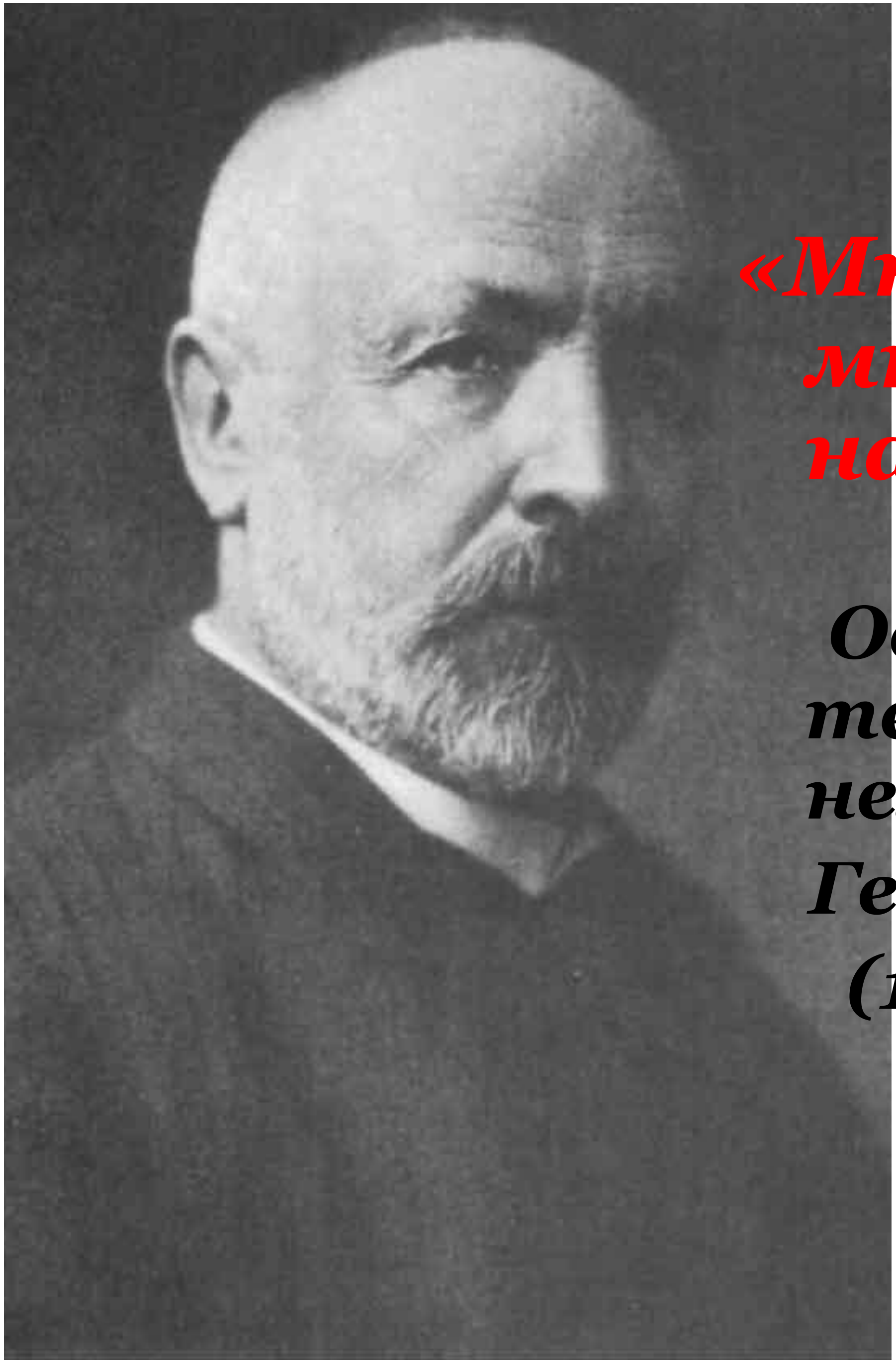
Тема 2

Элементы теории множеств

Можно ли дать определение понятию «Множество»?

Множество – одно из фундаментальных первичных понятий математики. Его нельзя определить через другие понятия.

Множество можно представить как совокупность объектов.



«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

Основоположник теории множеств, немецкий математик Георг Кантор (1845-1918)

- Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами (A,B,…)
- Объекты, которые образуют множество, называют элементами множества и для обозначения элементов используют, как правило, малые буквы латинского алфавита (a,b...).

Примеры множеств:

- множество учащихся в данной аудитории;
- множество людей, живущих на нашей планете в данный момент времени;
- множество точек данной геометрической фигуры;
- множество чётных чисел;
- множество корней уравнения.

Составьте множество из соответствующих элементов

4

- 4

3

- 3

1

-1

- 2

2

Множество корней уравнения
$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=0$

Принадлежность элемента множеству

- Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ — принадлежит). В противном случае, если a не принадлежит множеству A, будем использовать обозначение $\notin$.

Подмножество

- Говорят, что множество *A* содержится в множестве *B* или множество *A* является ***подмножеством*** множества *B*, если каждый элемент множества *A* одновременно является элементом множества *B* .
- В этом случае пишут $A \subset B$.

Способы задания множеств

1. Множество может быть задано перечислением всех его элементов или списком. В этом случае элементы множества записывают внутри фигурных скобок, например: или A={студент А., рабочий Л., школьник М.}.
2. Множество может быть задано описанием свойств его элементов. Чаще всего при этом используют запись, которую читают следующим образом: «А есть множество элементов b таких, что для них выполняется свойство В».
3. Множество можно задать порождающей процедурой, например, множество натуральных чисел:

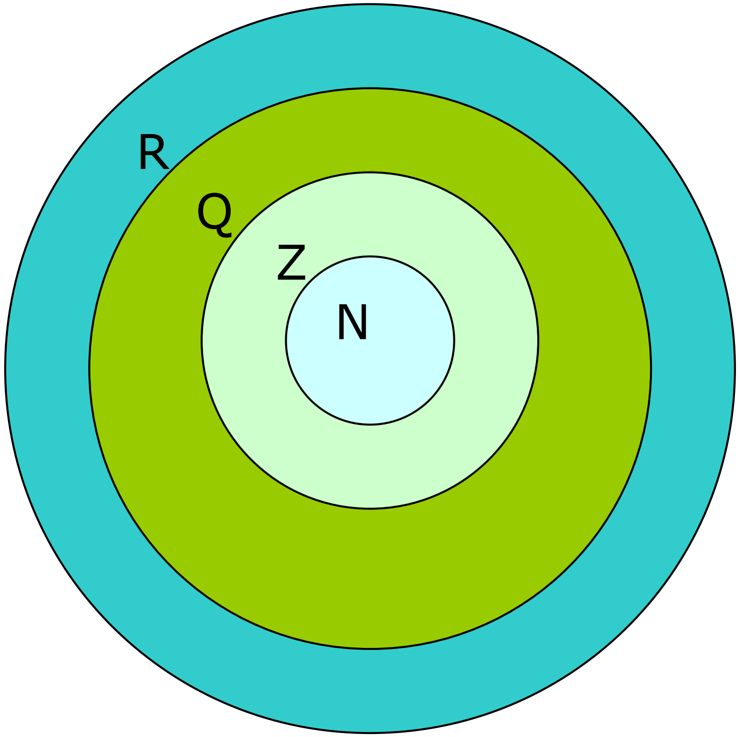
A={*a*/*a*=2*k*, k-любое натуральное число}.

Например, перечислением заданы следующие множества:

- A={1,2,3,5,7} — множество чисел
- X={x1,x2,...,xn} — множество некоторых элементов x1,x2,...,xn
- N={1,2,...,n} — множество натуральных чисел
- Z={0,±1,±2,...,±n} — множество целых чисел

$A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$.

- N – множество всех натуральных чисел;
- Z– множество всех целых чисел;
- Q – множество всех рациональных чисел;
- R – множество всех действительных чисел



Задайте перечислением элементов множество:

1) $A = \{x \,/\, x \in N,\ x^2 - 4 = 0\}$;

2) $B = \{x \,/\, x \in Z,\ |\,x\,| < 5\}$;

3) $C = \{x \,/\, x \in N,\ x \leq 20,\ x = 5k,\ k \in Z\}$.

По числу элементов, входящих в множество, множества делятся на три класса:

1 – конечные,

2 – бесконечные,

3 – пустые.

Множество является КОНЕЧНЫМ, если оно состоит из конечного числа элементов

Пример

Множество гласных букв в слове “математика” состоит из трёх элементов – это буквы “а”, “е”, “и”, причем, гласная считается только один раз, т.е. элементы множества при перечислении не повторяются.

Множество является **БЕСКОНЕЧНЫМ**, если оно состоит из бесконечного числа элементов

Пример

- Множество натуральных чисел бесконечно.

Пример

- Множество точек отрезка [0;1] бесконечно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ПУСТЫМ. Символически оно обозначается знаком $\varnothing$

Пример

- Множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$.

Пример

- Множество людей, проживающих на Солнце.

