Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

<u>Опр.</u> $\{x_n\}$ – б.м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ |x_n| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n, \ \alpha_n$ – б.м.

Установить самост.

<u>Опр.</u> $\{x_n\}$ – б.б., если $\forall M > 0 \ \exists N:$

$$\forall n > N \quad |x_n| > M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Ясно, что б.б. посл-сть неограничена, но не наоборот.

<u>Опр.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad x_n > M$$

<u>Опр.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad x_n < -M$$

Проверить самост., что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\{x_n\}$ – б.б., но не наоборот.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

<u>Опр.</u> $\{x_n\}$ – б.м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ |x_n| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n, \ \alpha_n - \text{б.м.}$$

Установить самост.

<u>Опр.</u> $\{x_n\}$ – б.б., если $\forall M > 0 \ \exists N:$

$$\forall n > N \quad |x_n| > M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Ясно, что б.б. посл-сть неограничена, но не наоборот.

<u>Опр.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad x_n > M$$

<u>Опр.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad x_n < -M$$

Проверить самост., что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\{x_n\}$ – б.б., но не наоборот.

<u>Т1</u>. $\{x_n\}$ – б.б. $\Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Д-во. $\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ |x_n| > M$

$M = 1$, $\tilde{N} = N\big|_{M=1}$, $n_0 = \tilde{N} + 1$, $|x_n| > 1 \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n \neq 0$, т.е. $\exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad |x_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$,

т.е. $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Т. доказана.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Опр. $\{x_n\}$ – б.м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ |x_n| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n,\ \alpha_n$ – б.м.

Установить самост.

Опр. $\{x_n\}$ – б.б., если $\forall M > 0\ \exists N:$

$$\forall n > N\quad |x_n| > M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Ясно, что б.б. посл-сть неограничена, но не наоборот.

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall M > 0\ \exists N:\ \forall n > N\quad x_n > M$$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall M > 0\ \exists N:\ \forall n > N\quad x_n < -M$$

Проверить самост., что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\{x_n\}$ – б.б., но не наоборот.

Т1. $\{x_n\}$ – б.б. $\Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Д-во. $\forall M > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ |x_n| > M$

$M = 1,\ \tilde{N} = N\big|_{M=1},\ n_0 = \tilde{N} + 1,\ |x_n| > 1\ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n \neq 0$, т.е. $\exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$

$\forall \varepsilon > 0\quad M = \frac{1}{\varepsilon} > 0\ \exists N:\ \forall n > N\quad |x_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$,

т.е. $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Т. доказана.

Т2. $\{x_n\}$ – б.м., $x_n \neq 0\ \forall n \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б.б.

Д-ть самост.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Опр. $\{x_n\}$ – б.м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \ |x_n|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a+\alpha_n$, α_n – б.м.

Установить самост.

Опр. $\{x_n\}$ – б.б., если $\forall M>0\ \exists N:$

$$\forall n>N\ \ |x_n|>M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Ясно, что б.б. посл-сть неограничена, но не наоборот.

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall M>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \ x_n>M$$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall M>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \ x_n<-M$$

Проверить самост., что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, то $\{x_n\}$ – б.б., но не наоборот.

Т1. $\{x_n\}$ – б.б. $\Rightarrow \exists\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Д-во. $\forall M>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \ |x_n|>M$

$M=1$, $\tilde N = N\big|_{M=1}$, $n_0=\tilde N+1$, $|x_n|>1\ \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow x_n\neq 0$, т.е. $\exists\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$

$\forall\varepsilon>0$ $M=\frac{1}{\varepsilon}>0$ $\exists N:\ \forall n>N$ $|x_n|>M=\frac{1}{\varepsilon}$,

т.е. $\left|\frac{1}{x_n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Т. доказана.

Т2. $\{x_n\}$ – б.м., $x_n\neq 0\ \forall n \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б.б.

Д-ть самост.

Т3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$

Д-во. $\{x_n\}$ – огр. $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.м. $\Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} =$

$= \left\{x_n\cdot\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.м. Т. доказана

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Опр. $\{x_n\}$ – б.м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ |x_n| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n, \ \alpha_n$ – б.м.

