Применение производной

в физике

НАПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ФИЗИКЕ:

- Скорость материальной точки
- Мгновенная скорость как физический смысл производной
- Мгновенное значение силы переменного тока
- Мгновенное значение ЭДС электромагнитной индукции
- Максимальная мощность

СКОРОСТЬ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть зависимость пути s от времени t в данном прямолинейном движении материальной точки выражается уравнением $s = f(t)$ и t_0 -некоторый момент времени. Рассмотрим другой момент времени t, обозначим $\Delta t = t - t_0$ и вычислим приращение пути:$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Отношение $\Delta s / \Delta t$ называют средней скоростью движения за

время Δt, протекшее от исходного момента t_0. Скоростью называют предел этого отношения при $\Delta t \to 0$.

Среднее ускорение неравномерного движения в интервале $(t; t + \Delta t)$ - это величина <a>=$\Delta v / \Delta t$. Мгновенным ускорением материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

То есть первая производная по времени (v'(t)).

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением:

$s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$

$C = 0{,}1$ м/с, $D = 0{,}03$ м/с^2.

Определить время после начала движения, через которое ускорение тела будет равно 2 м/с^2.

Решение:

$v(t) = s'(t) = B + 2Ct + 3Dt^2$;

$a(t) = v'(t) = 2C + 6Dt = 0{,}2 + 0{,}18t = 2$;

$1{,}8 = 0{,}18t$; $t = 10$ с

МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ КАК ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Физический смысл производной x`(t) от непрерывной функции x(t) в точке t_0 – есть мгновенная скорость изменения величины функции, при условии, что изменение аргумента Δt стремится к нулю.

Мгновенная скорость (величина пути, пройденного за мгновение) и есть производная величина от функции, описывающей путь самолёта по времени. Мгновенная скорость - это и есть физический смысл производной

МГНОВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭДС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Согласно закону электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Например, при равномерном вращении проводящего контура площадью S в однородном магнитном поле с индукцией B с угловой скоростью ω, магнитный поток, пронизывающий данный контур, изменяется по закону

$$\Phi = BS\cos\omega t.$$

Тогда

$$I = -\frac{dq}{dt} = -q_0\omega\sin\omega t.$$

МГНОВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ СИЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Например, при электромагнитных колебаниях, возникающих в колебательном контуре заряд на обкладках конденсатора изменяется

по закону

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Тогда

$$q = q_0 \cos\omega t.$$

$$I = -\frac{dq}{dt} = -q_0\omega \sin\omega t.$$

Максимальная мощность

Мощность тока

$$P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R .$$

Известно, что функция имеет экстремум (max или min) в точке в которой ее производная равна нулю. В данном случае

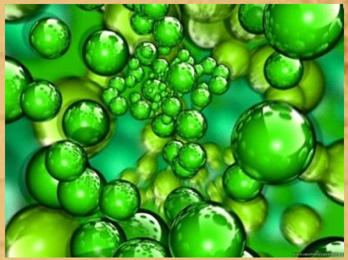
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R\right] = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^3} = 0 .$$

Из решения полученного уравнения следует, что максимальная мощность при нагрузке может быть достигнута, если ее сопротивление R равно внутреннему сопротивлению источника тока r. Т.е.

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}, \text{ если } R = r .$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Теплота



Задача. Вычислить количество теплоты, которое необходимо для того, чтобы нагреть 1 кг вещества от 0 градусов до t градусов (по Цельсию).

РЕШЕНИЕ

Пусть $Q=Q(t)$.

- Рассмотрим малый отрезок $[t;\ t+\Delta t]$,

на этом отрезке

- $\Delta Q=c(t) \bullet \Delta t$
- $c(t)= \Delta Q/\Delta t$
- При $\Delta t\to 0$ $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta Q/\Delta t =Q'(t)$

$$c(t)=Q'(t)$$

Заряд

Задача. Вычислить силу тока I, который несет на себе заряд, заданный зависимостью $q=q_m \cos \omega_0 t$ (Кл) через поперечное сечение проводника.

Таким образом, применение производной довольно широко.

В связи с быстрой эволюцией вычислительных систем, дифференциальное исчисление становиться всё более актуальным в решении как простых, так и сверхсложных задач.