо строить всю траекторию для каждого α

V. Анализ результатов

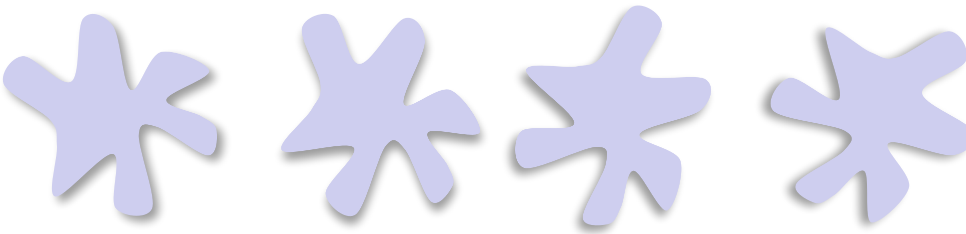
1. Всегда ли обезьяна может сбить банан?
2. Что изменится, если обезьяна может бросать кокос с разной силой (с разной начальной скоростью)?
3. Что изменится, если кокос и бананы не считать материальными точками?
4. Что изменится, если требуется учесть сопротивление воздуха?
5. Что изменится, если дерево качается?

Модели
и моделирование

Тема 3. Модели биологических систем

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ, 10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Модель деления

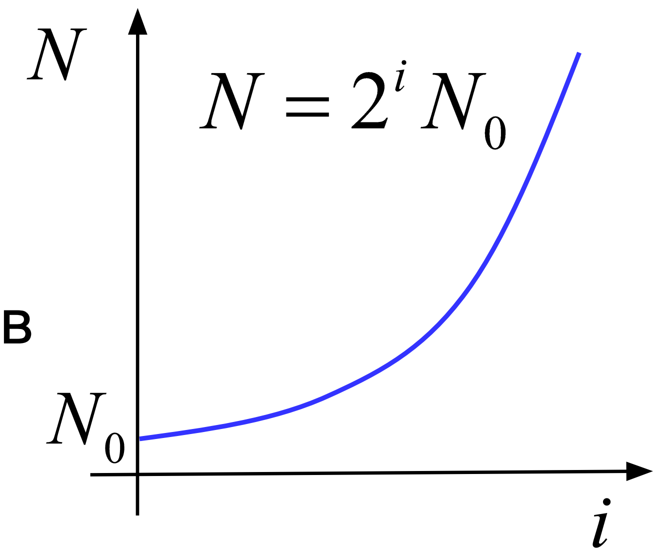


N_0 – начальная численность

$N_1 = 2N_0$ – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – после 2-х циклов

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



Особенности модели:

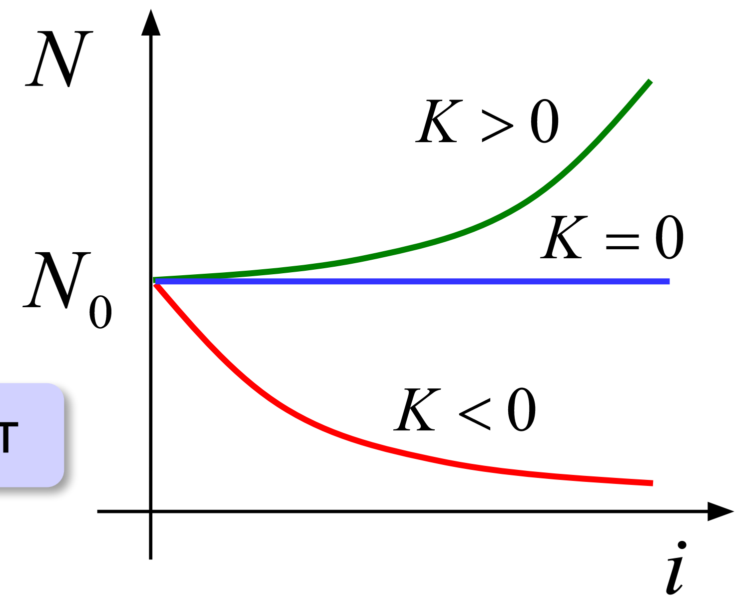
1) не учитывается смертность
2) не учитывается влияние внешней среды
3) не учитывается влияние других видов

