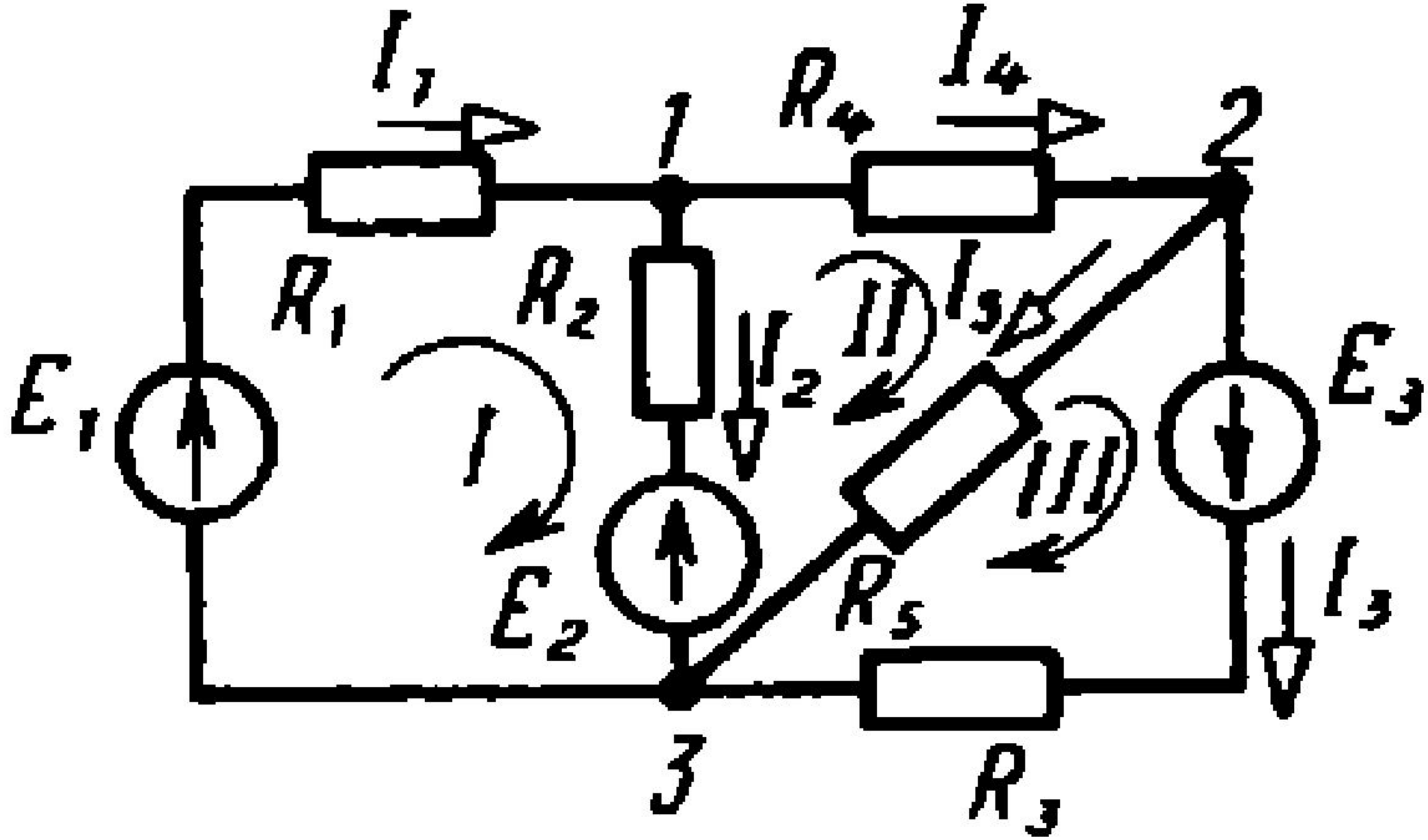
1.9. АНАЛИЗ РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

Анализ и расчет любой электрической цепи можно провести на основании первого и второго законов Кирхгофа. Рассмотрим в качестве примера, применение законов Кирхгофа для определения токов всех ветвей схемы на следующем рисунке, если сопротивления и ЭДС всех элементов известны.



