

# *Дробно-линейная функция и ее график*

**Лучший способ изучить что – либо – это  
открыть самому.  
Д.Поля**

**Цель работы:** изучить соответствующие теоретические материалы, выявить алгоритм построения графиков дробно-линейной.

**Задачи:** 1. сформировать понятия дробно-линейной функций на основе теоретического материала по данной теме;

2. найти методы построения графиков дробно-линейной функции;

3. показать, как можно использовать, полученные знания на практике .

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Функцию, заданную формулой вида  $y = (ax + b) / (cx + d)$ , где  $x$  - переменная,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  - заданные числа, при  $c \neq 0$ ,  $bc - ad \neq 0$  называется

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ.



Графиком дробно-линейной функции является гипербола



# ПЛАН ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

- *ВЫДЕЛЯЕМ ИЗ ДРОБИ ЦЕЛУЮ ЧАСТЬ*
- *ОПРЕДЕЛЯЕМ АСИМПТОТЫ*
- *СТРОИМ ГРАФИК  $y = k/x$  НА АСИМПТОТАХ КАК НА ОСЯХ*

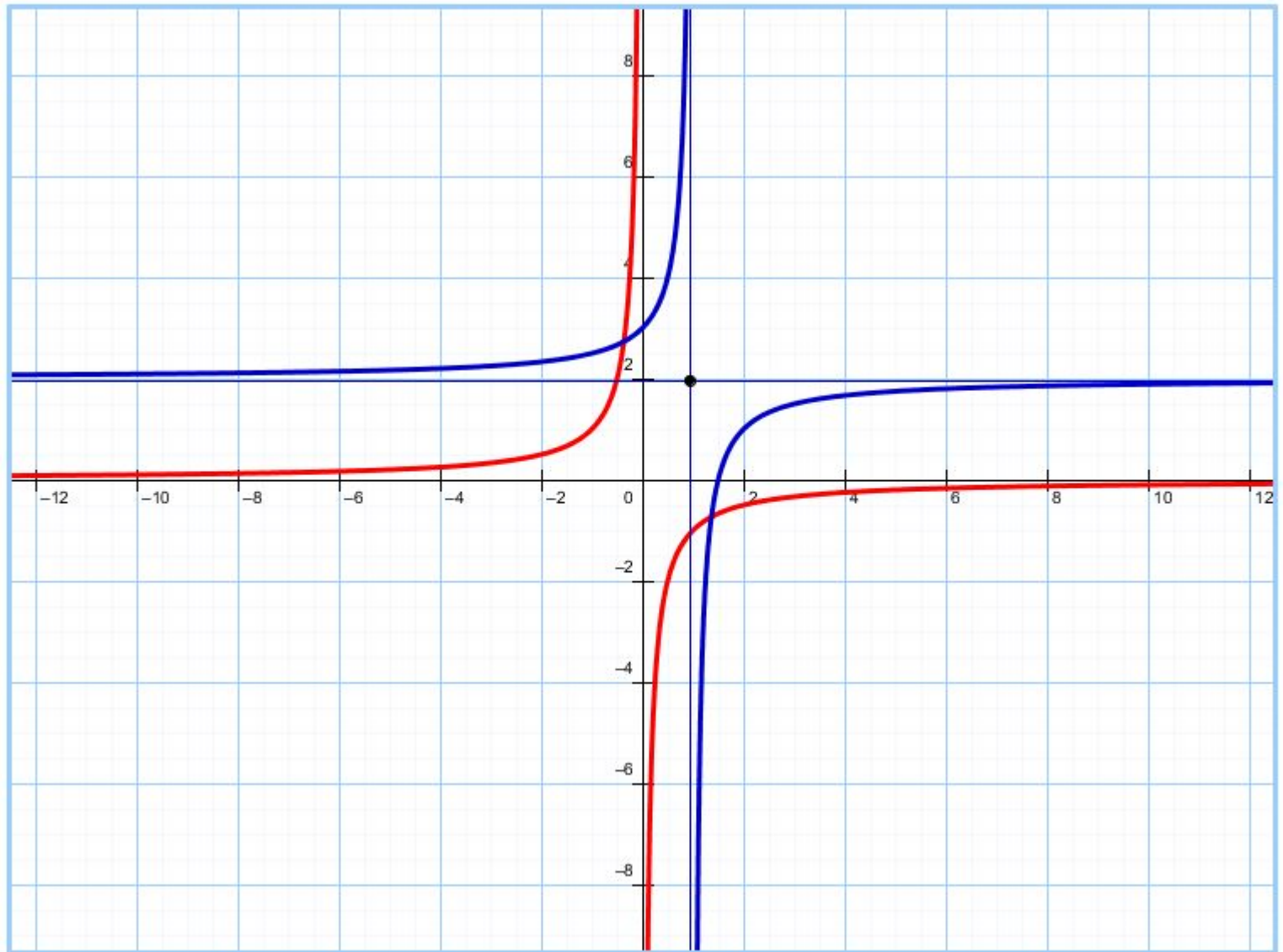


# ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ

**ЗАДАНИЕ:** Построить график функции  $y = (2x-3)/(x-1)$

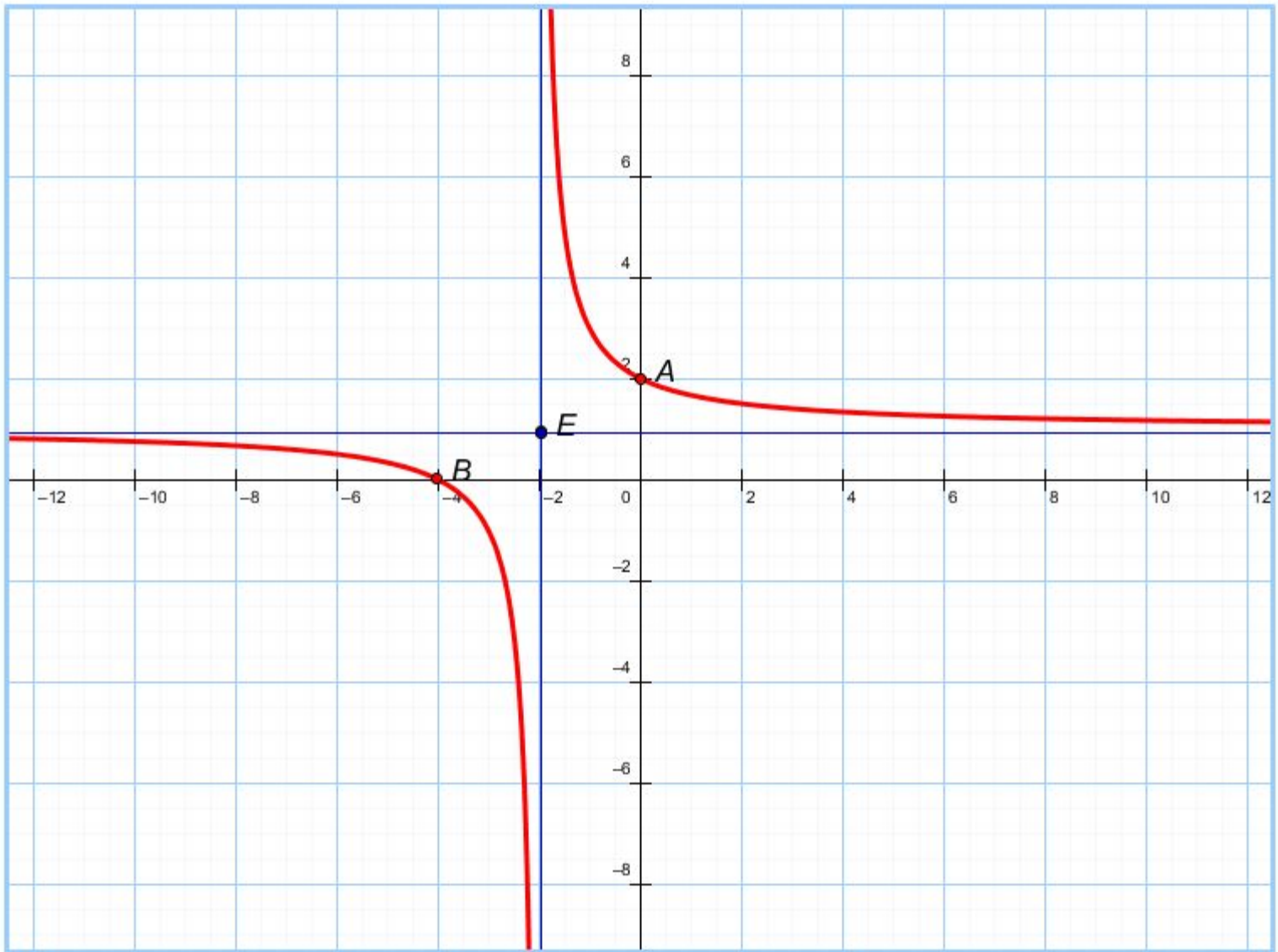
- Выделим целую часть:  $(2x-3)/(x-1) = (2x-2-1)/(x-1) = 2 - 1/(x-1)$
- Получаем функцию вида  $y = -1/(x-1) + 2$
- Асимптотами являются прямые  $x = 1$  и  $y = 2$
- Строим асимптоты, а затем на них как на осях построим график функции  $y = -1/x$
- График на следующем слайде