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

K_p – коэффициент рождаемости

K_c – коэффициент смертности



Коэффициент прироста $K = K_p - K_c$

$$\boxed{N_i = (1+K) \cdot N_{i-1}}$$

прирост

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

Особенности модели:

1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст)

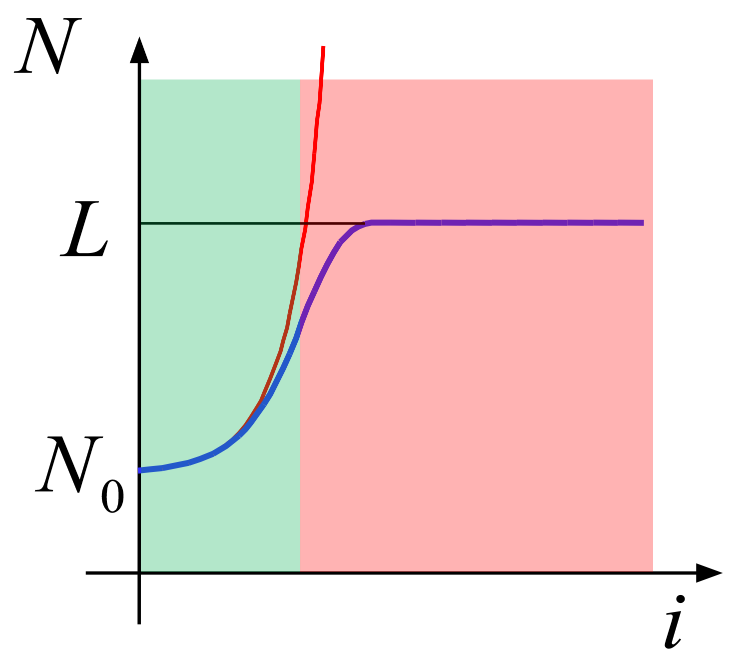
L – предельная численность животных

$$N_i = (1+K_L)\cdot N_{i-1}$$

Идеи:

1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
2) при $N=0$ должно быть $K_L=K$ (начальное значение)
3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$\boxed{N_i = \left(1 + K\frac{L-N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1}}$$



Модель адекватна, если ошибка < 10%!

Модель с отловом

Примеры: рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей и т.п.

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1} \boxed{- R}$$

отлов

Какая будет численность?

$N_i = N_{i-1}$, прирост = отлову

$$N = N + K\frac{L - N}{L} N - R \quad \Rightarrow \frac{K}{L}\cdot N^2 - K\cdot N + R = 0$$

Сколько можно отловить?

Модель эпидемии гриппа

L – всего жителей N_i – больных в i-ый день

Z_i – заболевших в i-ый день V_i – выздоровевших

W_i – всего выздоровевших за i дней

Основное уравнение:

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

Ограниченный рост:

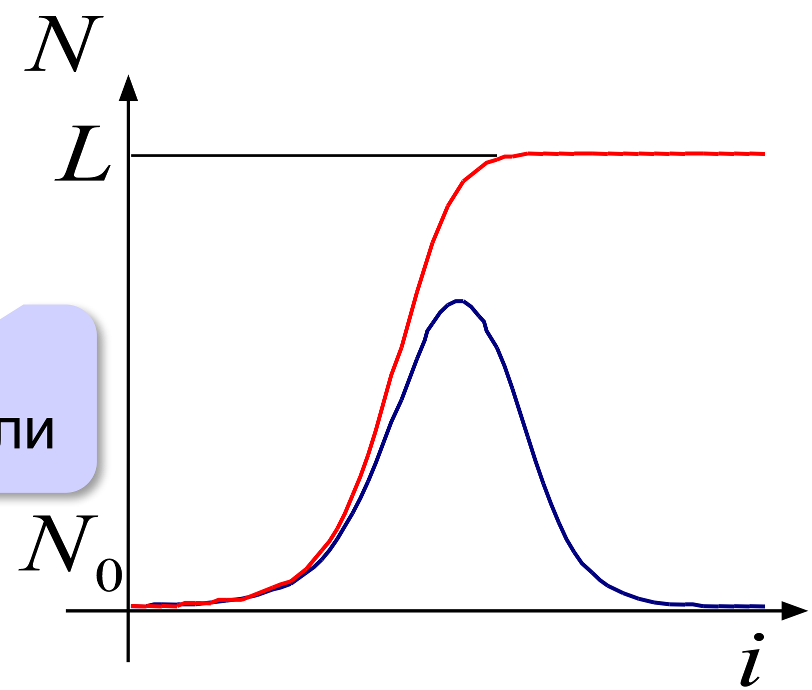
$$Z_i = K\,\frac{L - N_{i-1} \boxed{- W_{i-1}}}{L}\cdot N_{i-1}$$

болели и выздоровели

Выздоровление (через 7 дней):

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$



Модель системы «хищник-жертва»

Модель – не-система:

караси

щуки

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D)\cdot Z_{i-1}$$

вымирают
без еды

Модель – система:

1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
2) «эффект» пропорционален числу встреч

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

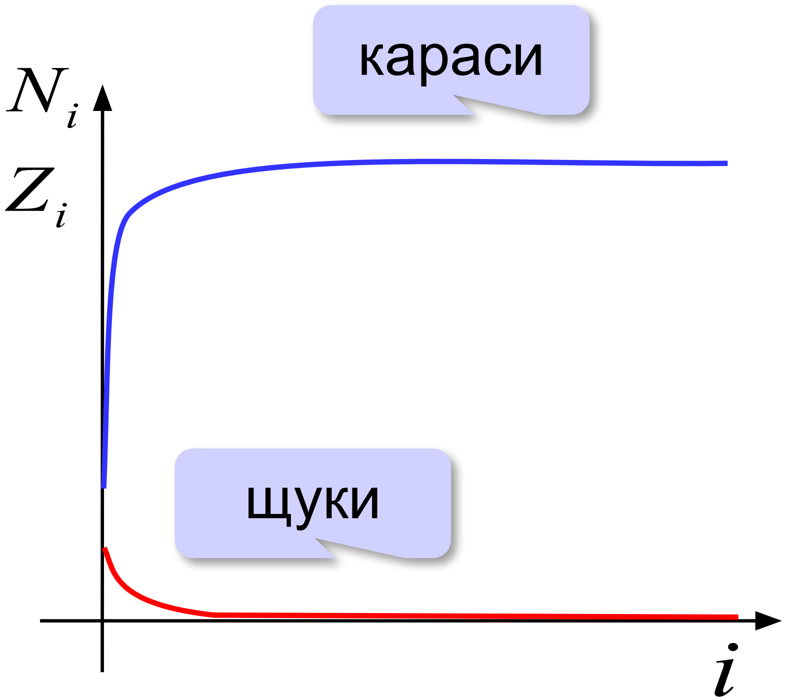
$$Z_i = (1 - D)\cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность
уменьшается

численность
увеличивается

Модель системы «хищник-жертва»

