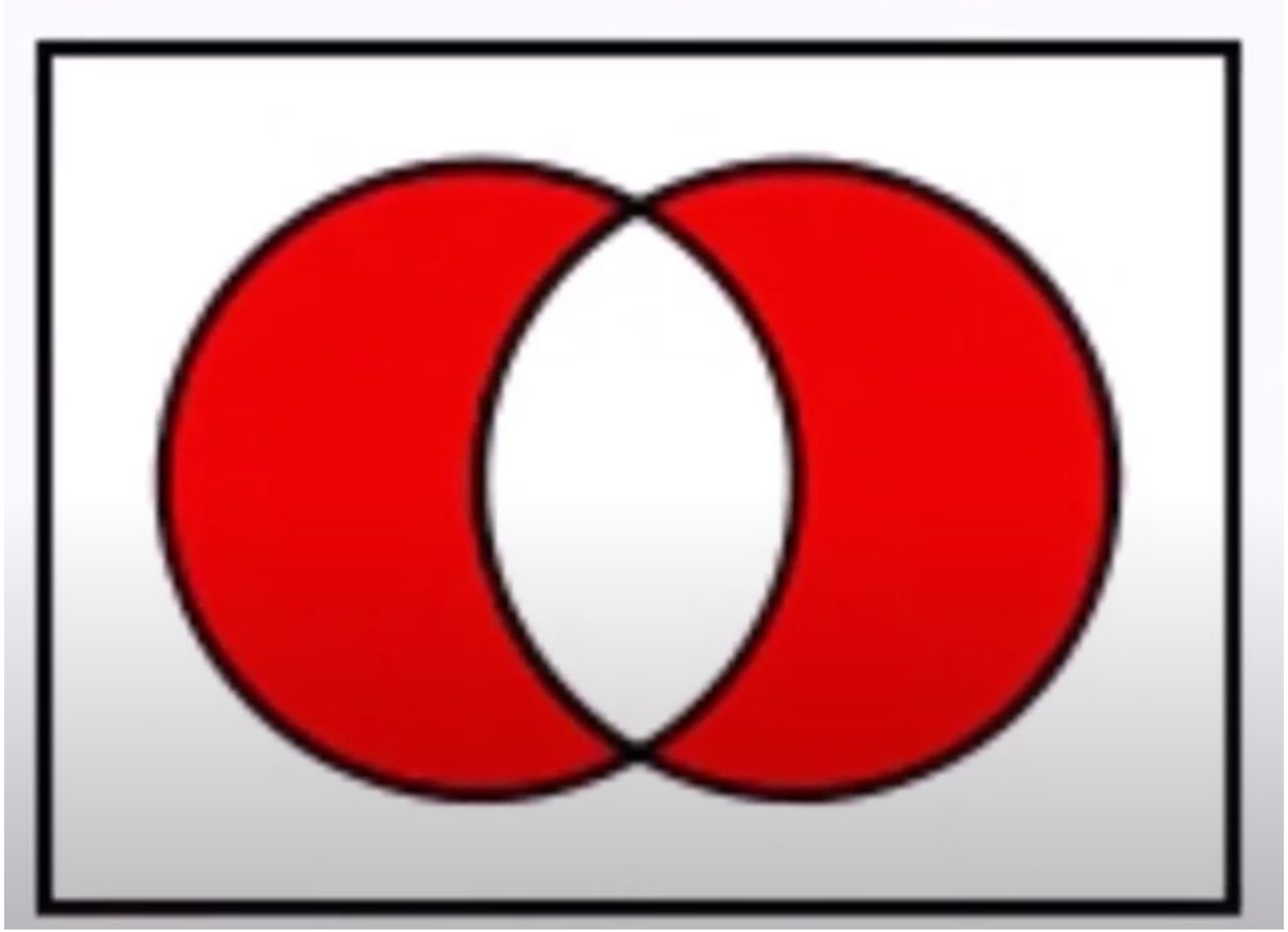
Операция двоичного сложения и её свойства. Многочлен Жегалкина

Сложением по модулю два (альтернативной дизъюнкцией, исключающим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией) высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y принимают разные значения.