Мощность множества

- Число элементов конечного множества называют мощностью этого множества и обозначают символом m(A).
- С точки зрения мощности множество чисел

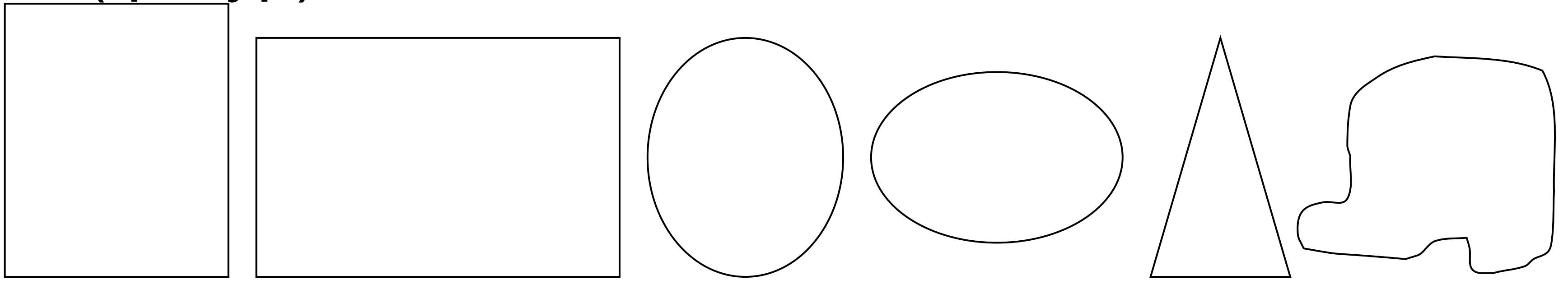
{-2, 0, 3,8} и множество букв {с, х, ф, а} эквивалентны, так как они содержат одинаковое число элементов.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО

- В любой конкретной задаче приходится иметь дело с подмножествами некоторого, фиксированного для данной задачи, множества, состоящего из допустимых для этой задачи объектов.
- Его принято называть универсальным (универсумом) и обозначать символом U.
- Например, если мы рассматриваем множество действительных корней уравнения, то в качестве универсального можно взять множество всех действительных чисел.

Наглядное представление множеств

- Наглядно свойства множеств, операции над множествами и отношения между множествами изображают при помощи рисунков, называемых КРУГАМИ ЭЙЛЕРА (или диаграммами Эйлера – Венна).
- Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют в виде кругов или любых других замкнутых кривых (фигур)



Диаграммы Венна

- При графическом изображении множеств удобно использовать диаграммы Венна, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в виде овалов, заключенных внутри этого прямоугольника

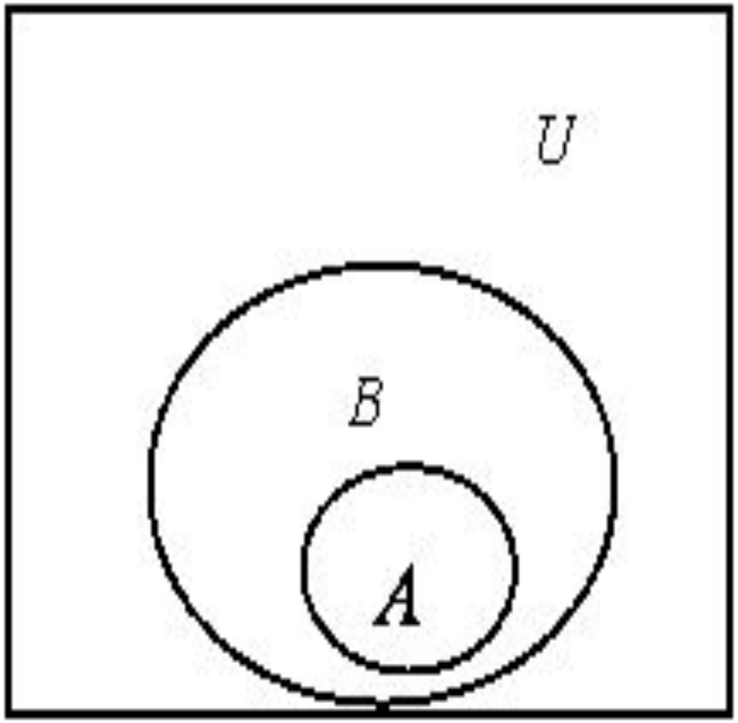
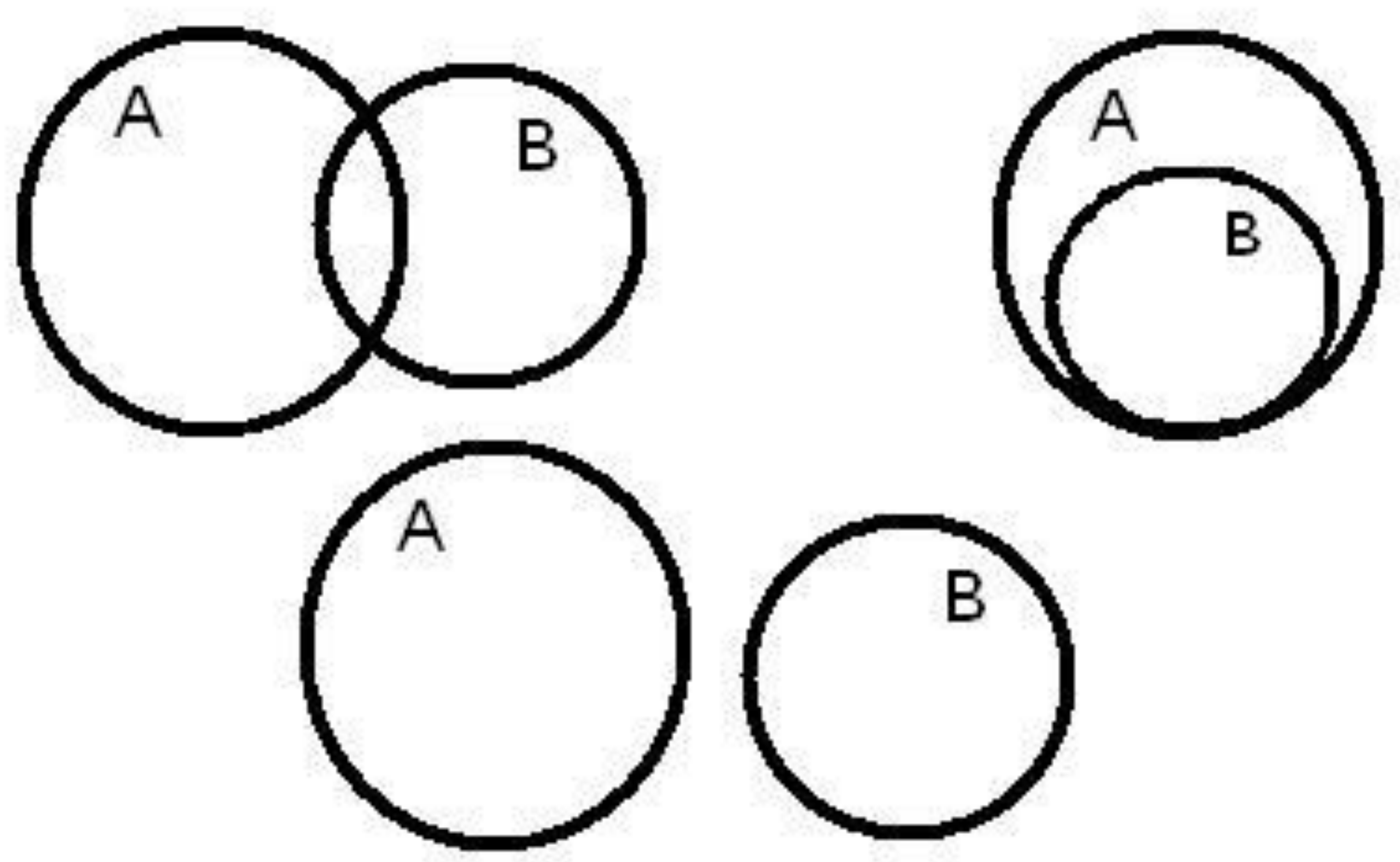


Рис. 1.1

Отношения на множествах и между множествами



БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

- Отношения между парами объектов называются **бинарными.**
- Примеры:
  – Равенство
  – Неравенство
  – Принадлежности
  – Включения
  – «Быть братом», делиться на какое-либо число

ОТНОШЕНИЕ РАВЕНСТВА

- Два множества A и B называются ***равными*** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A .

ОТНОШЕНИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Если множество A является ***подмножеством*** множества B ($A \subset B$), то отношение между множествами называется ***включением***.

Для любого множества A имеют место включения:

$\varnothing \subset A$ и $A \subset A$.

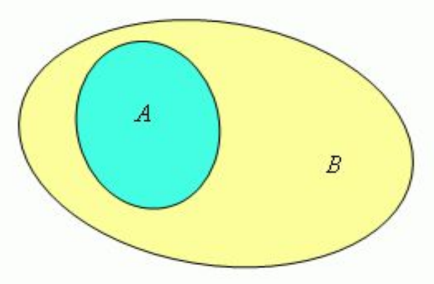


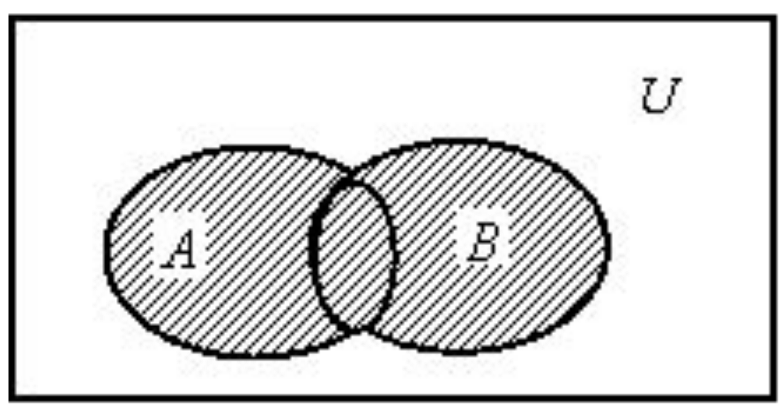
Рис.1

- Определить как между собой соотносятся множества $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{5, 3, 1\}$.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