I1
1
R4
I4
2
R1
R2
II
I5
E1
I
I2
E3
III
E2
R5
I3
3
R3

Рекомендуется следующий порядок составления уравнений по законам Кирхгофа: определяют число ветвей, узлов и независимых контуров, устанавливают число независимых уравнений по первому закону Кирхгофа, остальные уравнения составляются по второму закону Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа можно составить **у — 1** независимых уравнений, где **у** — количество узлов схемы. Использовать все **у** уравнений невозможно, так как одно из них обязательно будет зависимым.

Это связано с тем, что токи ветвей войдут в уравнения, составленные для всех у узлов, дважды, причем с разными знаками, поскольку один и тот же ток направлен от одного узла (имеет знак плюс в уравнении) к другому узлу (имеет знак минус). При сложении всех уравнений левая и правая части будут равны нулю, а это означает, что одно из уравнений можно получить суммированием **у — 1** уравнений с заменой знаков всех токов на противоположные. Таким образом, **у**-е уравнение всегда будет зависимым и поэтому использовать его для определения токов нельзя.

Схема электрической цепи имеет пять ветвей и три узла, поэтому по первому закону Кирхгофа для нее можно составить два независимых уравнения.

Количество уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, должно быть равно количеству независимых контуров.

Независимым называют контур, в который входит хотя бы одна новая ветвь.

Для схемы цепи надо составить три уравнения по второму закону Кирхгофа для трех независимых контуров. Выбираем произвольно направления токов в ветвях. Примем направление обхода контура по часовой стрелке.

Тогда система уравнений будет иметь вид:

1) для узла 1

$$-I_1 + I_2 + I_4 = 0$$

2) для узла 2

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

3) для контура *I*

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 - E_2$$

4) для контура *II*

$$-R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_2$$

5) для контура *III*

$$R_3 I_3 - R_5 I_5 = E_3$$

Решая систему из пяти уравнений , можно определить все пять неизвестных токов. Если в результате решения этих уравнений получаются отрицательные значения токов, то это означает, что истинные направления токов в ветвях цепи противоположны тем направлениям, для которых составлялись уравнения.

Правильность расчета токов в ветвях электрической цепи может быть проверена с помощью уравнения баланса мощностей источников и приемников электрической энергии

$$\Sigma P_{\text{и}} = \Sigma P_{\text{п}}$$

В последнем уравнении левая часть характеризует мощность источников (произведение ***EI*** для источника напряжения и ***JU*** для источника тока), а правая — мощность активных (произведение ***EI***) и пассивных (произведение ***RI***^{2}) приемников электрической энергии.

Для исследуемой схемы уравнение баланса мощностей запишется в виде

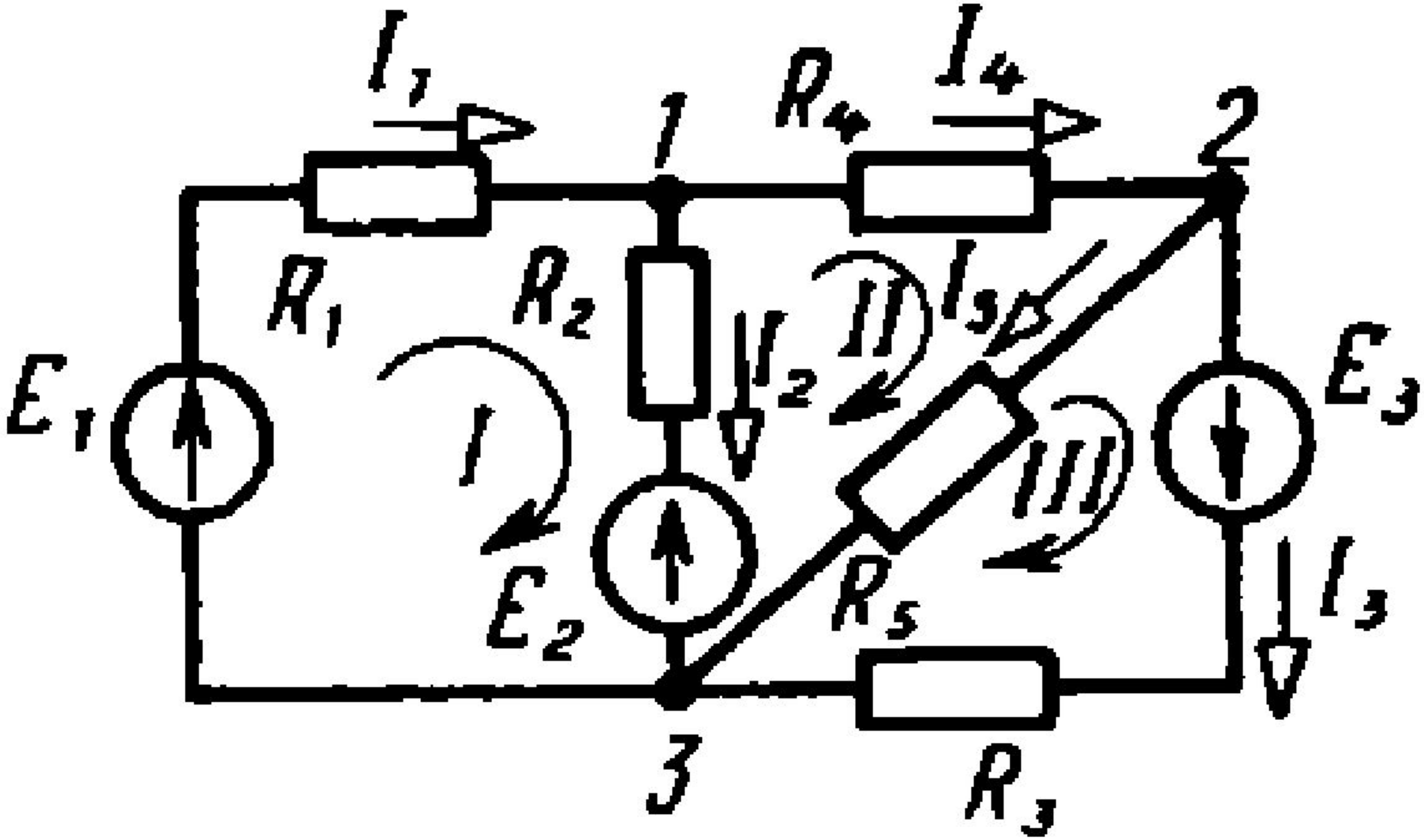
$$E_1 I_1 + E_3 I_3 = E_2 I_2 + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2$$