Сложением по модулю два (альтернативной дизъюнкцией, исключающим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией) высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y принимают разные значения. Таблица истинности для $x \oplus y$:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Диаграмма Венна для функции «Сложение по модулю 2»



Свойства операции сложение по модулю 2

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$$

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$$

$$x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3$$

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}$$

Свойства операции сложение по модулю 2

$$x \oplus x = 0$$

$$x \oplus \overline{x} = 1$$

Операции с константами

$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}$$

Связь между дизъюнкцией
и суммой по модулю два (строгой дизъюнкцией)

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$$

Многочленом Жегалкина называется альтернативная дизъюнкция конъюнкции высказываний, самих высказываний и единицы

$$f(x;y;z) = xyz \oplus yz \oplus z \oplus x \oplus 1$$

$$g(x, y.z) = xyz \oplus xz$$

Все функции алгебры логики можно выразить через многочленом Жегалкина.

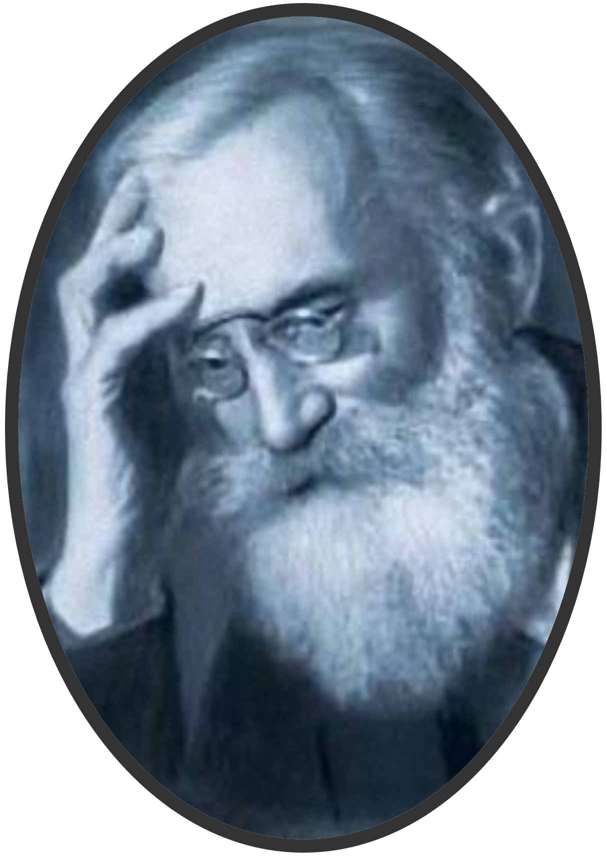
$$\overline{x} = x \oplus 1; \quad x \oplus x = 0; \quad x \vee y = xy \oplus x \oplus y;$$

$$x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1; \quad x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1;$$

$$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1$$

<u>Иван Иванович Жегалкин</u> <u>(1869-1947</u>) – российский и советский математик и логик, профессор Московского университета. Заслуженный деятель науки РСФСР один из основоположников современной математической логики. Из его открытий наибольшую известность получил так называемый полином Жегалкина. Жегалкин награжден Орденом Трудового Красного Знамени.

Жегалкин предложил в 1927 году в качестве удобного средства для представления функций булевой логики многочлен, названный **<u>полиномом Жегалкина</u>.**



Этих шести формул достаточно, чтобы преобразовывать формулы алгебры логики в многочлен Жегалкина.

$$\bar{x} = x \oplus 1; \quad x \oplus x = 0; \quad x \vee y = xy \oplus x \oplus y;$$

$$x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1; \quad x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1;$$

$$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1$$

Пример.

Записать булеву функцию $f(x,y,z)=(x\vee\bar{y})\to(z\Leftrightarrow x)$

В виде многочлена Жегалкина.