Установить самост.

Опр. $\{x_n\}$ – б.б., если $\forall M > 0 \ \exists N:$

$$\forall n > N \quad |x_n| > M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Ясно, что б.б. посл-сть неограничена, но не наоборот.

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad x_n > M$$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad x_n < -M$$

Проверить самост., что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\{x_n\}$ – б.б., но не наоборот.

T1. $\{x_n\}$ – б.б. $\Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Д-во. $\forall M > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ |x_n| > M$

$M = 1, \ \tilde{N} = N\big|_{M=1}, \ n_0 = \tilde{N} + 1, \ |x_n| > 1 \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n \neq 0$, т.е. $\exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$

$\underline{\forall \varepsilon > 0} \quad M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \ \underline{\exists N: \ \forall n > N} \quad |x_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$,

т.е. $\underline{\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon} \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Т. доказана.

T2. $\{x_n\}$ – б.м., $x_n \neq 0 \ \forall n \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б.б.

Д-ть самост.

T3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty, \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

Д-во. $\{x_n\}$ – огр. $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.м. $\Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} =$

$= \left\{x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right\}$ – б.м. Т. доказана

T4. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0; \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0, \ y_n \neq 0 \ \forall n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty.$

Д-во. $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – огр. $\Rightarrow \left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ – б.м. $\frac{y_n}{x_n} \neq 0 \ \forall n$

$\Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ – б.б. Т. доказана

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Опр. $\{x_n\}$ – б.м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ |x_n|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a+\alpha_n,\ \alpha_n$ – б.м.

Установить самост.

Опр. $\{x_n\}$ – б.б., если $\forall M>0\ \exists N:$

$$\forall n>N\quad |x_n|>M$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Ясно, что б.б. посл-сть неограничена, но не наоборот.

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall M>0\ \exists N:\ \forall n>N\quad x_n>M$$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall M>0\ \exists N:\ \forall n>N\quad x_n<-M$$

Проверить самост., что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\{x_n\}$ – б.б., но не наоборот.

T1. $\{x_n\}$ – б.б. $\Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Д-во. $\forall M>0\ \exists N:\ \forall n>N\ |x_n|>M$

$M=1,\ \tilde{N}=N\big|_{M=1},\ n_0=\tilde{N}+1,\ |x_n|>1\ \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow x_n\neq 0$, т.е. $\exists \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$

$\forall \varepsilon>0\quad M=\frac{1}{\varepsilon}>0\ \exists N:\ \forall n>N\quad |x_n|>M=\frac{1}{\varepsilon}$,

т.е. $\left|\frac{1}{x_n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.

Т. доказана.

T2. $\{x_n\}$ – б.м., $x_n\neq 0\ \forall n \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б.б.

Д-ть самост.

T3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$

Д-во. $\{x_n\}$ – огр. $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.м. $\Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} =$

$= \left\{x_n\cdot\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.м.

Т. доказана

T4. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\neq 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $y_n\neq 0\ \forall n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$.

Д-во. $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – огр. $\Rightarrow \left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ – б.м. $\frac{y_n}{x_n}\neq 0\ \forall n$

$\Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ – б.б.

Т. доказана

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a+0$, если

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ a\leq x_n<a+\varepsilon$$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a-0$, если

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ a-\varepsilon<x_n\leq a$$

Проверить, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a+0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a-0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, но не наоборот.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a+0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a-0$, то это не значит, что $\{x_n\}$ – монотонная посл-сть.

Монотонные последовательности

Опр. $\{x_n\}$ назыв. возраст. (убыв.), если

$$\forall n \quad x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1})$$

Возр. и убыв. посл-сти — монотонные.

Можно писать $x_n \uparrow$, $x_n \downarrow$

Монот. посл-сти ограничены с какой-нибудь стороны:

$$x_n \uparrow \Rightarrow x_n \geq x_1 \quad (x_n \geq x_{n_0})$$

$$x_n \downarrow \Rightarrow x_n \leq x_1 \quad (x_n \leq x_{n_0})$$

Монотонные последовательности

<u>Опр.</u> $\{x_n\}$ назыв. возраст. (убыв.), если

$$\forall n \quad x_n \le x_{n+1} \quad (x_n \ge x_{n+1})$$

Возр. и убыв. посл-ти — монотонные.