1.10. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

В электротехнике и промышленной электронике часто находят применение сложные электрические цепи с несколькими активными и пассивными элементами. Если такая цепь содержит много узлов и контуров, то расчет цепи на основе первого и второго законов Кирхгофа будет связан с решением большого количества уравнений.

Вводя понятие **контурных токов**, можно свести уравнения, составленные по законам Кирхгофа, к системе уравнений, составленных лишь для независимых контуров, т. е. исключить уравнения, составляемые по первому закону Кирхгофа. Благодаря этому удается снизить порядок системы уравнений. **Под контурными токами** понимают условные (расчетные) токи, замыкающиеся в соответствующих контурах.

Рассмотрим схему на следующем рисунке, имеющую три независимых контура I, II, III. Будем считать, что в каждом контуре имеется свой контурный ток I_{I}, I_{II}, I_{III}.



I1
R4
I4
1
2
R1
R2
I5
II
E1
I2
E3
I
III
E2
R5
I3
3
R3

Пусть направление этих токов будет одинаково — по часовой стрелке. Сопоставляя контурные токи с токами ветвей, можно показать, что значения контурных токов совпадают со значениями действительных токов только во внешних ветвях:

$$I_1 = I_{\mathrm{I}}, \quad I_3 = I_{\mathrm{III}}, \quad I_4 = I_{\mathrm{II}}$$

Токи смежных ветвей равны разности контурных токов соседних контуров:

$$I_2 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}}, \quad I_5 = I_{\mathrm{II}} - I_{\mathrm{III}}$$

- Таким образом, по известным контурным токам легко можно найти действительные токи ветвей.

Для определения контурных токов цепи необходимо составить для трех контуров уравнения:

$$(R_1 + R_2) I_{\mathrm{I}} - R_2 I_{\mathrm{II}} = E_1 - E_2;$$

$$-R_2 I_{\mathrm{I}} + (R_2 + R_4 + R_5) I_{\mathrm{II}} - R_5 I_{\mathrm{III}} = E_2$$

$$-R_5 I_{\mathrm{II}} + (R_3 + R_5) I_{\mathrm{III}} = E_3$$

или в общем случае

$$R_{11}I_{\mathrm{I}} - R_{12}I_{\mathrm{II}} - R_{13}I_{\mathrm{III}} = E_{\mathrm{I}};$$

$$-R_{21}I_{\mathrm{I}} + R_{22}I_{\mathrm{II}} - R_{23}I_{\mathrm{III}} = E_{\mathrm{II}};$$

$$-R_{31}I_{\mathrm{I}} - R_{32}I_{\mathrm{II}} + R_{33}I_{\mathrm{III}} = E_{\mathrm{III}},$$

- где R_{11}, R_{22}, R_{33} - контурные сопротивления, а $E_{\mathrm{I}}, E_{\mathrm{II}}, E_{\mathrm{III}}$ — контурные ЭДС.