1. $\bar{x}=x\oplus 1$
2. $x\oplus x=0;$
3. $x\vee y=xy\oplus x\oplus y$
4. $x\Rightarrow y=xy\oplus x\oplus 1$
5. $x\Leftrightarrow y=x\oplus y\oplus 1$
6. $x\downarrow y=xy\oplus x\oplus y\oplus 1$
7. $x|y=xy\oplus 1$

Решение:

$$(x\vee\bar{y})\to(z\Leftrightarrow x)=(x\bar{y}\oplus x\oplus\bar{y})\to(z\oplus x\oplus 1)=$$

Избавляемся от импликации применяя формулу 4.

$$=(x\bar{y}\oplus x\oplus\bar{y})(z\oplus x\oplus 1)\oplus(x\bar{y}\oplus x\oplus\bar{y})\oplus 1=$$

Раскрываем скобки и избавляемся от инверсии, используя формулу 1.

$$=x\bar{y}z\oplus x\bar{y}x\oplus x\bar{y}\oplus xz\oplus x\oplus x\oplus\bar{y}z\oplus\bar{y}x\oplus\bar{y}\oplus x\bar{y}\oplus x\oplus$$

$$\oplus\bar{y}\oplus 1=xz(y\oplus 1)\oplus x\bar{y}\oplus x\bar{y}\oplus xz\oplus(y\oplus 1)z\oplus\bar{y}\oplus x\oplus$$

$$\oplus\bar{y}\oplus 1=xz(y\oplus 1)\oplus x\bar{y}\oplus x\bar{y}\oplus xz\oplus(y\oplus 1)z\oplus\bar{y}\oplus x\oplus$$

$$\bar{y}\oplus 1=xyz\oplus\underline{xz}\oplus\underline{xz}\oplus yz\oplus z\oplus x\oplus 1=$$

Раскрываем скобки и используем формулу 2.

$$=xyz\oplus yz\oplus z\oplus x\oplus 1$$

Получили многочлен Жигалкина

Многочлен (полином) Жегалкина

Многочлен Жегалкина для функции, содержащей две переменные:

$$P = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy\,.$$

Многочлен Жегалкина для функции, содержащей три переменные:

$$P = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 xy + \beta_5 xz + \beta_6 yz + \beta_7 xyz\,.$$

Методика представления булевой функции в виде многочлена Жегалкина

1 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

1. По таблице истинности составить систему уравнений (вместо переменных в многочлен подставить их соответствующие значения, в левой части уравнения – соответствующее этому набору значение функции).
2. Пользуясь таблицами истинности для двоичного сложения и конъюнкции, вычислить коэффициенты β_i.
3. Подставить в многочлен значения коэффициентов.

Пример. Методом неопределенных коэффициентов построить многочлен Жегалкина для функции $f(x,y) = x \vee y$.

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Для двух переменных полином Жегалкина имеет вид:

$$P = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy\,.$$

Для каждой строчки таблицы истинности записываем выражение значение функции, подставляя значения переменных ***x*** и ***y***

Выписываем систему уравнений для коэффициентов $\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$:

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 = \beta_0 + \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \cdot 0 \cdot 0\,; \\ f(0,1) = 1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 1 + \beta_3 \cdot 0 \cdot 1\,; \\ f(1,0) = 1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \cdot 1 \cdot 0\,; \\ f(1,1) = 1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 1 + \beta_3 \cdot 1 \cdot 1\,; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \beta_0 = 0\,; \\ \beta_0 + \beta_2 = 1\,; \\ \beta_0 + \beta_1 = 1; \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1\,. \end{cases}$$

Получаем $\beta_0 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Следовательно, $x \vee y = x + y + xy$.

Пример 2. Построить полином Жегалкина для функции $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1x_2 \vee x_3) \to \overline{x}_2$.
Используя метод неопределённых коэффициентов.