## Рассмотрим еще один способ построения графика функции $y = (x+4)/(x+2)$

- Для этого найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Предположим,  $x=0$  и определим точку пересечения с осью ординат  $y = 2$ . Теперь предположим,  $y = 0$ , получим уравнение  $0=x+4$  и найдем точку пересечения с осью абсцисс  $x = -4$ . Построим точки  $A(0;2)$  и  $B(-4;0)$ .
- Определим асимптоты графика функции. Вертикальную асимптоту находим из условия, что функция не определена, т.е.  $x+2=0$ , откуда  $x=-2$ . Поведение функции при больших значениях  $x$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) определяет горизонтальную асимптоту. При таких значениях  $x$  в числителе дроби можно пренебречь числом 4, в знаменателе числом 2. Тогда получаем горизонтальную асимптоту  $y = 1$ . Построим асимптоты графика  $x = -2$  и  $y = 1$ .
- При построении графика функции учтем:
- Ветви графика симметричны относительно точки  $E$  пересечения асимптот;
- График функции не пересекает асимптоты.





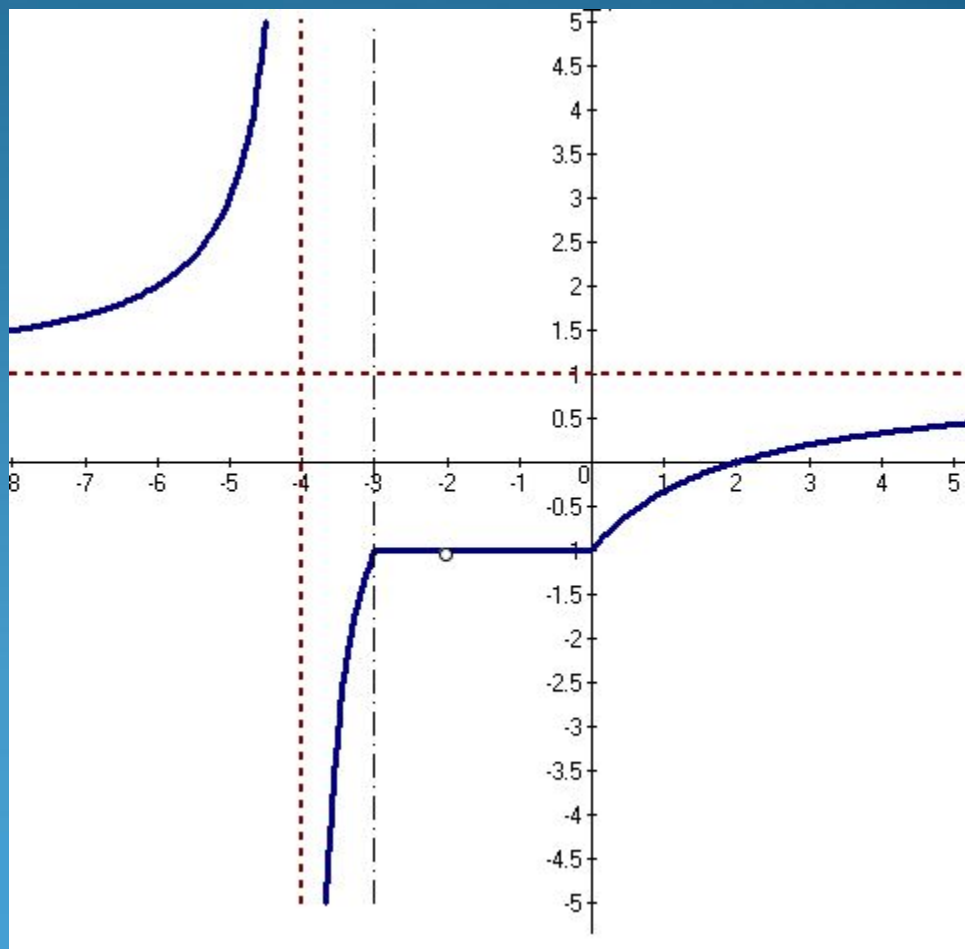
$$y = (|x| - 2) / (|x + 3| - 1).$$

Раскроем знаки модуля и  
Получим:

$$y = \begin{cases} (x+2)/(x+4), & x < -3 \\ -(x+2)/(x+2), & -3 \leq x < 0 \\ (x-2)/(x+2), & x > 0 \end{cases}$$

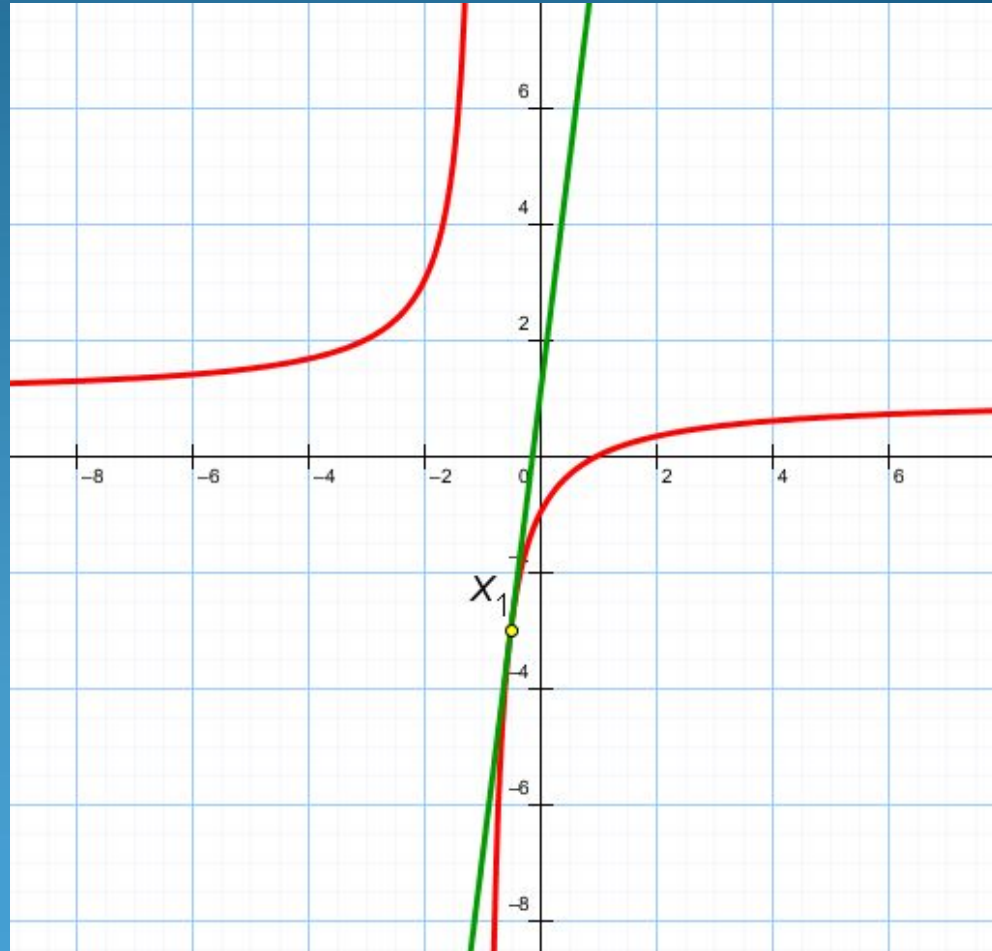
Построим графики  
полученных функций: на  
промежутке  $(-\infty; -3)$   
гиперболу  $y = (x+2)/(x+4)$ ;  
На отрезке  $[-3; 0]$  прямую  
 $y = -(x+2)/(x+2)$ , учитывая  
что в точке  $x = -2$  функция  
не существует;

