Интегральная теорема Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

КСК-318, КСК-318д
14

Интегральная формула Лапласа. Пусть требуется найти вероятность суммы $\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$ на некотором интервале $[m_1, m_2]$. Для подсчета такой вероятности применяют интегральную формулу Лапласа.

Если в n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая отличается от 0 и 1, то при достаточно большом значении n вероятность того, что частота m события A находится в интервале $[m_1, m_2]$, приближенно равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt,$

причем $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

В вычислениях используют функцию

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \qquad (1.40)$$

называемую *нормированной функцией Лапласа*.

Функция (1.40) нечетна ($\Phi_0(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = [t = -z] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = -\Phi_0(x)$); при $x \geqslant 5$ можно считать, что $\Phi_0(x) = 0{,}5$; график функции $\Phi_0(x)$ приведен на рис. 16.

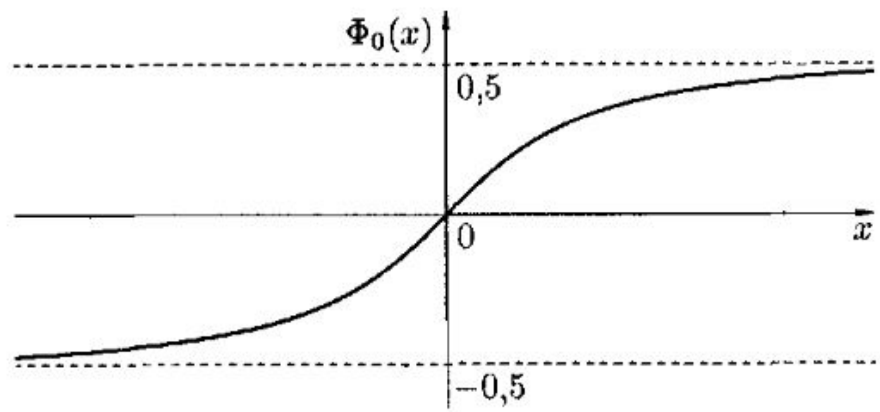

Рис. 16

Наряду с нормированной функцией Лапласа (1.40) используют функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \tag{1.42}$$

называемую также *функцией Лапласа*. Для нее справедливо равенство $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$; она связана с функцией $\Phi_0(x)$ формулой

$$\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x). \tag{1.43}$$

Имеются таблицы приближенных значений функций $\Phi_0(x)$ и $\Phi(x)$ (интеграл не берется в элементарных функциях), которые приводятся в большинстве учебников по теории вероятностей [illegible]

Пьер-Симон, маркиз де Лаплас

Французский математик, механик, физик и астроном, один из создателей теории вероятностей.

Лапласа почитают как одного из величайших ученых всех времен. Иногда его называют французским Ньютоном. Он и сам, как уверяют, считал себя лучшим математиком своего времени во Франции.

Свою первую работу по математике Лаплас написал в 17 лет. Университетский профессор дал ему рекомендательное письмо к д'Аламберу, влиятельному ученому в парижских научных кругах. Не сразу, но мэтр оценил таланты Лапласа и рекомендовал его преподавателем математики в Военной школе Парижа.

В Военной школе Лапласу довелось экзаменовать юного Бонапарта, и учитель и ученик сохранили теплые отношения на всю жизнь.

Лаплас был назначен Наполеоном на пост министра внутренних дел, но продержался на высоком посту лишь полтора месяца. Позже в мемуарах император писал: «Лаплас не рассматривал ни одного вопроса под прямым углом зрения: он всюду искал тонкости,… и, наконец, перенес дух "бесконечно малых" в администрацию».

Задача 1.66. В каждом из 700 независимых испытаний на брак появление стандартной лампочки происходит с постоянной вероятностью 0,65. Найти вероятность того, что при таких условиях появление бракованной лампочки произойдет чаще, чем в 230 испытаниях, но реже, чем в 270 случаях.

Решение. Введем обозначение:

событие A — появление бракованной лампочки.

По условию задачи $n = 700$; $p = 1 - 0,65 = 0,35$; $q = 0,65$. Найдем $P_{700}(230 < m < 270)$, если $m_1 = 230$, $m_2 = 270$. Применим интегральную формулу Лапласа:

1) $\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0,35 \cdot 0,65} = 12,6;$

2) $x_1 = \dfrac{230 - 700 \cdot 0,35}{12,6} = -1,19;$ $x_2 = \dfrac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} = 1,98.$

Значения функции $\Phi(x)$ при $x = -1,19$ и $x_2 = 1,98$ возьмем из табл. П. 3:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,19) = -\Phi(1,19) = -0,383;$$
$$\Phi(x_2) = \Phi(1,98) = 0,476.$$

Искомая вероятность

$$P_{700}(230 < m < 270) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,476 + 0,383 = 0,859.$$

Задача 1.67. В каждом из 500 независимых испытаний на всхожесть событие A — прорастание исследуемого семени — происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что среди 500 посаженных семян взойдет менее 235.