Решение. Построим таблицу истинности

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$x_1x_2 \vee x_3$	$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1x_2 \vee x_3) \to \overline{x}_2$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Общий вид полинома Жегалкина для функции трех переменных:

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = a_0 \bigoplus a_1x_1 \bigoplus a_2x_2 \bigoplus a_3x_3 \bigoplus a_{12}x_1x_2 \bigoplus a_{13}x_1x_3 \bigoplus a_{23}x_2x_3 \bigoplus a_{123}x_1x_2x_3.$$

Последовательно подставляем наборы значений переменных и находим коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{123}$.

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$x_1x_2 \vee x_3$	$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1x_2 \vee x_3) \to \overline{x}_2$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

$f(0,\ 0,\ 0) = a_0 = 1;$

$f(0,\ 0,\ 1) = a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0;$

$f(0,\ 1,\ 0) = a_0 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0;$

$f(0,\ 1,\ 1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus a_{23} = 0 \Rightarrow a_{23} = 1;$

$f(1,\ 0,\ 0) = a_0 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0.$

$f(1,\ 0,\ 1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow a_{13} = 0;$

$f(1,\ 1,\ 0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12} = 0 \Rightarrow 1 \oplus a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12} = 1;$

$f(1,\ 1,\ 1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{123} = 0 \Rightarrow 1 \oplus a_{123}$
$= 0 \Rightarrow a_{123} = 1;$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем полином Жегалкина

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3.$$

Метод неопределенных коэффициентов

(по таблице истинности или вектору значений функции)

xyz	f	$= a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_{12} xy \oplus a_{13} xz \oplus a_{23} yz \oplus a_{123} xyz$	a
000	1	$= a_0$	$a_0 = 1$
001	1	$= a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3$	$a_3 = 0$
010	0	$= a_0 \oplus a_2 = 1 \oplus a_2$	$a_2 = 1$
011	0	$= a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
100	1	$= a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus a_1$	$a_1 = 0$
101	0	$= a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 1$
110	1	$= a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
111	1	$= a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 1$

$$P = 1 \oplus y \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$$

Пример 1

xyzf	x ∧ (y →z)	a
0000	$=a_0$	$a_0=0$
0010	$=0\oplus a_3$	$a_3=0$
0100	$=0\oplus a_2$	$a_2=0$
0110	$=0\oplus 0\oplus 0\oplus a_{23}$	$a_{23}=0$
1001	$=0\oplus a_1$	$a_1=1$
1011	$=0\oplus 1\oplus 0\oplus a_{13}$	$a_{13}=0$
1100	$=0\oplus 1\oplus 0\oplus a_{12}$	$a_{12}=1$
1111	$=0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus a_{123}$	$a_{123}=1$

$$P=x\oplus xy\oplus xyz$$

Пример 2

x	y	z	f	$x \downarrow (y \mid z)$	a
0	0	0	0	$= a_0$	$a_0 = 0$
0	0	1	0	$= 0 \oplus a_3$	$a_3 = 0$
0	1	0	0	$= 0 \oplus a_2$	$a_2 = 0$
0	1	1	1	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 1$
1	0	0	0	$= 0 \oplus a_1$	$a_1 = 0$
1	0	1	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 0$
1	1	0	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 0$
1	1	1	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 1$

$$P = yz \oplus xyz$$

Пример 3

x	y	z	f	$x \downarrow (y \leftrightarrow z)$	a
0	0	0	0	$= a_0$	$a_0 = 0$
0	0	1	1	$= 0 \oplus a_3$	$a_3 = 1$
0	1	0	1	$= 0 \oplus a_2$	$a_2 = 1$
0	1	1	0	$= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
1	0	0	0	$= 0 \oplus a_1$	$a_1 = 0$
1	0	1	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 1$
1	1	0	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
1	1	1	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 0$