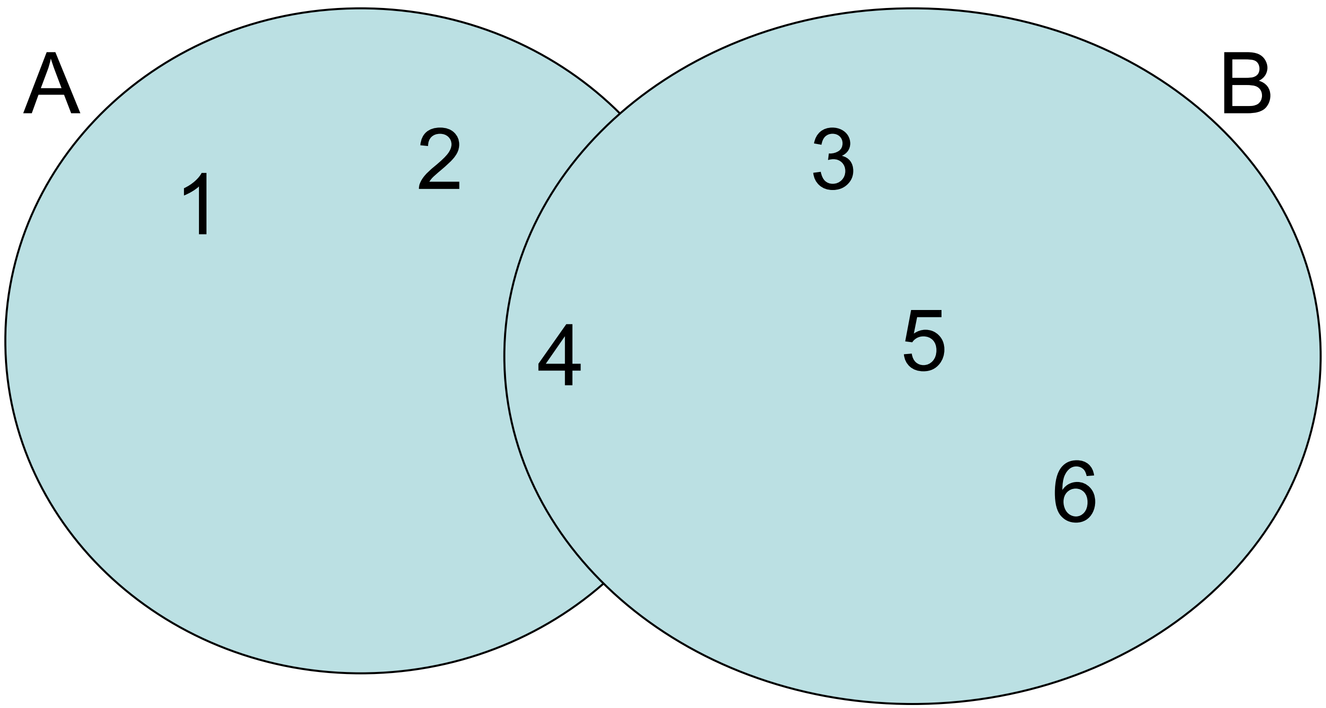
Объединение множеств

Сумма (объединение) множеств A и B (пишется $A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо A , либо B. Таким образом, $e \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда либо $e \in A$, либо $e \in B$.



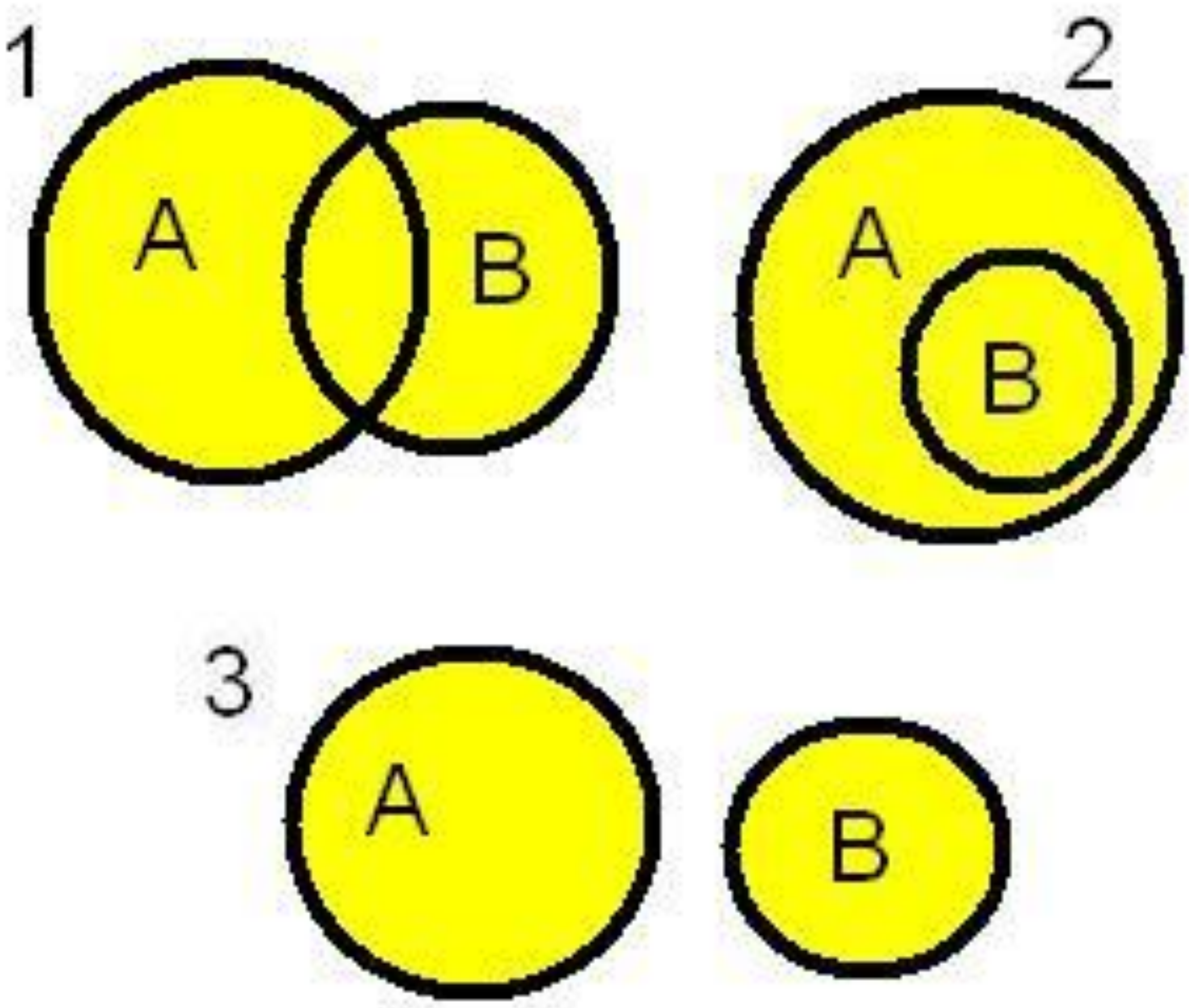
Операции над множествами ***объединение***

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6},



то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Объединение множеств



Пересечение множеств

- Пересечением множеств А и В называется множество А ∩ В, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В.

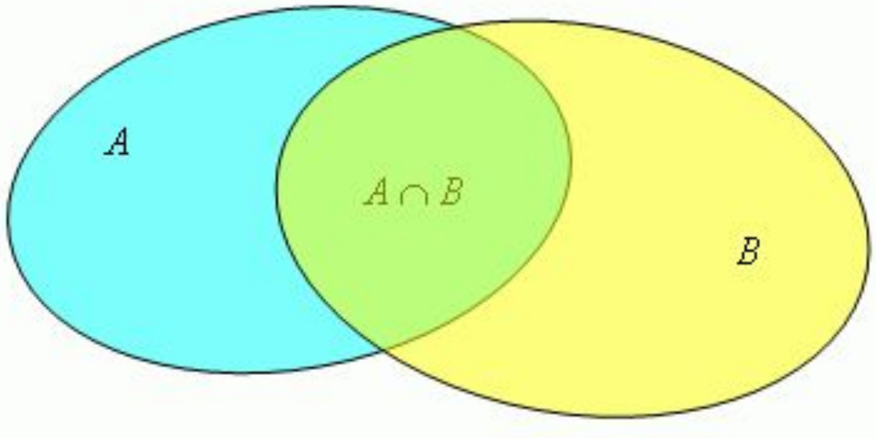
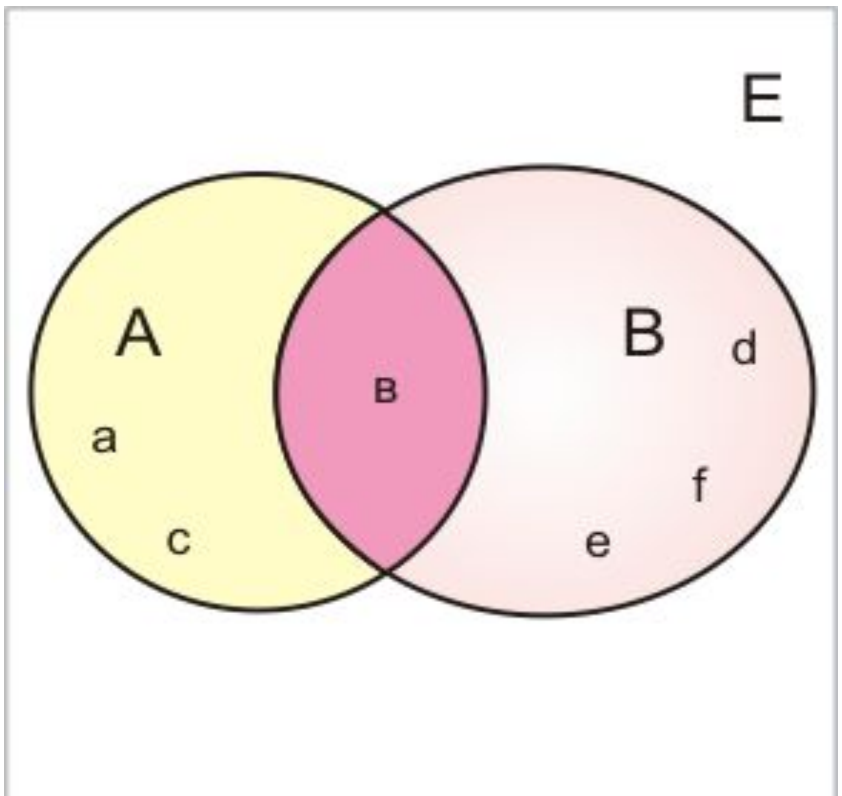