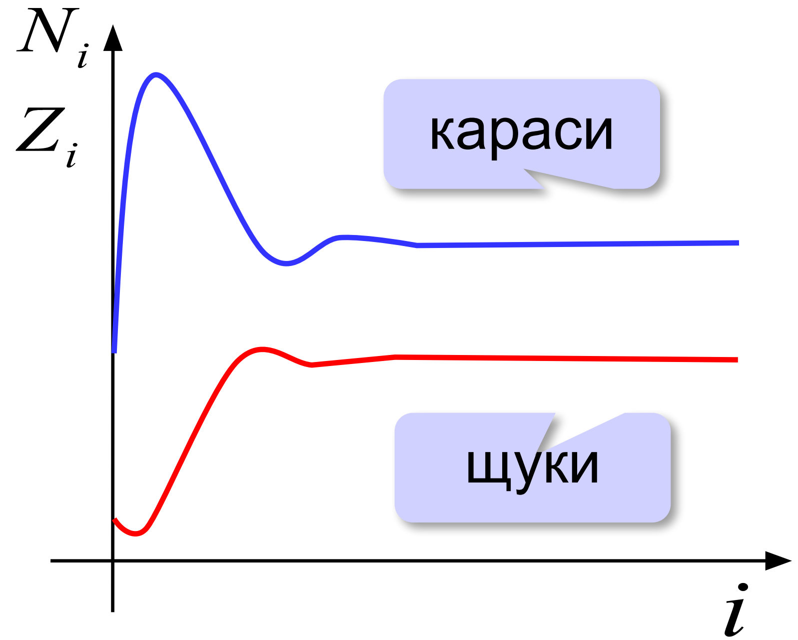
Хищники вымирают:



$$d = 0{,}8$$

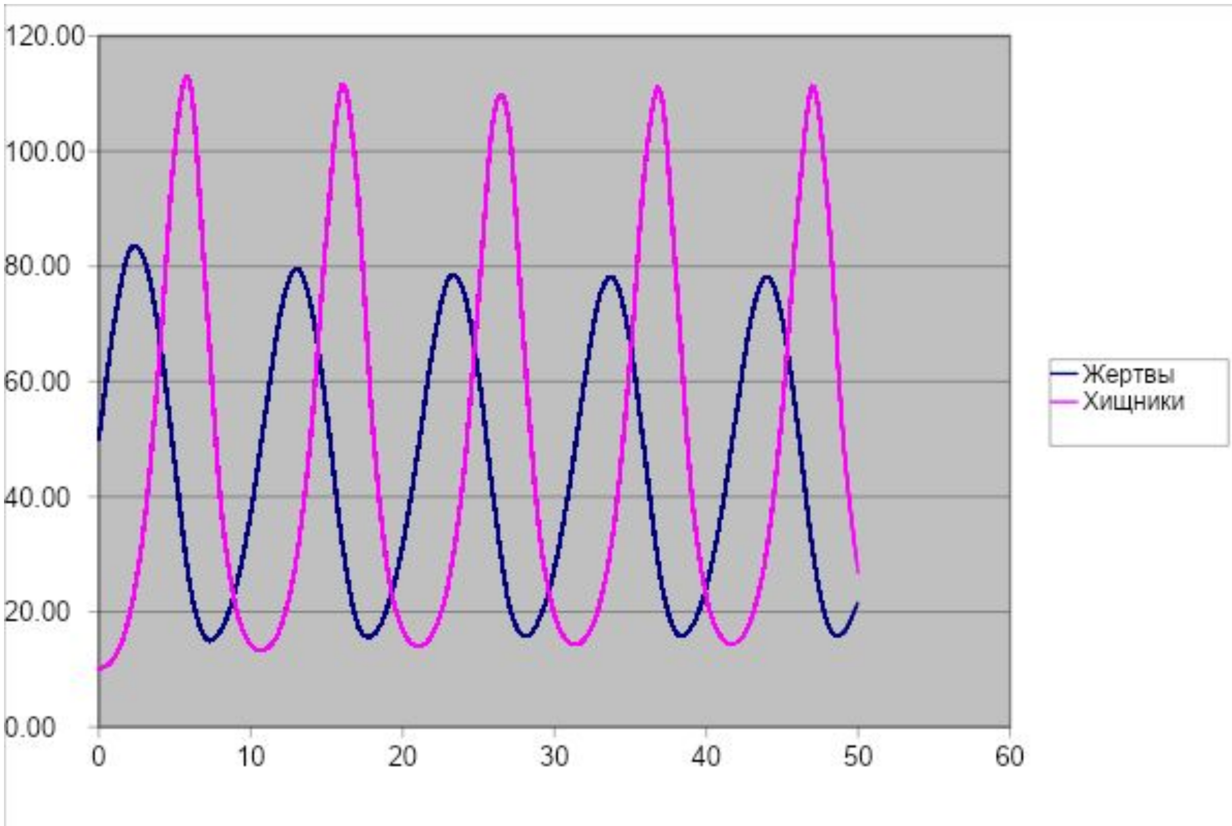
$$b_1 = b_2 = 0{,}005$$

Равновесие:



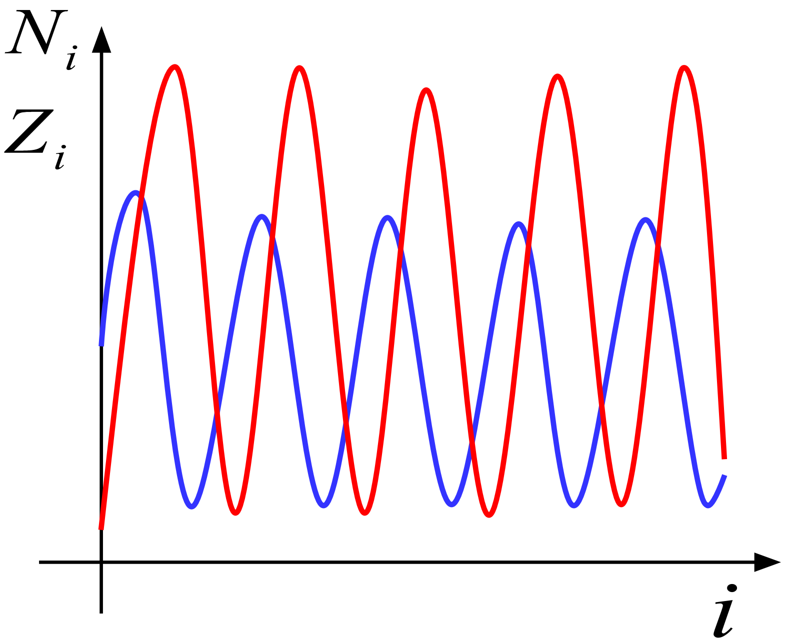
$$d = 0{,}8$$

$$b_1 = 0{,}01; \quad b_2 = 0{,}012$$


120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
0.00
0
10
20
30
40
50
60
Жертвы
Хищники

Модель системы «хищник-жертва»

Колебания:



$$d = 0{,}8$$

$$b_1 = 0{,}01; \;\; b_2 = 0{,}015$$

Модели и моделирование

Тема 4. Моделирование случайных процессов

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ, 10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Случайные процессы

Случайно…

1) встретить друга на улице
2) разбить тарелку
3) найти 10 рублей
4) выиграть в лотерею

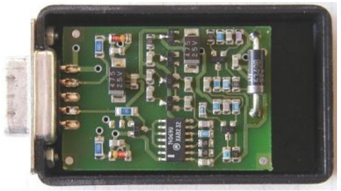
Случайный выбор:

1) жеребьевка на соревнованиях
2) выигравшие номера в лотерее

Как получить случайность?