Решая эту систему уравнений, можно найти контурные токи, а по ним искомые токи ветвей

I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5.

Уравнения для контурных токов можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathrm{I}} \\ I_{\mathrm{II}} \\ I_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\mathrm{I}} \\ E_{\mathrm{II}} \\ E_{\mathrm{III}} \end{bmatrix}$$

или $[R][I] = [E]$.

Здесь $[R]$ — квадратная матрица коэффициентов при неизвестных контурных токах;

$[I]$ - матрица-столбец неизвестных контурных токов;

$[E]$ - матрица-столбец известных контурных ЭДС.

Решением матричного уравнения будет

- $[I] = [R]^{-1}[E]$, где $[R]^{-1}$ -матрица, обратная матрице коэффициентов $[R]$.

Диагональные элементы R_{11}, R_{22} и R_{33}

- матрицы $[R]$ называемые контурными сопротивлениями или собственными сопротивлениями контуров, равны сумме сопротивлений всех элементов, входящих в контур. Остальные элементы матрицы $[R]$ равны сопротивлениям общих ветвей смежных контуров и имеют знак минус, если направления контурных токов имеют одинаковые направления, например, по часовой стрелке. Если какие-либо контуры не имеют общих ветвей, то соответствующие элементы матрицы равны нулю.