Рис.2

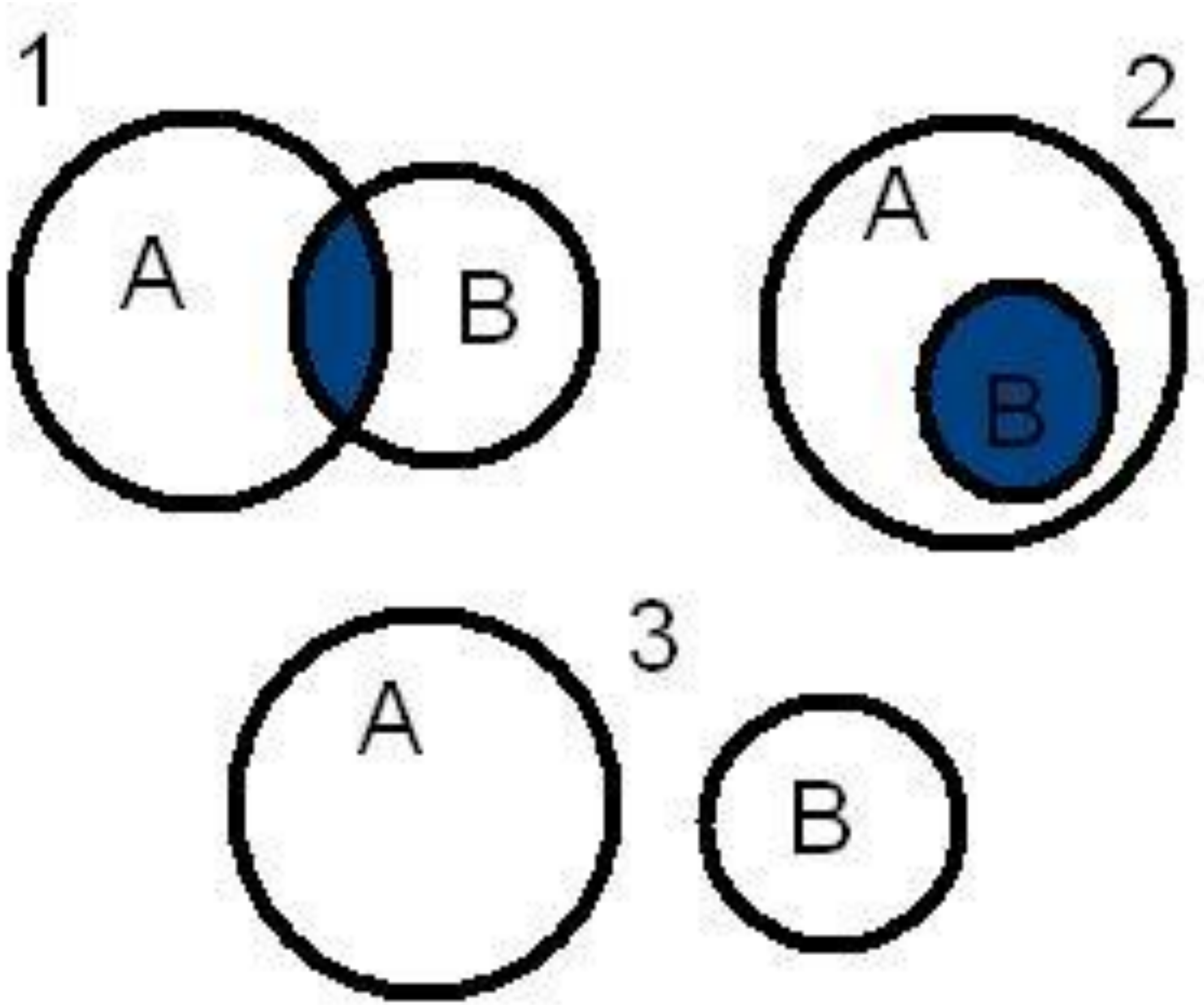
Операции над множествами **пересечение**

Например, если A={a,b,c}, B={b,c,f,e},



то $A \cap B = \{b\}$

Пересечение множеств



Разностью

- множеств А и В называется множество А\В, элементы которого принадлежат множеству А, но не принадлежат множествv В.

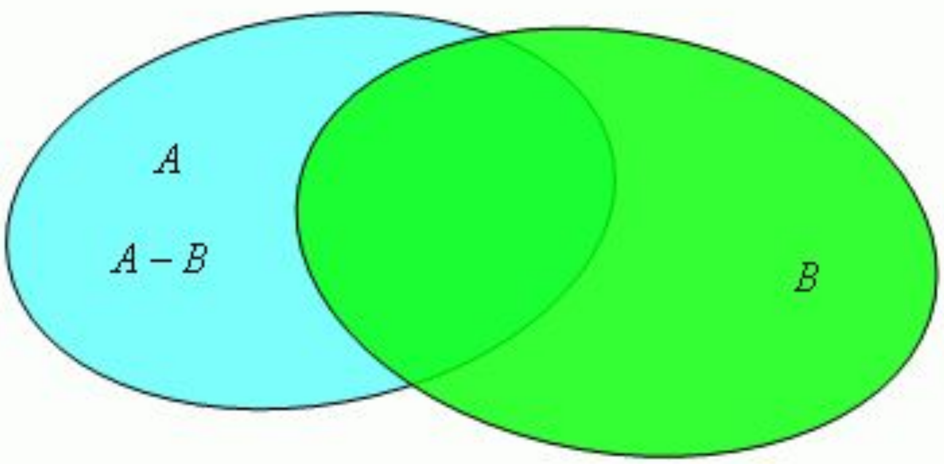
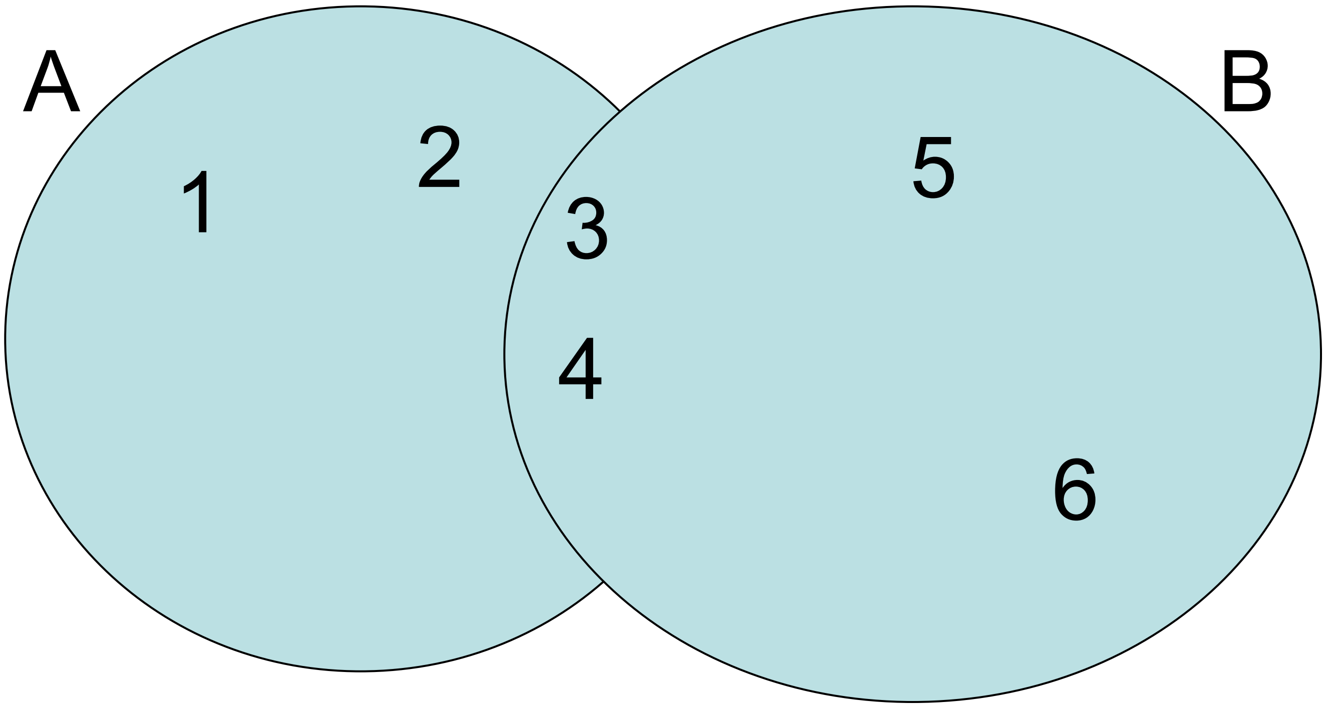