Случайные числа на компьютере

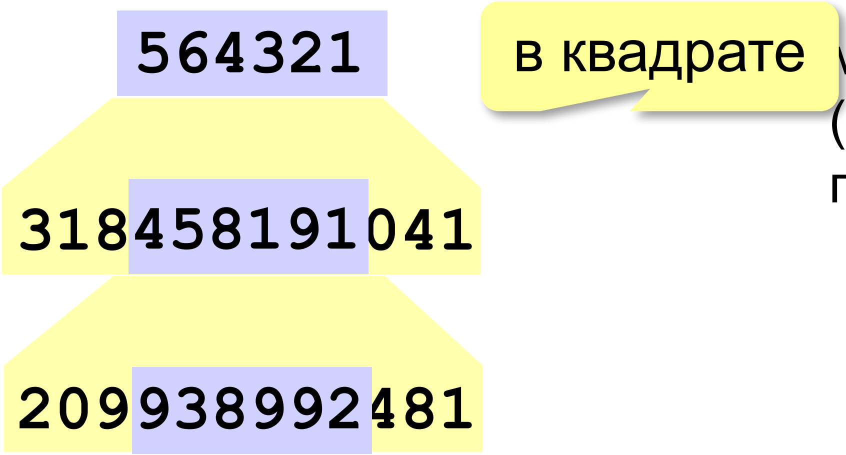
Электронный генератор



- нужно специальное устройство
- нельзя воспроизвести результаты

Псевдослучайные числа – обладают свойствами случайных чисел, но каждое следующее число вычисляется по заданной формуле.

Метод середины квадрата (Дж. фон Нейман)



малый период (последовательность повторяется через 10^6 чисел)

Случайные числа на компьютере

Линейный конгруэнтный метод

остаток от деления

$$\boxed{x_n = (a \cdot x_{n-1} + c) \mod m}$$

a, c, m - целые числа

$$x_n = (16807 \cdot x_{n-1} + 12345) \mod 1073741823$$

простое число

2^{30}-1

Какой период?

период m

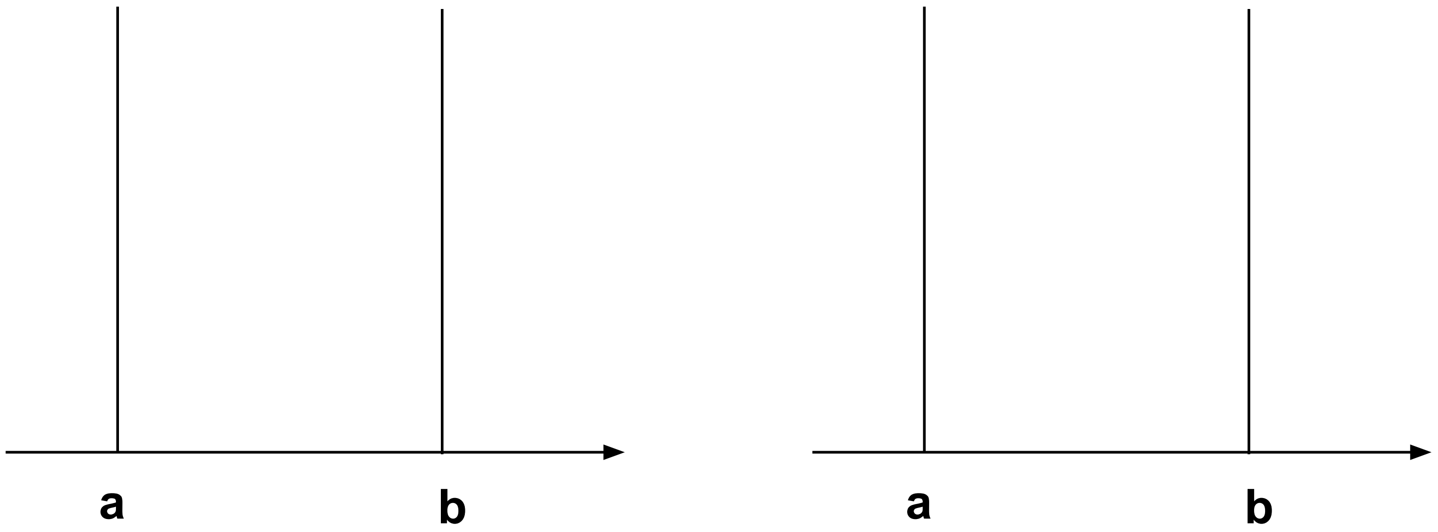
«Вихрь Мерсенна»: период 2^{19937}-1

Распределение случайных чисел

Модель: снежинки падают на отрезок [a,b]

