19.05.21.

Тема:
Понятие многогранника. Вершины, ребра,
Грани многогранника. Призма. Правильная призма. Пирамида. Площадь полной и боковой поверхности призмы и пирамиды.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1433
https://infourok.ru/videouroki/1434
https://infourok.ru/videouroki/1435
https://infourok.ru/videouroki/1437

Теоретическая часть:

Прочитать.

Теоремы и определения

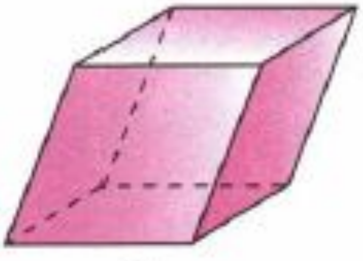
(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

27 Понятие многогранника

В главе I мы рассмотрели тетраэдр и параллелепипед: тетраэдр — поверхность, составленная из четырех треугольников (рис. 70, *а*), параллелепипед — поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 70, *б*). Каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства.

а)

Тетраэдр



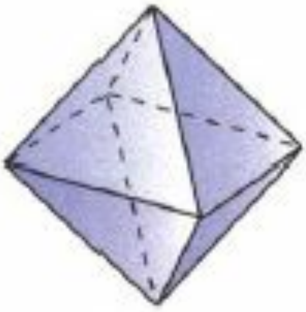
б)

Параллелепипед

Рис. 70

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть **многогранной поверхностью** или **многогранником**. Тетраэдр и параллелепипед — примеры многогранников. На рисунке 71 изображен еще один многогранник — **октаэдр**. Он составлен из восьми треугольников. Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями***. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники (рис. 70, *а* и 71), гранями параллелепипеда — параллелограммы (рис. 70, *б*). Стороны граней называются **ребрами**, а концы ребер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется **секущей плоскостью**, а общая часть многогранника и секущей плоскости — **сечением** многогранника.



Октаэдр

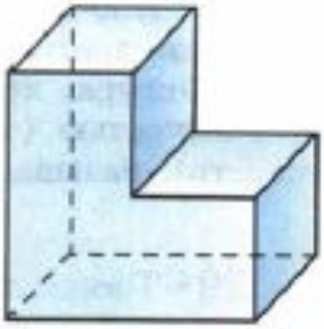
Рис. 71

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**. Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр — выпук-

* При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости.

лые многогранники. На рисунке 72 изображен невыпуклый многогранник.

Ясно, что все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Отметим также, что в **выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°** (см. п. 26). Рисунок 73 поясняет это утверждение: многогранник «разрезан» вдоль ребер и все его грани с общей вершиной A развернуты так, что оказались расположенными в одной плоскости α. Видно, что сумма всех плоских углов при вершине A, т. е. $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, меньше 360°.



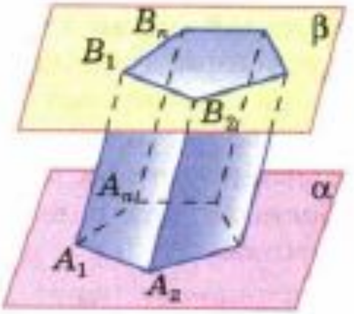
Невыпуклый многогранник

Рис. 72

30 Призма

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 76). Каждый из n четырехугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \dots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$



Призма. Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ — основания призмы. Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, …, $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани

Рис. 76

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 — по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью (п. 11).

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой** (см. рис. 76).

Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются **основаниями**, а параллелограммы (1) — **боковыми гранями** призмы. Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются **боковыми ребрами** призмы. Эти ребра как противоположные стороны параллелограммов (1), последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны. Призму с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ и называют ***n*-угольной призмой**. На рисунке 77 изображены треугольная и шестиугольная призмы, а на рисунке 70, *б* — четырехугольная призма, являющаяся параллелепипедом.

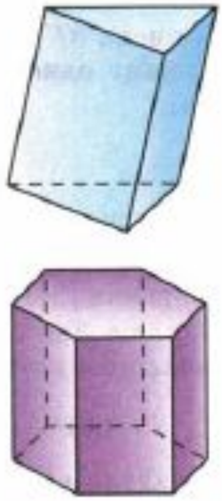


Рис. 77

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** призмы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае — **наклонной**. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники (объясните почему). На рисунке 77 изображена правильная шестиугольная призма.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности призмы** — сумма площадей ее боковых граней. Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

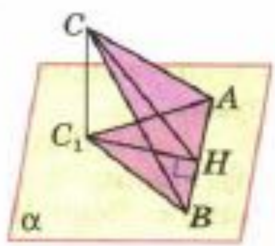
Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство

Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр P. Итак, $S_{\text{бок}} = Ph$. Теорема доказана.