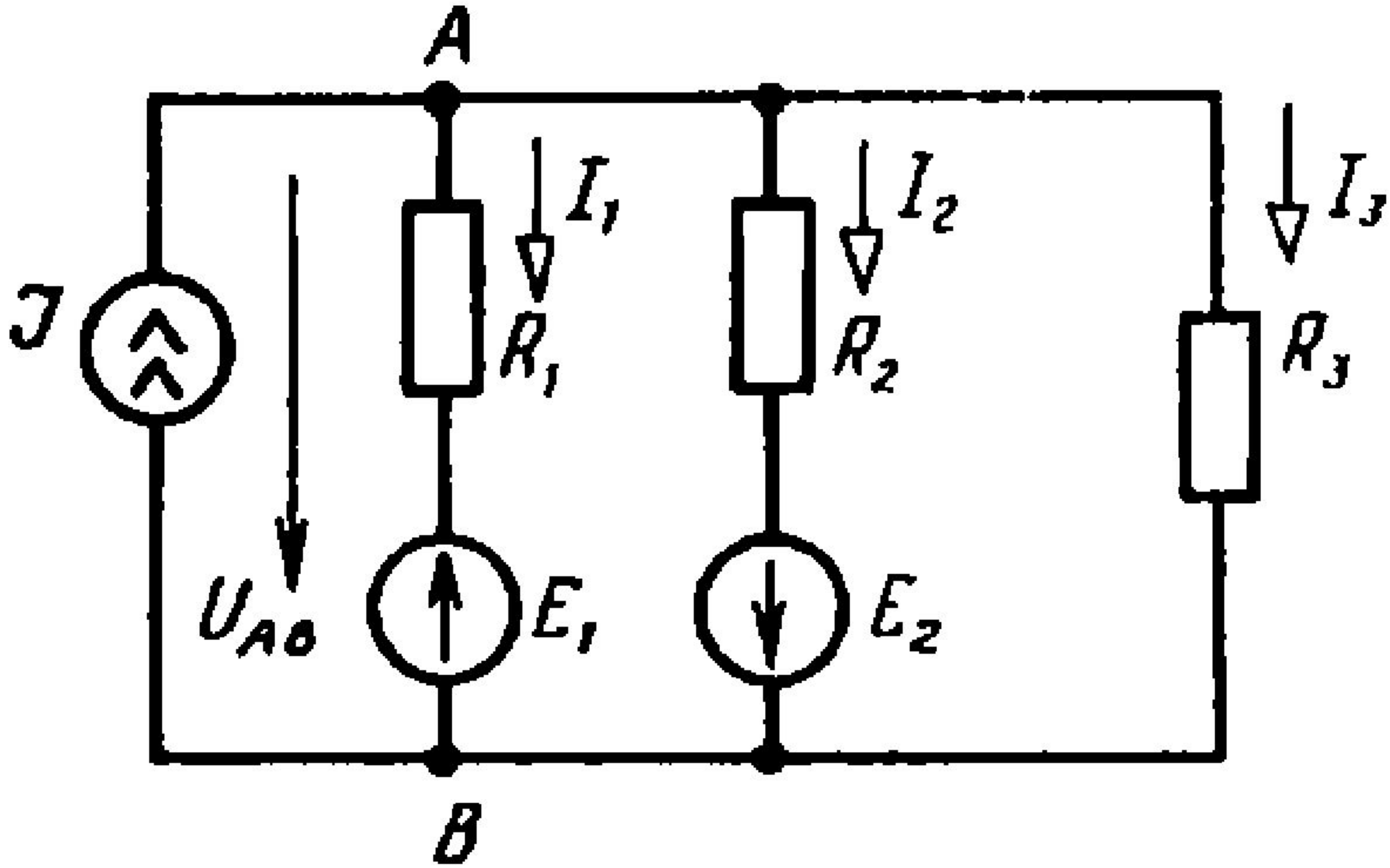
Так, для исследуемой цепи

$$R_{11} = R_1 + R_2; \quad R_{22} = R_2 + R_4 + R_5; \quad R_{33} = R_3 + R_5;$$

$$R_{12} = R_{21} = R_2; \quad R_{23} = R_{32} = R_5; \quad R_{13} = R_{31} = 0.$$

1.11. МЕТОД МЕЖДУУЗЛОВОГО НАПРЯЖЕНИЯ

В реальных электрических цепях постоянного тока очень часто несколько источников и приемников электрической энергии включаются параллельно. Схема замещения такой цепи, содержащей активные и пассивные ветви, соединенные параллельно, имеет только два узла, например, узлы *A и B* схемы на следующем рисунке.


A
I_1
I_2
I_3
J
R_1
R_2
R_3
U_{AB}
E_1
E_2
B

- Считая положительными направления токов от узла I_1, I_2 и I_3, запишем выражения для этих токов, используя закон Ома для активной ветви:

$$I_1 = (-E + U_{AB})/R_1;$$

$$I_2 = (E_2 + U_{AB})/R_2;$$

$$I_3 = U_{AB}/R_3.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, составленное по первому закону Кирхгофа

$$-J + I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

находим напряжение между узлами *A* и *B*

$$U_{AB} = \frac{E_1/R_1 - E_2/R_2 + J}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}$$

или

$$U_{AB} = \frac{E_1G_1 - E_2G_2 + J}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Если схема содержит **k** источников тока и ***m*** источников ЭДС, то напряжение U_{AB} между узлами равно

$$U_{AB} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} G_i E_i + \sum\limits_{j=1}^{k} J_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i}.$$

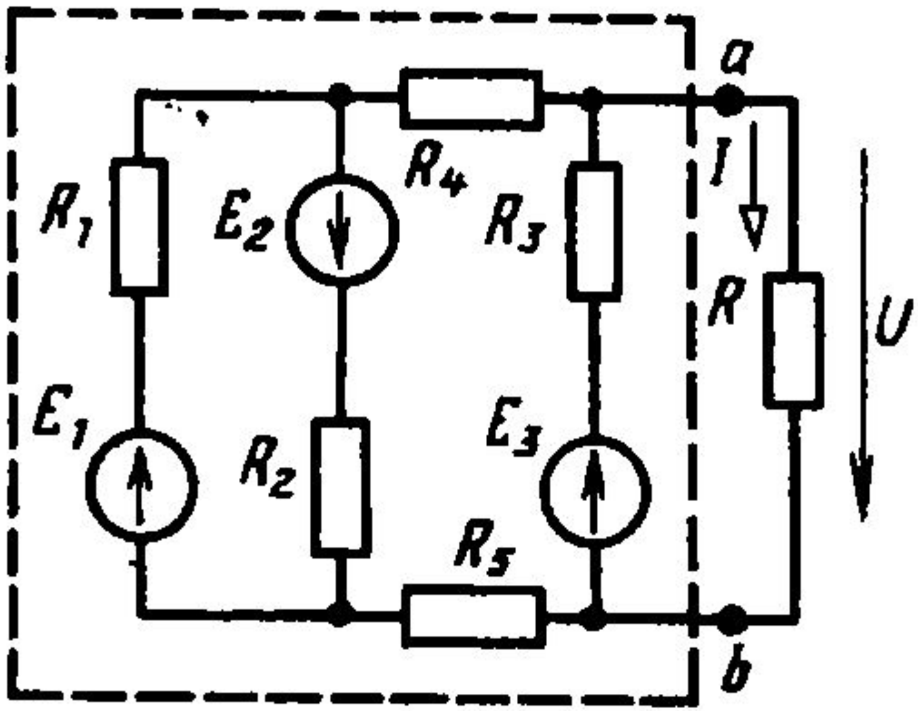
Произведения $G_i E_i$ и J_j берутся со знаком плюс, когда E_i и J_j направлены к узлу, потенциал которого условно принят за более положительный (к узлу с первым индексом).