На промежутке  $(-3; \infty)$   
гиперболу  $y = (x-2)/(x+2)$ .



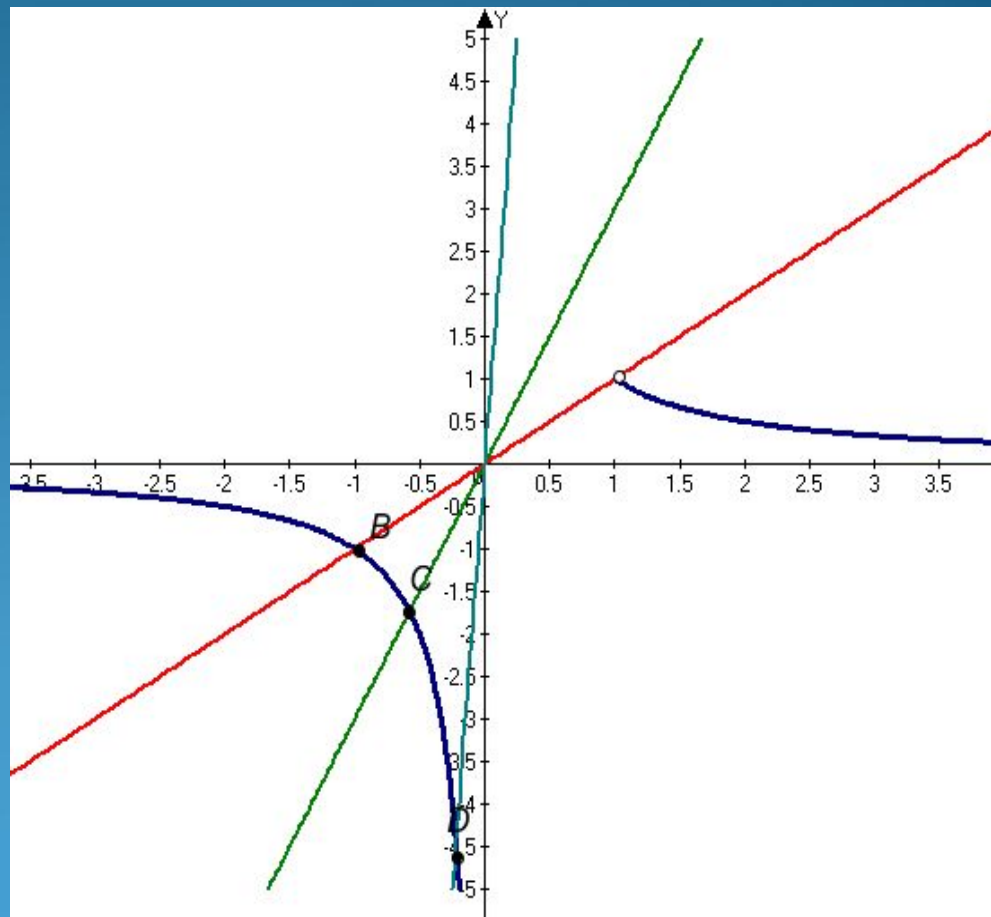
При каком значении параметра  $a$  прямая  $y = ax + 1$  касается графика функции  $y = (x-1)/(x+1)$ ? Найти координаты точки касания. Изобразить графически.