Можно писать $x_n \uparrow$, $x_n \downarrow$

Монот. посл-ти ограничены с какой-нибудь стороны:

$$x_n \uparrow \Rightarrow x_n \ge x_1 \quad (x_n \ge x_{n_0})$$

$$x_n \downarrow \Rightarrow x_n \le x_1 \quad (x_n \le x_{n_0})$$

<u>Т1</u> $\{x_n\}$ возр. и огр. сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Д-во Т1. $\{x_n\}$ - огр. сверху $\Rightarrow \exists\, M = \sup\{x_n\}$,

т.е. 1) $\forall n \; x_n \le M$

2) $\forall M_1 < M \; \exists N: x_N > M_1$

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $M_1 = M - \varepsilon < M \Rightarrow \underline{\exists N:}$ $x_N > M_1 = M - \varepsilon$

$\underline{\forall n > N \quad M - \varepsilon} < x_N \le \underline{x}_n \le M \underline{< M + \varepsilon}$, т.е.

$|x_n - M| < \varepsilon$, $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$

Т. доказана.

Монотонные последовательности

Опр. $\{x_n\}$ называется возраст. (убыв.), если

$$\forall n \quad x_n \le x_{n+1} \quad (x_n \ge x_{n+1})$$

Возр. и убыв. посл-сти — монотонные.

Можно писать $x_n \uparrow$, $x_n \downarrow$

Монот. посл-сти ограничены с какой-нибудь стороны:

$$x_n \uparrow \Rightarrow x_n \ge x_1 \quad (x_n \ge x_{n_0})$$

$$x_n \downarrow \Rightarrow x_n \le x_1 \quad (x_n \le x_{n_0})$$

Т1 $\{x_n\}$ возр. и огр. сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

При д-ве получилось: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$

Сл. $\{x_n\}$ возр. и огр. сверху, $M = \sup\{x_n\}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = M - 0$$

Д-во Т1. $\{x_n\}$ — огр. сверху $\Rightarrow \exists M = \sup\{x_n\}$,

т.е. 1) $\forall n \ x_n \le M$
2) $\forall M_1 < M \ \exists N: x_N > M_1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad M_1 = M - \varepsilon < M \Rightarrow \exists N: x_N > M_1 = M - \varepsilon$

$\forall n > N \quad M - \varepsilon < x_N \le x_n \le M < M + \varepsilon$, т.е.

$|x_n - M| < \varepsilon$, $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$

Т. доказана.

Д-во сл. При д-ве Т1 получилось, что

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N \quad M - \varepsilon < x_n \le M$, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M - 0$.

Монотонные последовательности

Опр. $\{x_n\}$ называв. возраст. (убыв.), если

$$\forall n \quad x_n \le x_{n+1} \quad (x_n \ge x_{n+1})$$

Возр. и убыв. посл-сти — монотонные.

Можно писать $x_n \uparrow$, $x_n \downarrow$

Монот. посл-сти ограничены с какой-нибудь стороны:

$$x_n \uparrow \Rightarrow x_n \ge x_1 \quad (x_n \ge x_{n_0})$$

$$x_n \downarrow \Rightarrow x_n \le x_1 \quad (x_n \le x_{n_0})$$

Т1 $\{x_n\}$ возр. и огр. сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

При д-ве получилось: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$

Сл. $\{x_n\}$ возр. и огр. сверху, $M = \sup\{x_n\}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = M - 0$$

Т2 $\{x_n\}$ убыв. и огр. снизу $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Д-ть самостоятельно

При этом получится, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m = \inf\{x_n\}$

и даже, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m + 0$

Сл. Если монот. посл-сть огр. $\Rightarrow$ она сходится.

$\{x_n\}$ — монот. $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ сх. $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ — огр.