Рис.3

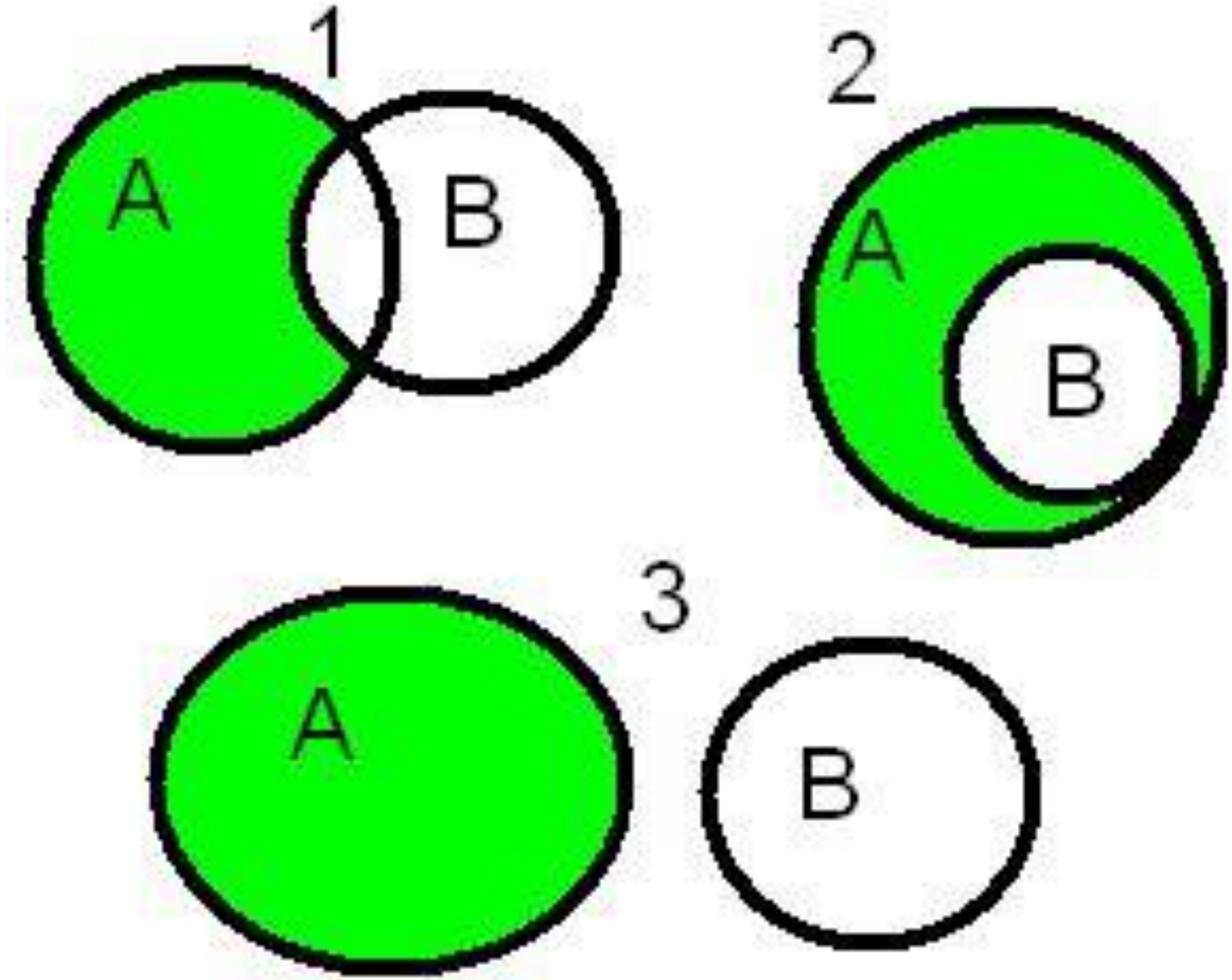
Операции над множествами **разность**

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}

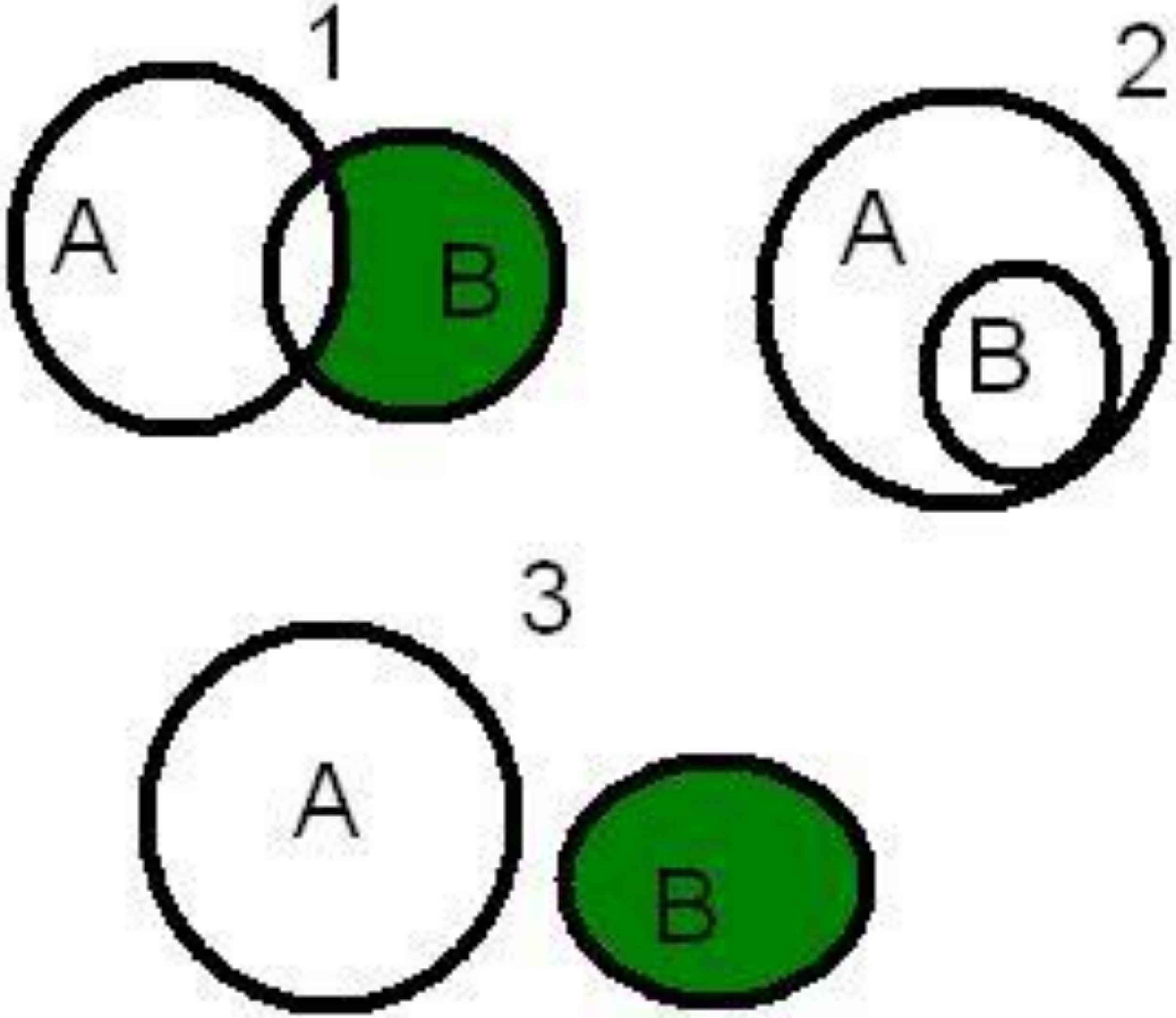


то A\B = {1,2}

Разность множеств A\B



Разность множеств B\A



Операции над множествами

Симметрической разностью множеств А и В называется множество А Δ В, являющееся объединением разностей множеств АВ и ВА, то есть $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