1.12. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО АКТИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

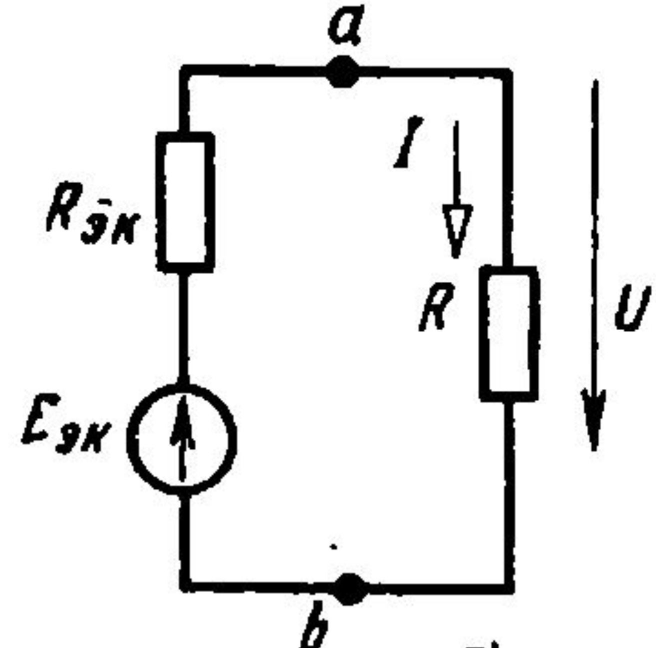
Очень часто при анализе сложных электрических цепей интересуются электрическим состоянием лишь одной ветви, причем параметры элементов этой ветви могут изменяться. В этом случае нет необходимости производить расчет всей цепи каким-либо из рассмотренных методов, а целесообразнее воспользоваться методом эквивалентного активного двухполюсника. Этот метод основан на том, что всю остальную часть цепи, кроме рассматриваемой ветви, независимо от количества активных и пассивных элементов можно заменить одним эквивалентным активным элементом (источником ЭДС или тока) и одним эквивалентным резистивным элементом.

Обоснованием данного метода является теорема об эквивалентном активном двухполюснике, которую можно сформулировать таким образом: **любой многоэлементный активный двухполюсник может быть заменен эквивалентным двухэлементным двухполюсником с параметрами** $E_{эк}$ **и** $R_{эк}$ **или** $J_{эк}$ **и** $G_{эк}$; **режим работы ветви, присоединенной к двухполюснику, при этом не изменится.**

Таким образом, любой активный двухполюсник (см. рис. *а)* можно заменить эквивалентным двухэлементным двухполюсником (см. рис. *б)* (в частном случае эквивалентным генератором) с источником ЭДС $E_{эк} = U_x$ и резистивным элементом с сопротивлением $R_{эк}$.



а)



б)

При этом ток в ветви с сопротивлением *R* можно определить по формуле:

$$I = E_{эк}/(R_{эк} + R). \qquad (1)$$

Нетрудно показать, что активный двухполюсник можно заменить также источником тока $J_{эк}$ с внутренней проводимостью $G_{эк}$.

Алгоритм нахождения тока по методу эквивалентного активного двухполюсника

можно представить следующим образом:

1) определить напряжение U_x на зажимах разомкнутой ветви;

2) заменить активный двухполюсник пассивным (убрать все источники, оставив их внутренние сопротивления, при этом необходимо помнить, что внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю, идеального источника тока — бесконечности) и определить эквивалентное сопротивление $R_{эк}$ пассивного двухполюсника;

3) найти ток в ветви по формуле (1).