распределение

равномерное **неравномерное**

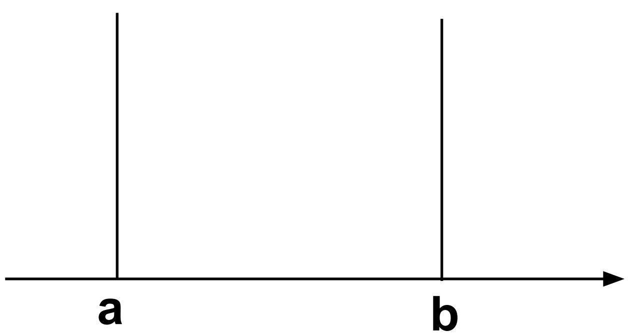


Сколько может быть разных распределений?

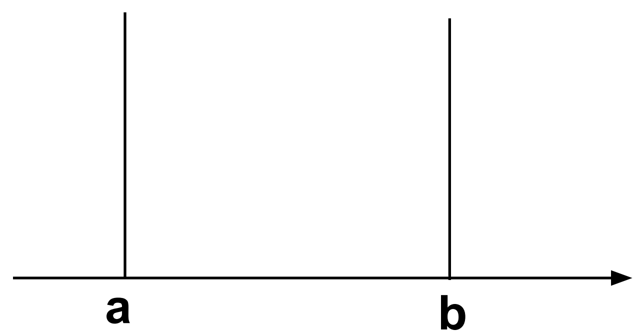
Распределение случайных чисел

Особенности:

- распределение – это характеристика **всей последовательности**, а не одного числа
- **равномерное** распределение одно, компьютерные датчики (псевдо)случайных чисел дают равномерное распределение
- неравномерных – много
- любое неравномерное можно получить с помощью равномерного



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

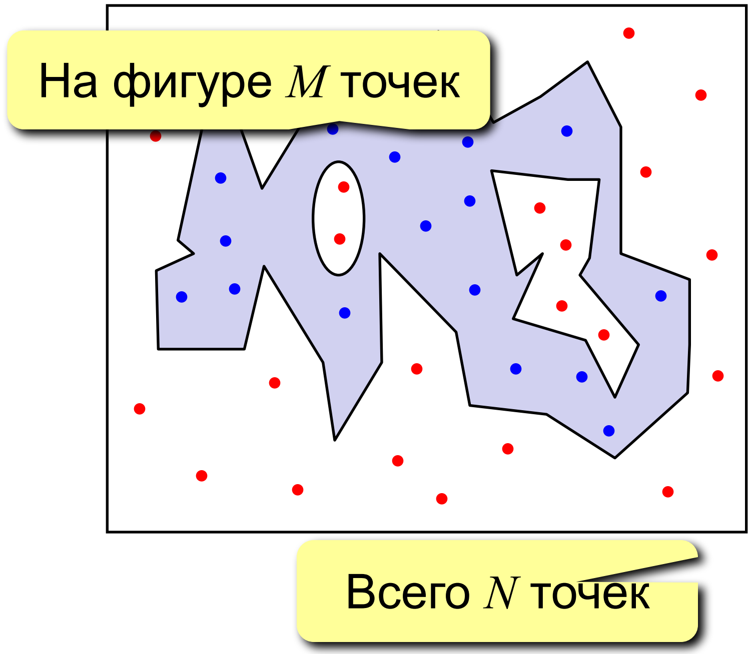


$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}}{12}$$

$x_1, x_2, \ldots$ равномерное распределение

Вычисление площади (метод Монте-Карло)

1. Вписываем сложную фигуру **в другую фигуру**, для которой легко вычислить площадь (прямоугольник, круг, …).
2. **Равномерно** N точек со случайными координатами внутри прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек, **попавших на фигуру**: M.