- Мы уже знаем, что графиком функции  $y = (x-1)/(x+1)$  - является гипербола с вертикальной асимптотой  $x=-1$  и горизонтальной асимптотой  $y=1$ .
- Графиком функции  $y = ax+1$  является прямая. Координаты точки касания должны удовлетворять системе уравнений  $y = \begin{cases} ax+1 \\ (x-1)/(x+1) \end{cases}$
- При этом система должна иметь единственное решение.



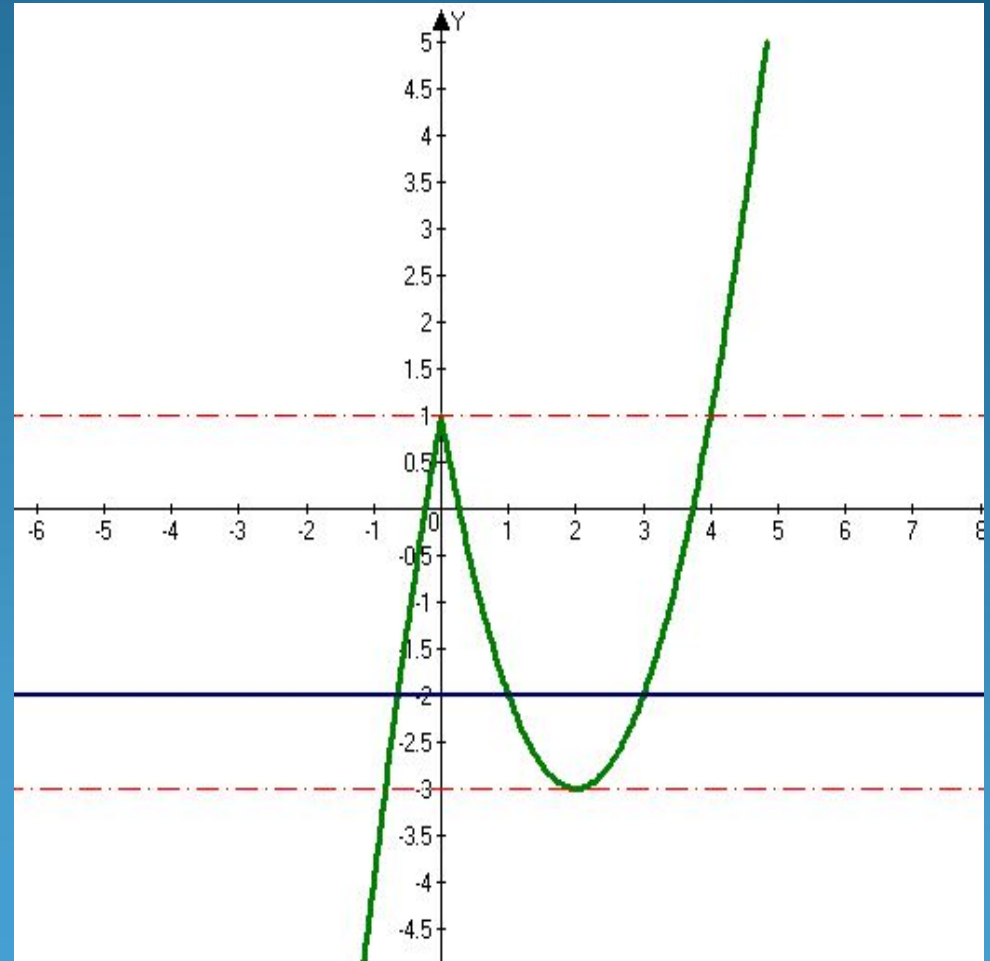
Постройте график функции  $y = (x-1)/(\sqrt{x^2-x})^2$  и найдите все значения  $k$ , при которых прямая  $y = kx$  имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