Д-во Т1. $\{x_n\}$ — огр. сверху $\Rightarrow \exists M = \sup\{x_n\}$,

т.е. 1) $\forall n \; x_n \le M$
2) $\forall M_1 < M \; \exists N: x_N > M_1$

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $M_1 = M - \varepsilon < M \Rightarrow \underline{\exists N:}$ $x_N > M_1 = M - \varepsilon$

$\underline{\forall n > N \quad M - \varepsilon} < x_N \le \underline{x}_n \le M \underline{< M + \varepsilon}$, т.е.

$|x_n - M| < \varepsilon$, $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$

Т. доказана.

Д-во сл. При д-ве Т1 получилось, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \; \forall n > N \quad M - \varepsilon < x_n \le M$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = M - 0.$$

Монотонные последовательности

Опр. $\{x_n\}$ назыв. возраст. (убыв.), если

$$\forall n \quad x_n \le x_{n+1} \quad (x_n \ge x_{n+1})$$

Возр. и убыв. посл-сти — монотонные.

Можно писать $x_n \uparrow$, $x_n \downarrow$

Монот. посл-сти ограничены с какой-нибудь стороны:

$x_n \uparrow \Rightarrow x_n \ge x_1$ $(x_n \ge x_{n_0})$

$x_n \downarrow \Rightarrow x_n \le x_1$ $(x_n \le x_{n_0})$

Т1 $\{x_n\}$ возр. и огр. сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

При д-ве получилось: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$

Сл. $\{x_n\}$ возр. и огр. сверху, $M = \sup\{x_n\}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = M - 0$$

Т2 $\{x_n\}$ убыв. и огр. снизу $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Д-ть самостоятельно

При этом получится, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m = \inf\{x_n\}$

и даже, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m + 0$

Сл. Если монот. посл-ть огр. $\Rightarrow$ она сходится.

$\{x_n\}$-монот. $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ сх. $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$-огр.

Опр. Система отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots [a_n, b_n], \dots$ $\left(\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}\right)$ называется стягивающейся, если

$\forall n \quad a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ (т.е. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$)

и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Т3 $\{[a_n, b_n]\}$ - система стяг. отрезков, $\Rightarrow$

$\exists$ и ед. $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n$.

Д-во. $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le \dots \le b_2 \le b_1$

$\{a_n\}$. $a_n \uparrow$ $a_n \le b_1$, т.е. $\{a_n\}$-огр. сверху

$\Rightarrow \exists c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Д-жем, что $c \in [a_n, b_n]$ (?)

$c = \sup\{a_n\} \Rightarrow a_n \le c$.

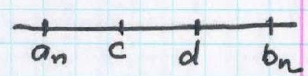
$a_n \le b_k$ $\forall n, k \Rightarrow b_k$ - верхняя грань $\{a_n\}$ $\forall k$

c - минимальная $\Rightarrow c \le b_k$ $\forall k$

Итак, $a_n \le c \le b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n$.

Единственность. Пусть $c, d \in [a_n, b_n]$ $\forall n$, $c \ne d$

$c < d$ $\quad a_n \le c < d \le b_n$



$b_n - a_n \ge d - c = \text{const}$

$0 = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \ge d - c > 0$, т.е. $0 > 0$

(противор.)

$\Rightarrow c$ – единств.

Теорема доказана

Бином Ньютона

$$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n, \quad 0! = 1$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$C_n^0 = 1 = C_n^n, \quad C_n^1 = n = C_n^{n-1}, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^{n-2}$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\Big((k+1) + (n-k)\Big) = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)\big((n+1)-(k+1)\big)} =$$

$$= C_{n+1}^{k+1}, \text{ т.е. } \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Докажем, что $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$

$$= \underbrace{C_n^0}_{1} a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a\cdot b^{n-1} + \underbrace{C_n^n}_{1} b^n.$$

$n = 1 \qquad (a+b)^1 = a + b$

$n \Rightarrow n+1 \qquad (a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) =$

$$= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^2 b^{n-1} + C_n^n a b^n +$$

$$+ C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-1} + C_n^{n-1} a b^n + b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_{n+1}^{n-1} a^2 b^{n-1} + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} =$$

$= \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$, т.е. формула верна

Это – формула бинома Ньютона