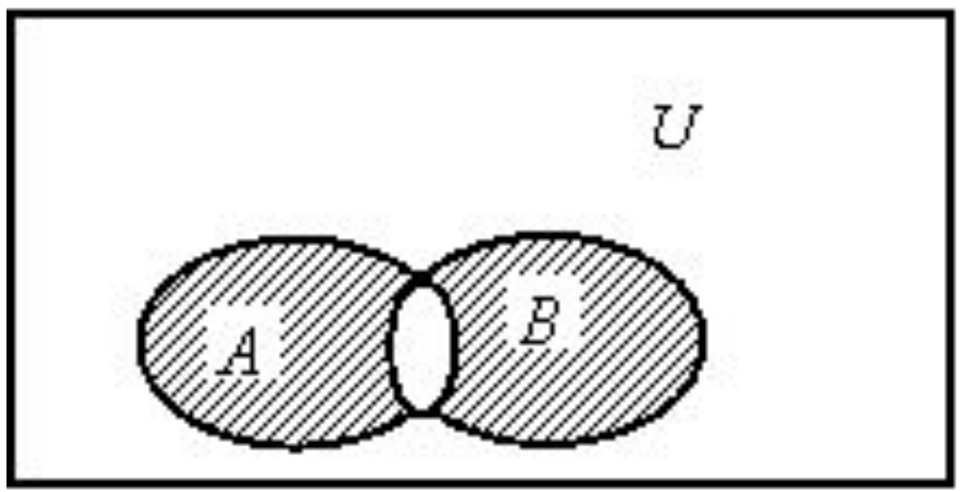
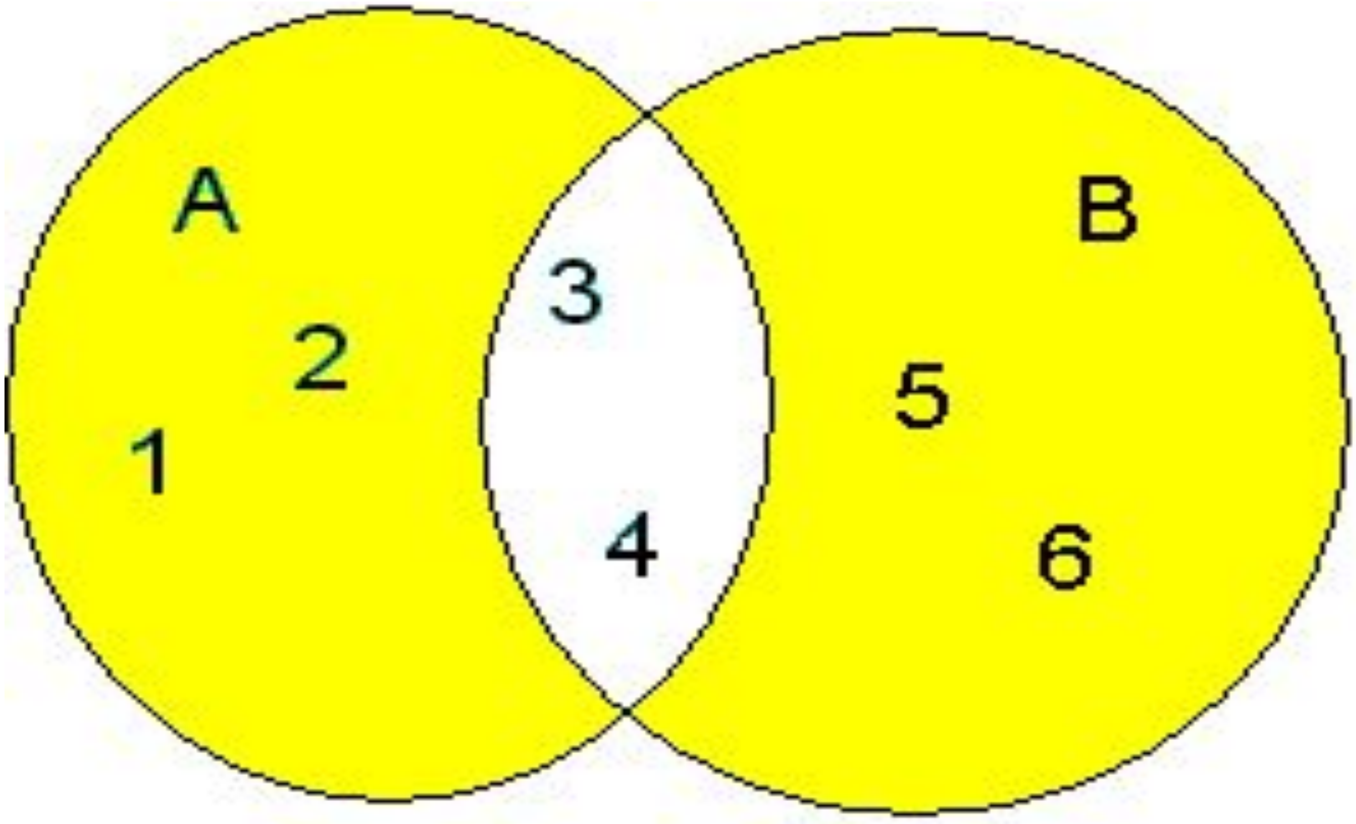


Рис. 1.5

Операции над множествами

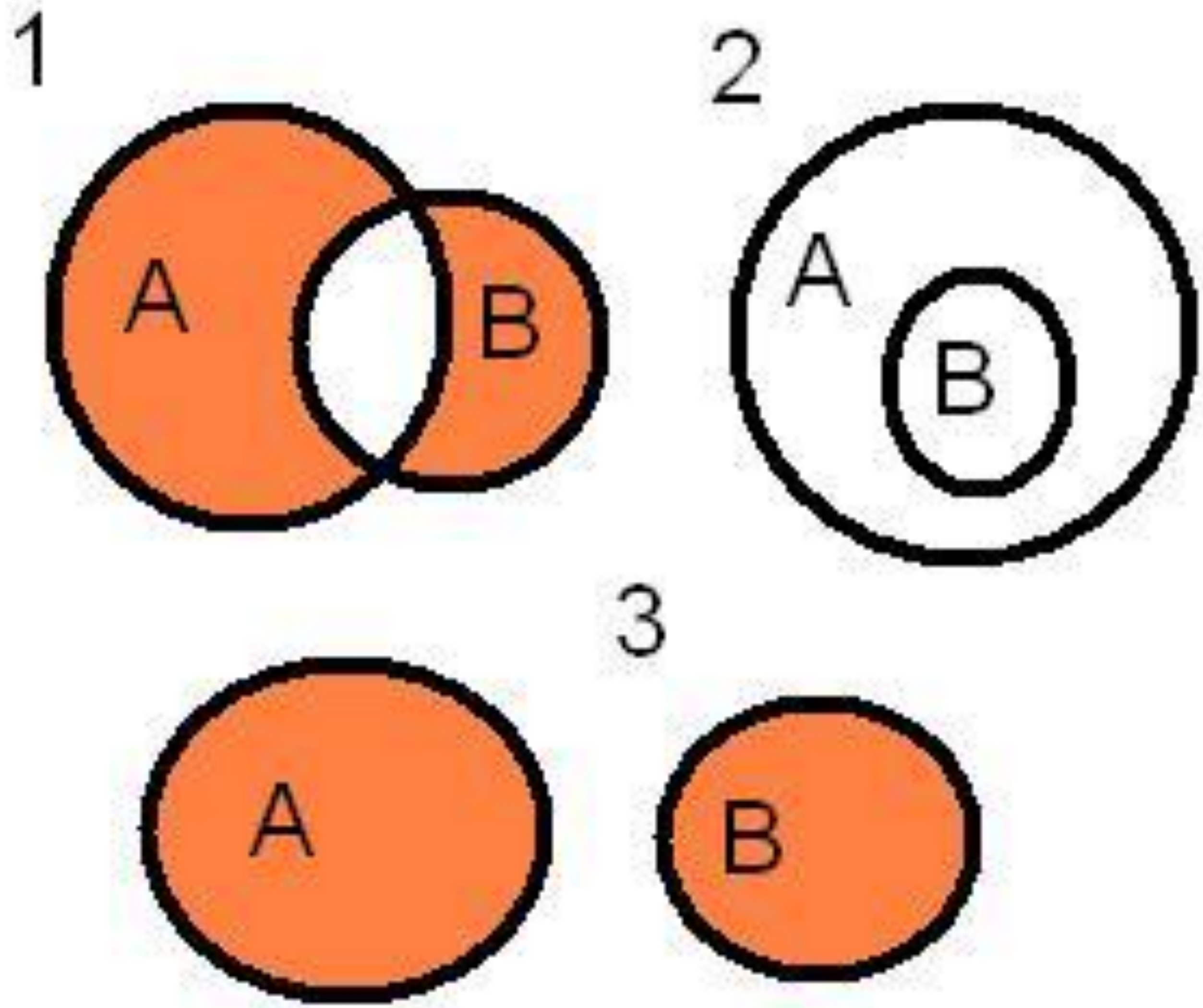
симметрическая разность

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6},



то A Δ B = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

Симметричная разность



Операции над множествами

- **Абсолютным дополнением** множества называется множество всех элементов, не принадлежащих A, т.е. множество U\A, где U – универсальное множество