а)

32 Пирамида

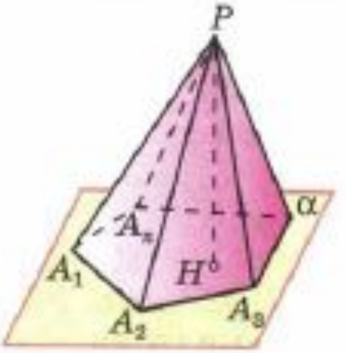
Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис. 80):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ \dots,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$

Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и n треугольников (1), называется **пирамидой**. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется **основанием**, а треугольники (1) — **боковыми гранями** пирамиды. Точка P называется **вершиной** пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — ее **боковыми ребрами**. Пирамиду с основанием $A_1A_2 \dots A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2 \dots A_n$ — и называют n-угольной пирамидой. На рисунке 81 изображены четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида — это тетраэдр.

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется **высотой** пирамиды. На рисунке 80 отрезок PH является высотой пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т. е. основания и боковых граней), а **площадью боковой поверхности пирамиды** — сумма площадей ее боковых граней. Очевидно, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$.



Пирамида. Многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ — основание пирамиды. Треугольники A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 — боковые грани, P — вершина пирамиды

Рис. 80

Рис. 81

33 Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания*, является ее высотой (рис. 82).

* Напомним, что центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него окружности.

Докажем, что **все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.**

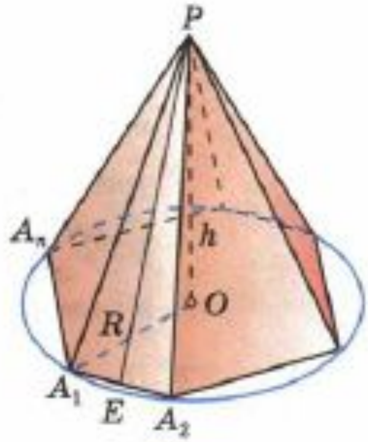


Рис. 82

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ (см. рис. 82). Сначала докажем, что все боковые ребра этой пирамиды равны. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота PO пирамиды, а другим — радиус описанной около основания окружности (например, боковое ребро PA_1 — гипотенуза треугольника OPA_1, в котором $OP = h$, $OA_1 = R$). По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{h^2 \quad R^2}$, поэтому

$$PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n.$$

Мы доказали, что боковые ребра правильной пирамиды $PA_1A_2 \dots A_n$ равны друг другу, поэтому боковые грани — равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, так как $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой**. На рисунке 82 отрезок PE — одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажем теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель $\frac{1}{2}d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т. е. его периметр. Теорема доказана.

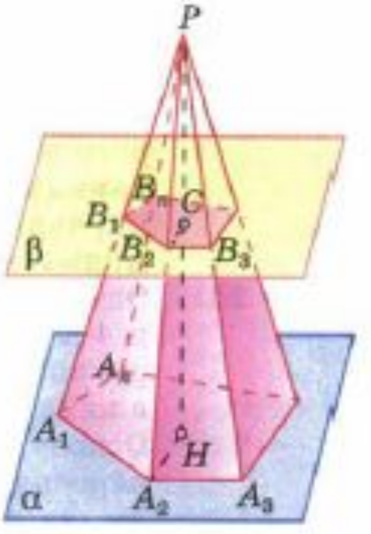
34 Усеченная пирамида

Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$ (рис. 83). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ (**нижнее и верхнее основания**), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ (**боковые грани**), называется **усеченной пирамидой**.

Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются **боковыми ребрами** усеченной пирамиды.

Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают так: $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** усеченной пирамиды. На рисунке 83 отрезок CH является высотой усеченной пирамиды.



Усеченная пирамида

Рис. 83

Докажем, что **боковые грани усеченной пирамиды — трапеции**. Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 83). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β. Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 этой грани не параллельны — их продолжения пересекаются в точке P. Поэтому данная грань — трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани — трапеции.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции (докажите это). Высоты этих трапеций называются **апофемами. Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды** называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

▼ Докажите эту теорему самостоятельно. △

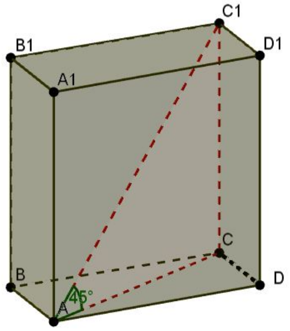
Практическая часть.

Вопросы:

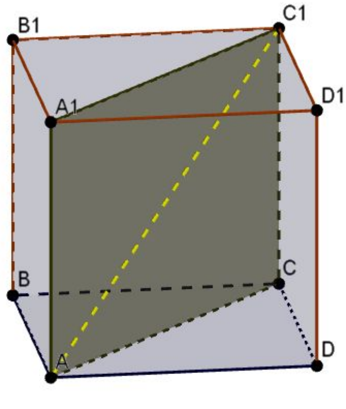
1. Является ли призма прямой, если две ее смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?
2. В какой призме боковые ребра параллельны ее высоте?
3. Является ли призма правильной, если все ее ребра равны друг другу?

Задачи.

219 В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.



223 Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.



239 Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.