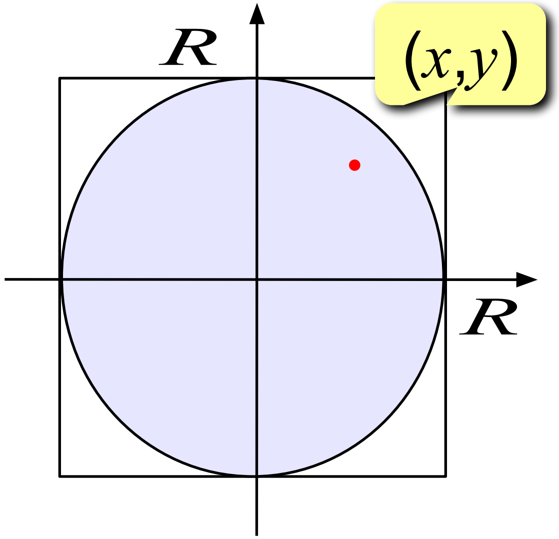


4. Вычисляем **площадь**: $$\frac{S}{S_0} \approx \frac{M}{N} \Rightarrow \boxed{S \approx S_0 \cdot \frac{M}{N}}$$

!

1. Метод приближенный.
2. Распределение должно быть равномерным.
3. Чем больше точек, тем точнее.
4. Точность ограничена датчиком случайных чисел.

Вычисление площади



Случайные координаты:

```
x := R*random;
y := R*random;
```

Когда точка внутри круга?

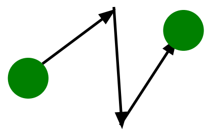
$$\boxed{x^2 + y^2 \leq R^2}$$

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайные координаты }
  if x*x + y*y <= R*R then M := M+1;
end;
S := 4*R*R*M / N;
```

? Как найти число π?

Броуновское движение



Случайное направление (в рад):

```
alpha := 2*pi*random;
```

Случайный шаг:

```
h := hMax*random;
```

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайное направление и шаг }
  x := x + h*cos(alpha);
  y := y + h*sin(alpha);
end;
```

Системы массового обслуживания

Примеры:

1) звонки на телефонной станции
2) вызовы «скорой помощи»
3) обслуживание клиентов в банке

сколько линий?

сколько бригад?

сколько операторов?

Особенности:

1) клиенты (запросы на обслуживание) поступают постоянно, но через случайные интервалы времени
2) время обслуживание каждого клиента – случайная величина

! **Нужно знать характеристики (распределения) «случайностей»!**

Клиенты в банке

Вход клиентов:

1) за 1 минуту – до N человек

2) равномерное распределение

Обслуживание:

1) от T_{min} до T_{max} минут

2) равномерное распределение

? **Сколько нужно касс, чтобы клиенты стояли в очереди не более Q минут?**

Клиенты в банке

Число клиентов в помещении банка:

было | пришли | ушли

```
N := N + in - out;
```

! ***Допущение*: клиенты распределены по кассам равномерно!**

Количество касс: K

Средняя длина очереди: $\dfrac{N}{K}$

Допустимая длина очереди: $\dfrac{N}{K} \leq Q$

Клиенты в банке

Пришли за очередную минуту:

округление

```
in := round(N*random);
```

Случайное время обслуживания:

```
T := Tmin + (Tmax - Tmin)*random;
```

! **Каждый оператор за эту минуту обслужит $\frac{1}{T}$ клиентов!**

Обслужены за очередную минуту и выходят:

```
out := K / T;
```

Клиенты в банке (программа)

период моделирования L минут

```
count := 0; { счетчик «плохих» минут }
for i:=1 to L do begin
  in := { случайное число входящих }
  out := { случайное число обслуженных }
  N := N + in - out;
  if N > Q*K then
    count := count + 1;
end;
writeln(count/L:0:2);
```

? Что выводится?

Конец фильма