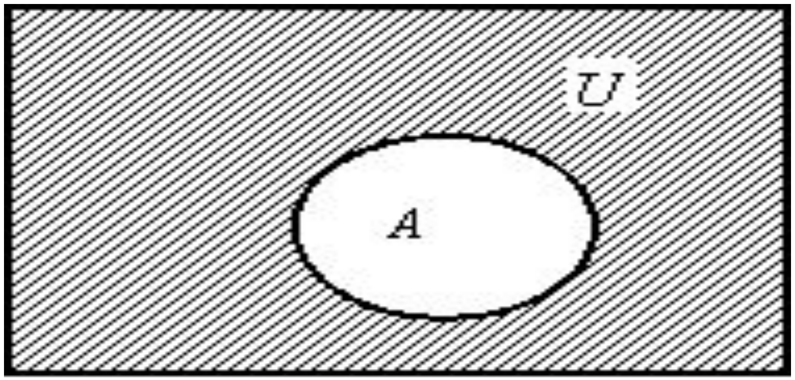


Рис. 1.6

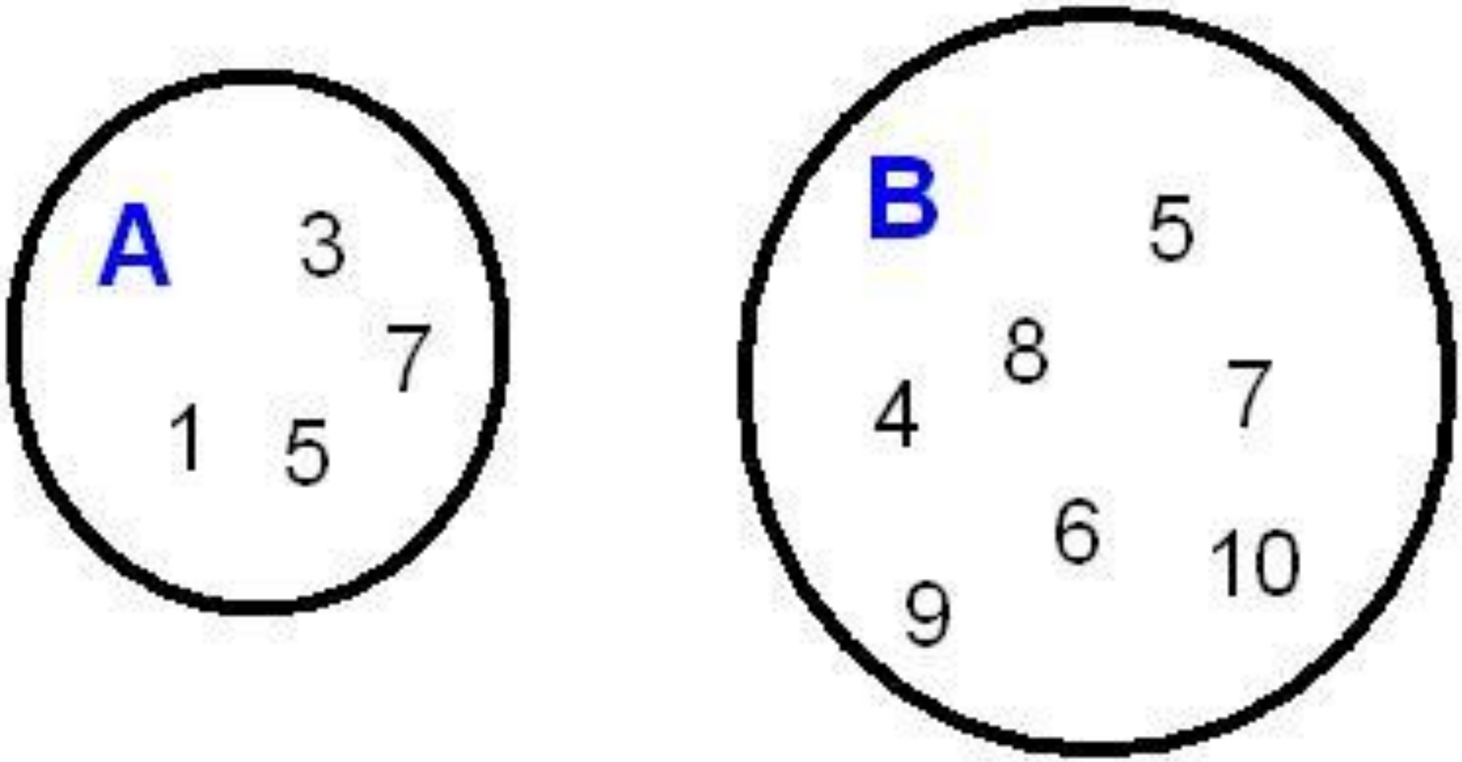
Свойства операций над множествами:

1). если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность),
2). если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$,
3). $A \cup A = A$,
4). $A \cup \varnothing = A$,
5). $A \cap A = A$,
6). $A \cap \varnothing = \varnothing$,
7). $A - A = \varnothing$,
8). $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность сложения),
9). $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность умножения),
10). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность сложения),
11). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения),
12). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения),
13). $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно вычитания),
14). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

П р и м е р ы

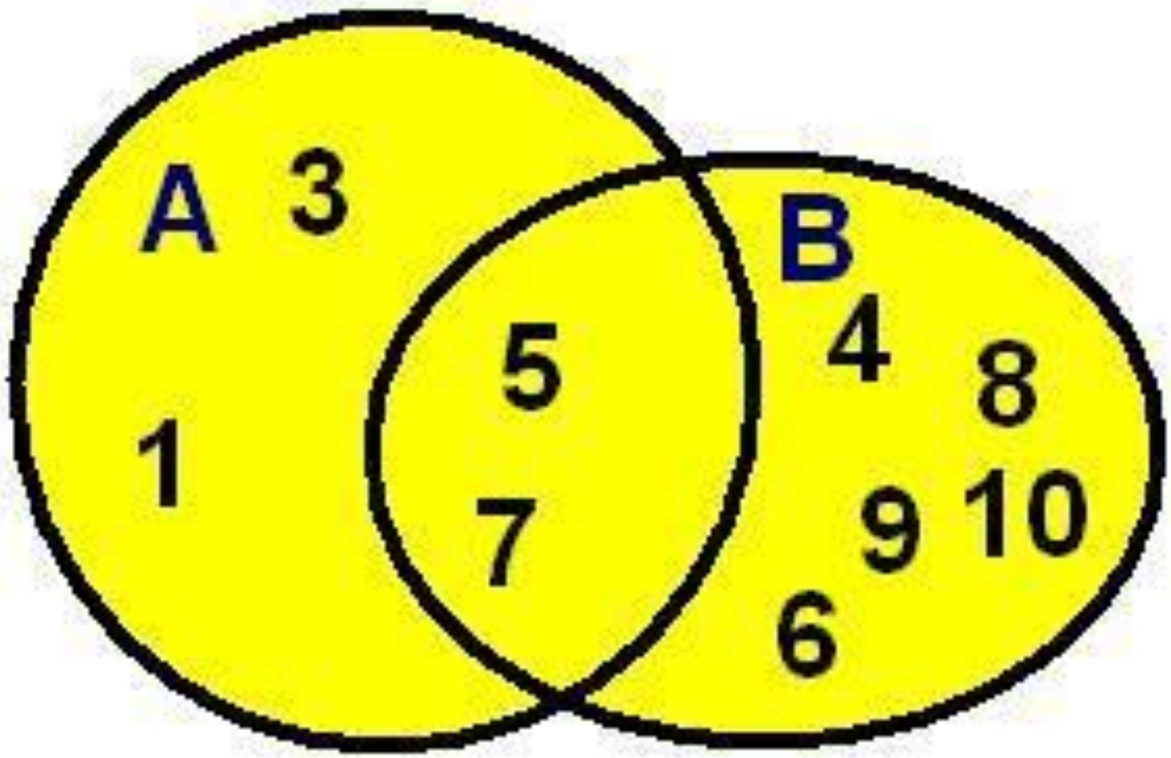
- Множество детей является подмножеством всего населения.
- Пересечением множества целых чисел с множеством положительных чисел является множество натуральных чисел.
- Объединением множества рациональных чисел с множеством иррациональных чисел является множество действительных чисел.
- Нуль является дополнением множества натуральных чисел относительно множества неотрицательных целых чисел.