$$P = y \oplus z \oplus xy \oplus xz$$

Пример 4

x	y	z	f	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	a
0	0	0	1	$= a_0$	$a_0 = 1$
0	0	1	0	$= 1 \oplus a_3$	$a_3 = 1$
0	1	0	0	$= 1 \oplus a_2$	$a_2 = 1$
0	1	1	1	$= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
1	0	0	1	$= 1 \oplus a_1$	$a_1 = 0$
1	0	1	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 1$
1	1	0	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
1	1	1	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 0$

$$P = 1 \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz$$

Пример 5

x	y	z	f	$x \mid (y \leftrightarrow z)$	a
0	0	0	1	$= a_0$	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$= 1 \oplus a_3$	$a_3 = 0$
0	1	0	1	$= 1 \oplus a_2$	$a_2 = 0$
0	1	1	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
1	0	0	0	$= 1 \oplus a_1$	$a_1 = 1$
1	0	1	1	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 1$
1	1	0	1	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
1	1	1	0	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 0$

$$P = 1 \oplus x \oplus xy \oplus xz$$

Дополнительное задание.

Пусть функция задана вектором значений
$f = (11001011)$.

Найти полином Жегалкина.

Рассмотрим пример.

Разложить функцию f(x, y, z) = (01101000).

Составим полином $P(x, y, z) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 xy + \beta_5 xz + \beta_6 yz + \beta_7 xyz.$

Составляя уравнения, нулевые конъюнкции будем исключать:

№1 = 2^{3-3}: (001): 0 = $b_0 + b_3$;

№2 = 2^{3-2} : (010): 1= b_0+b_2;

№3 = $2^{3-2}+2^{3-3}$: (011): 1= $b_0+b_2+b_3+b_6$;

№4 = 2^{3-1}: (100): 0= b_0+b_1;

№5 = $2^{3-1}+2^{3-3}$: (101): 1 = $b_0+b_1+b_3+b_5$;

№6 = $2^{3-1}+2^{3-2}$: (110): 0 = $b_0+b_1+b_2+b_4$;

№7: (111): 0= $b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7$;

№8: (000): 0 = b_0.

Решая систему , получим вектор коэффициентов: (0,0,1,0,1,1,0,1), тогда функция раскладывается в полином:

P(x,y,z) = 0 + y +xy + xz +xyz.

Проверку можно выполнить, составив таблицу истинности для полинома.

Построение полинома по формуле.

Данный метод основан на применении равносильных преобразований данной булевой функции, представленной в виде формулы, к виду полинома.

Алгоритм построения полинома по формул:

1. заменить формулу равносильной, содержащей только операции конъюнкцию и отрицание;

2. снять отрицания, пользуясь равносильностью: $x + 1 \equiv \bar{x};$

3. раскрыть скобки:

4. упростить, используя идемпотентность : x+x =0, равносильность x+0=x.

Рассмотрим примеры.

$$1.\ x \mid y \downarrow z \equiv \overline{\overline{xy} \vee z} \equiv xy\bar{z} \equiv xy(z + 1) \equiv xyz + xy,$$

$$2.\ (x \to y)(y \downarrow z) \equiv (\bar{x} \vee y)\overline{y \vee z} \equiv \overline{x\bar{y}}\,\bar{y}\bar{z} \equiv (x(y + 1) + 1)(y + 1)(z + 1) \equiv$$
$$\equiv (xy + x + 1)(yz + y + z + 1) \equiv xyz + xy + xyz + xy + xyz + xy + xz + x + yz + y + z + 1 \equiv$$
$$\equiv xyz + xy + xz + yz + 1.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Построить таблицу истинности для формулы $A \equiv (((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$. Составить для данной формулы КНФ и ДНФ.

2. Методом неопределенных коэффициентов разложить функции в полиномы: а) f(x,y,z)= (01001110); б) f(x,y,z) = (11000101); в) f(x,y)= (0101); г) f(x,y)=(1011)

3. Методом неопределенных коэффициентов и путем равносильных преобразований построить полиномы для формул: а) x®y; б) (x|y)¯z; в) (x®y)(y¯z); г) ((x®y)v$\bar{z}$)|x.