- Найдем область определения данной функции
- $x^2 - x > 0$  или  $x(x - 1) > 0$
- Откуда получаем  $x < 0$  и  $x > 1$ .
- Преобразуем функцию .
- $(x-1)/(\sqrt{x^2-x})^2 = (x-1)/(x \cdot (x-1)) = 1/x$
- Значит наша функция на своей ООФ принимает вид  $y = 1/x$ .
- Прямая  $y = kx$  имеет с графиком данной функции одну общую точку при  $k \geq 1$ .
- Это задание из второй части, за правильное решение, которого можно получить максимальный балл (4 балла).



Постройте график функции  $y = |x|(x-4) + 1$  и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком ровно три общие точки.

- ООФ являются все действительные числа.
- Раскроем знак модуля:  
$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 1, & \text{если } x \geq 0 \\ -x^2 + 4x + 1, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$
- Графиком каждой из этих функций является парабола.
- Находим координаты вершин парабол, нули функций и точки пересечения с осью  $y$ . По этим характерным точкам строим график полученной функции, учитывая знаки модуля.
- По графику видно, что прямая  $y = m$ , имеет ровно три общие точки, при  $m \in (-3; 1)$



## Найдите промежутки возрастания и убывания функции

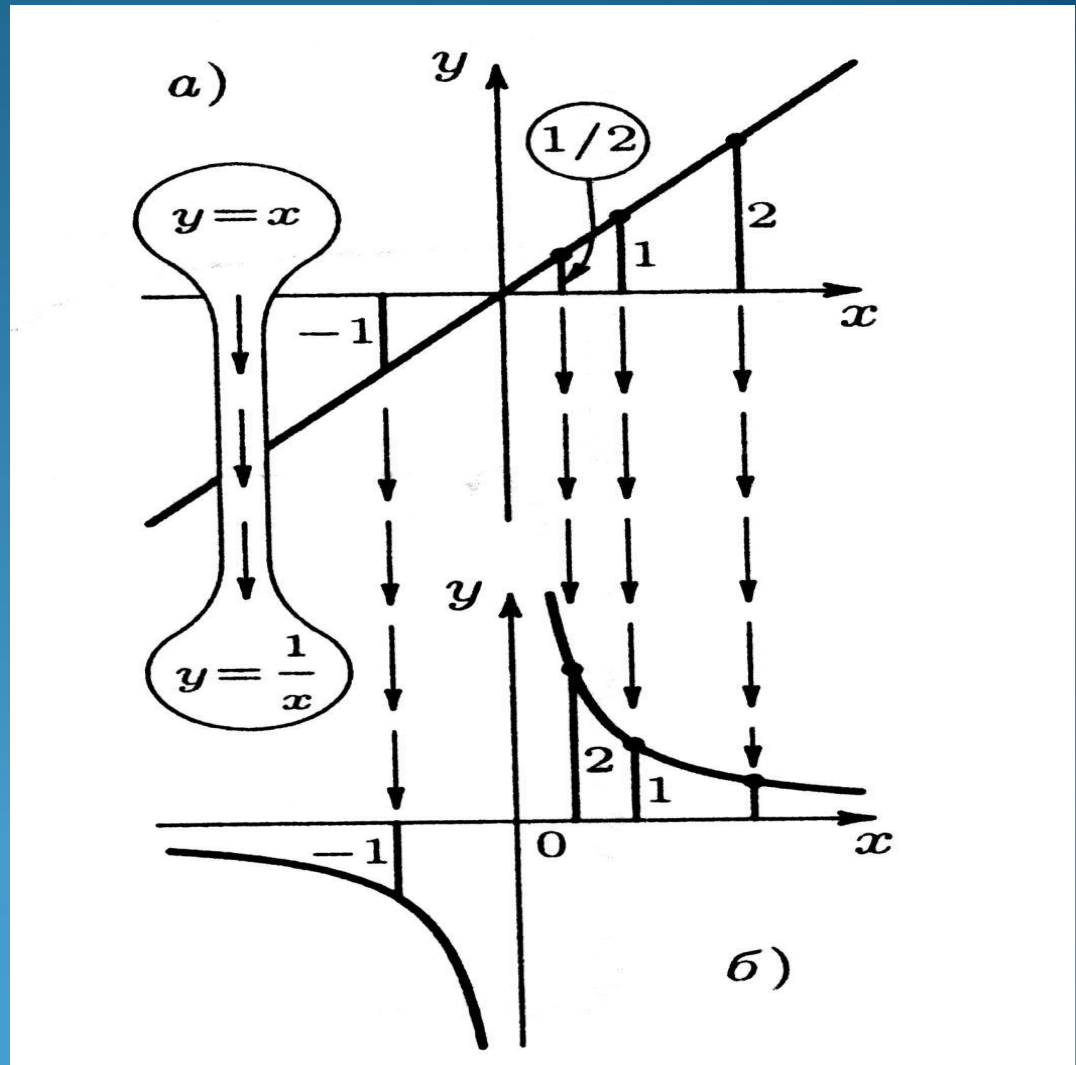
$$y = 2x + 3|x-1| - 4|x+2| - 1$$

- Рассмотрим еще одну задачу из второй части, которая также оценивается максимальным баллом:
- Найдем нули функции:  $x-1=0$ , и следовательно  $x=1$ ;  $x+2=0$ , и следовательно  $x=-2$ .
- Раскроем знаки модуля на каждом промежутке:
- При  $x \leq -2$  получаем  $y = 2x - 3(x-1) + 4(x+2) - 1 = 3x + 10$  – функция возрастает;
- При  $-2 \leq x \leq 1$  получаем  $y = 2x - 3(x-1) - 4(x+2) - 1 = -5x - 6$  – функция убывает;