Даны множества

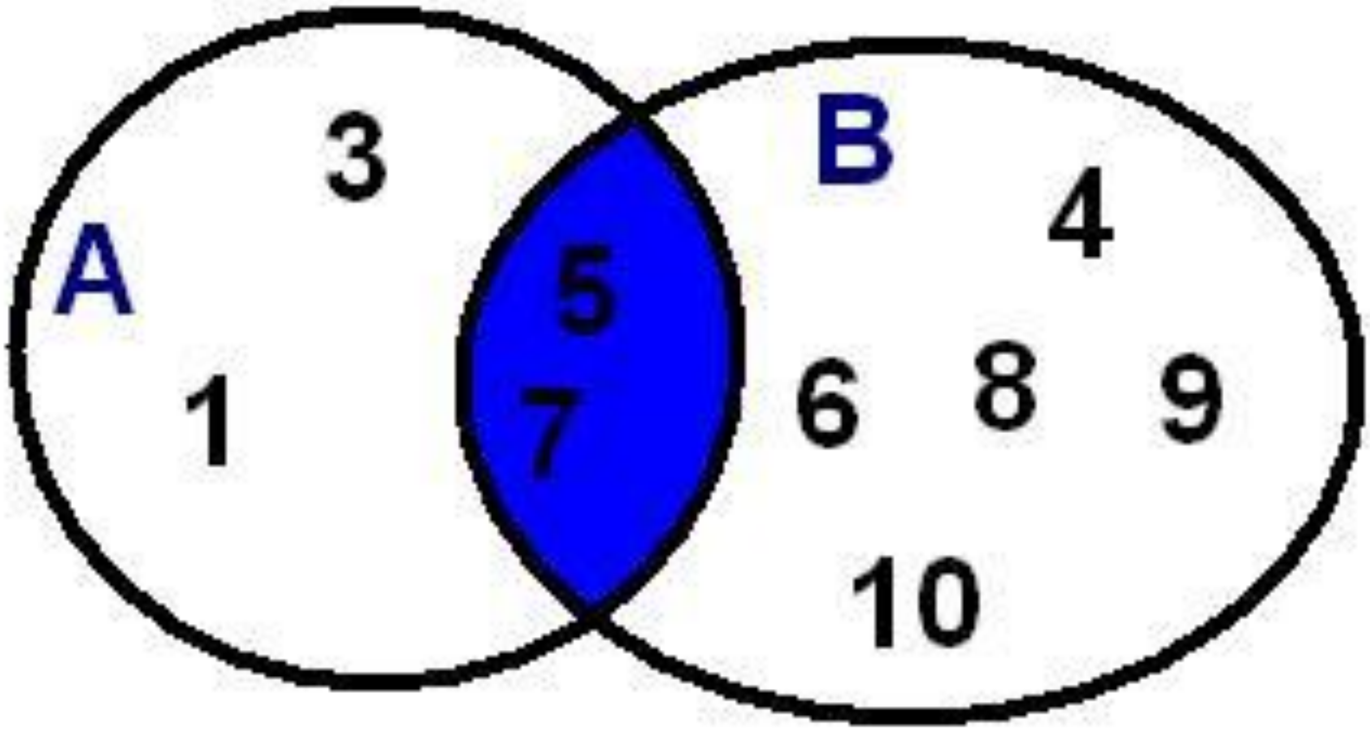


- Найти: объединение, пересечение, разность, симметрическую разность

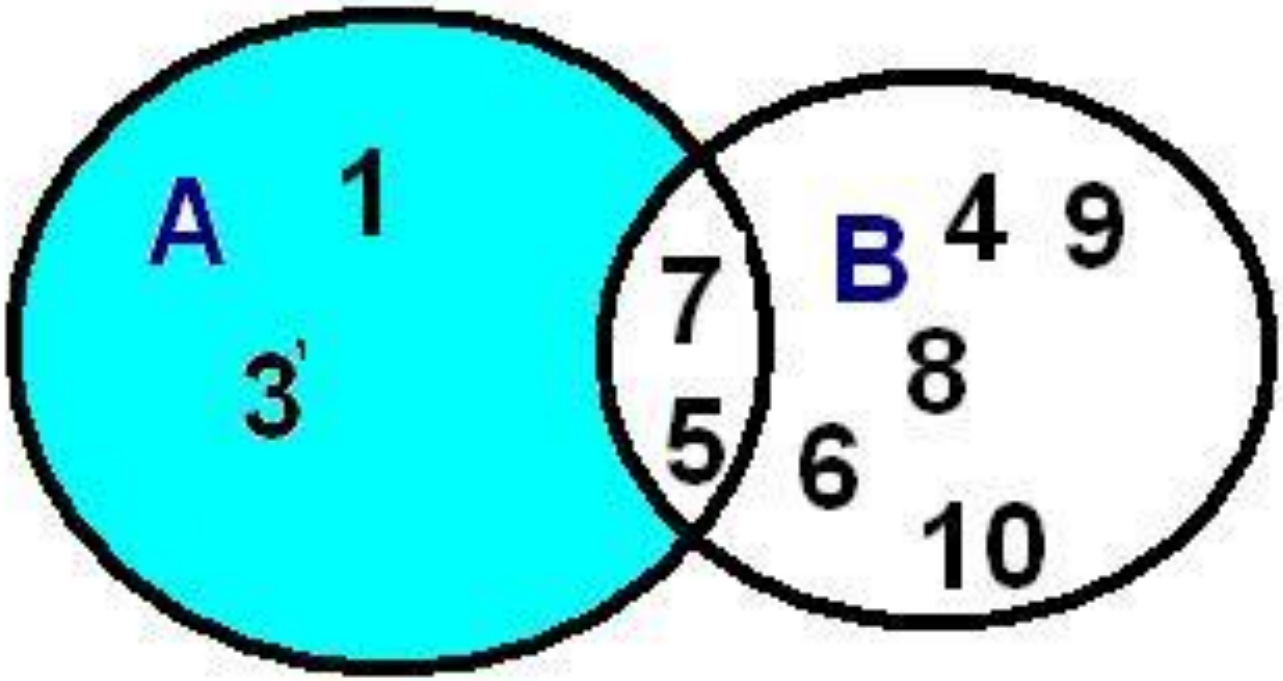
Объединение А и В



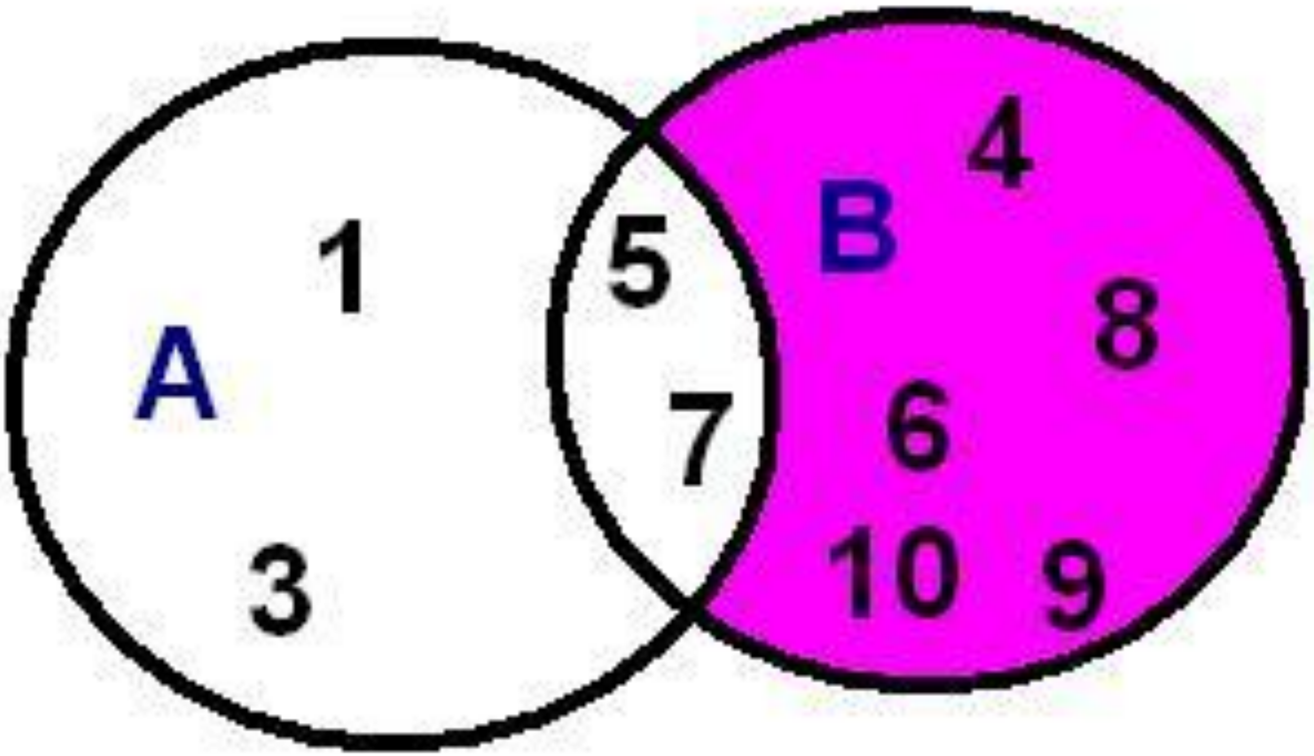
Пересечение множеств А и В



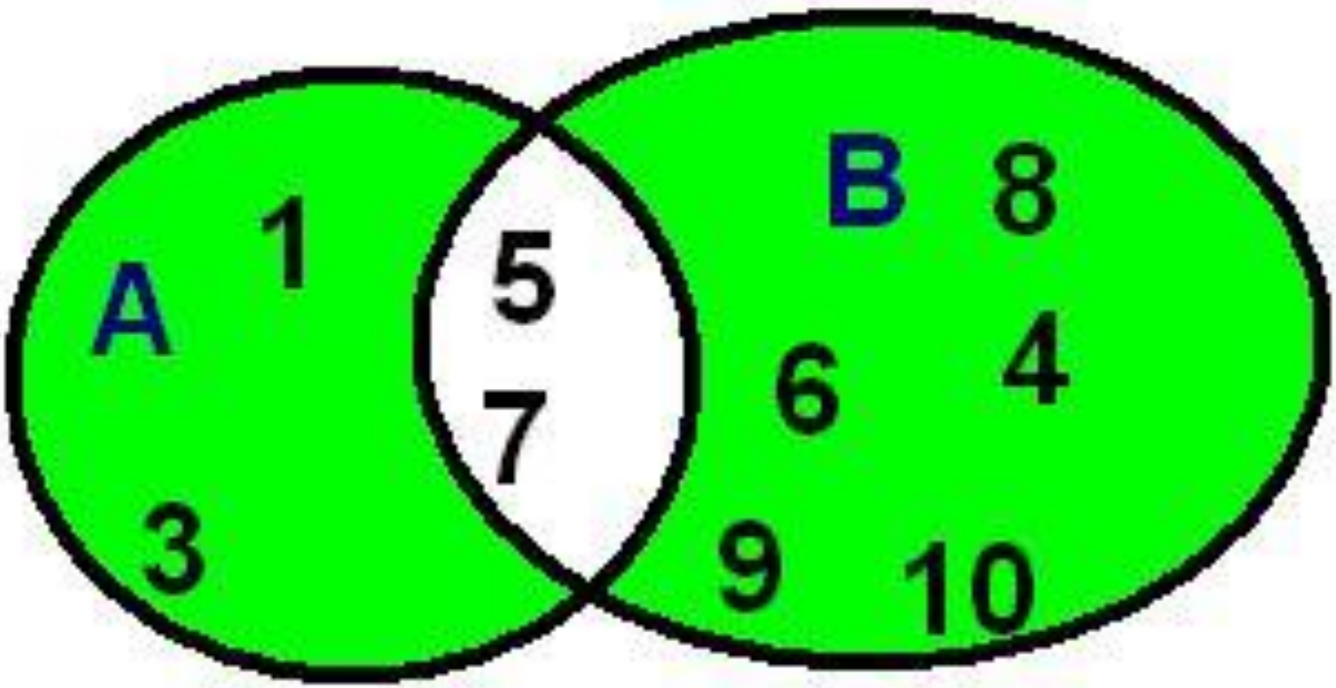
Разность A\B



Разность B\A



Симметрическая разность А и В



Формула мощности объединения непересекающихся конечных множеств (1)

- Если конечное множество A представимо в виде объединения N попарно непересекающихся конечных множеств A_1, A_2 …A_N, то его мощность

$$m(A)=m(A_1)+m(A_2)+\ldots+m(A_N)$$

Формула включений и исключений для двух множеств (2)

- Для любых двух конечных A и B справедливо равенство

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

Формула включений и исключений для трех множеств (2)

Для любых трех конечных A, B и C справедливо равенство

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$$

Задача

- На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

- Решение.

  Пусть U — множество всех абитуриентов, A —. множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре, B — множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии, С — множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии. По условию m(U) =1000*,* m(A) = 800, m(B)=700, m(C)=600, $m(A\cap B)$= 600, $m(A\cap C)$ = 500, $m(B\cap C)$ = 400, $m(A\cap B\cap C)$ =300. В множество $A\cap B\cap C$ включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу.

  По формуле включений и выключений (3) имеем:

$m(A \cup B \cup C)$ =800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300= =900.

  Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу. Ни одной задачи не решили

  m(U) - m(AUBUC)=1000 - 900=100 (абитуриентов).