- При  $x \geq 1$  получаем  $y = 2x + 3(x-1) - 4(x+2) - 1 = x - 12$  – функция возрастает.
- Ответ: функция возрастает на промежутках  $(-\infty; -2]$  и  $[1; \infty)$ , функция убывает на промежутке  $[-2; 1]$ .

## Ещё один приём построения графиков

График функции  $y=1/x$  можно построить несколько иначе. Нарисуем график функции  $y=x$ . Заменяем каждую ординату величиной, ей обратной, и отметим соответствующие точки на рисунке. Получим график  $y=1/x$ . Нарисованная картина показывает, как маленькая (по абсолютной величине) ордината первого графика превращается в большие ординаты второго и, наоборот - большие ординаты первого в маленькие ординаты второго. Точки с ординатами, равными 1 и (-1), остаются на месте.

Этот приём "деления" графиков бывает полезен всегда, когда у нас есть график  $y=f(x)$ , а нам нужно понять, как ведёт себя функция  $y=1/f(x)$ .



# Заключение

- При выполнении реферативной работы:
- - уточнила свои понятия дробно-линейной функций и выяснила, что является графиком этой функции:
- **Определение 1.**
- Дробно-линейная функция – это функция вида  $y = (ax+b)/(cx+d)$ , где  $x$  – переменная,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , и  $d$  – заданные числа, причем  $c \neq 0$  и  $bc - ad \neq 0$ .
- - сформировала алгоритм построения графиков этих функций;
- -рассмотрела несколько методов построения графиков;
- - научилась работать с дополнительной литературой и материалами, производить отбор научных сведений;
- - произвела разбор типовых заданий из второй части экзаменационных работ;
- - приобрела опыт выполнения графических работ на компьютере;
- - научилась составлять проблемно – реферативную работу.