Решение. По условию задачи $n = 500$; $p = 0,4$, $m_1 = 0$; $m_2 = 235$; $q = 1 - 0,4 = 0,6$. Найдем: $P_{500}(m < 235)$:

1) $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 11$;

2) $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0 - 500 \cdot 0,4}{11} \approx -18$; $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{235 - 500 \cdot 0,4}{11} = 3,18$;

3) $\Phi(x_1) = \Phi(-18) = -\Phi(18) \approx -0,5$; $\Phi(x_2) = \Phi(3,18) = -0,499$;

4) $P_{500}(m < 235) = P_{500}(0 < m < 235) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,499 - (-0,5) = 0,999$.

В табл. даны значения функции $\Phi(x)$ лишь до $x = 5$, так как для всех $x \geq 5$ отклонение функции Лапласа $\Phi(x)$ от 0,5 пренебрежимо мало, можно воспользоваться асимптотическим разложением.

Теорема Пуассона

Теорема *Если вероятность p события A в каждом повторном испытании связана с числом независимых испытаний n, которое достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет m раз, приближенно находится по формуле*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (\lambda = np = \text{const}).$$

Задача 1.62. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Решение. По условию задачи $n = 1000$; $p = 0{,}002$; $m > 3$.

Так как обрыв нити на каждом веретене может либо произойти, либо не произойти, то речь идет о независимых повторных испытаниях. Тот факт, что вероятность обрыва нити мала, дает возможность использовать для решения формулу Пуассона для редких явлений.

Имеем $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$.

Тогда $P_n\{k > 3\} = 1 - P_n\{k \le 3\} = 1 - (P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + P_n(3))$.

Используя формулу Пуассона, имеем:

$$P(m > 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!} e^{-2} = 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right) \approx 0{,}143.$$

Задача 1.64. АТС получает в среднем 300 вызовов в час. Какова вероятность того, что в указанную минуту будут два вызова?

Решение. Количество вызовов в среднем можно найти, если вычислить число вызовов в минуту, т.е. $\lambda = 300 : 60 = 5$. Найдем $P(2) = \frac{5^2}{2!}e^{-5} = \frac{25}{2e^5} \approx 0,09$.

Задача 1.68. Прибор выходит из строя при отказе (неисправности) его микросхемы. Вероятность отказа в течение 1 ч работы прибора 0,02. С какой вероятностью за 100 ч эксплуатации прибора микросхему придется менять три раза?

Решение. По условию задачи: $p = 0{,}02$; $n = 100$; $m = 3$; $q = 0{,}98$. Тогда $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}02 = 2 < 10$, поэтому применим формулу

Пуассона для редких явлений: $P_{100}(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2}$, и, воспользовавшись табл. П. 1, сразу получим приближенный ответ:

$$P_{100}(3) \approx P(3;\ 2) \approx 0{,}18045 \approx 0{,}18.$$

Сравним логический ответ с ответом при использовании формулы Лапласа:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3 - 2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} \approx \frac{1}{\sqrt{1{,}96}} \approx \frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}714.$$

Тогда значение $\varphi(x) \approx \varphi(0,714) \approx 0,31$ определим по табл. [illegible] откуда

$$P(0,714) \approx \frac{0,308}{\sqrt{1,96}} \approx \frac{0,31}{1,4} \approx 0,22.$$

Разница в значениях вероятности связана с различиями в условиях использования формул Пуассона и Лапласа. Формула Лапласа обычно применяется при $\lambda > 10$, и поэтому она дала менее точный результат.

Задача 4

В здании имеется 2500 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.

Примерный образец чистового оформления в конце урока.

Следует отметить, что рассматриваемые задачи очень часто встречаются в «обезличенном» виде, например:

Производится некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью 0,5. Опыт повторяется в неизменных условиях 2500 раз. Определить вероятность того, что в 2500 опытах событие A произойдет от 1250 до 1275 раз

Задача 4: **Решение**: используем интегральную теорему Лапласа:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где:

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ – функция Лапласа.

В данной задаче:

$n = 2500$ – всего ламп в здании;

$m_1 = 1250$ – минимальное количество одновременно включенных ламп;

$m_2 = 1275$ – максимальное количество одновременно включенных ламп;

$p = 0{,}5$ – вероятность того, что лампа включена (для каждой из ламп);

$q = 1 - p = 0{,}5$ – вероятность противоположного события.

Вычислим аргументы:

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1275 - 2500 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \frac{1275 - 1250}{\sqrt{625}} = \frac{25}{25} = 1$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1250 - 1250}{25} = 0$$

Значения функции $\Phi(x)$ найдём по соответствующей таблице:

$P_{2500}(1250 \le m \le 1275) \approx \Phi(1) - \Phi(0) \approx 0{,}3413 - 0 = 0{,}3413$ – вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.

Ответ: $P_{2500}(1250 \le x \le 1275) \approx 0{,}3413$

Задача. Вероятность изготовления годной детали равна 0,8. Произведено 500 деталей. Какое число годных деталей вероятнее получить: а) менее 390; б) от 390 до 410?

Решение. Параметры: $p=0,8$, $n=500$, $q=1-p=0,2$.

Используем интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(m1,m2)\approx\Phi\left(\frac{m2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$, где значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$

берутся из таблицы.

а) Найдем вероятность того, что будет менее 390 годных деталей:

$$P_{500}(0,390)\approx\Phi\left(\frac{390-500\cdot 0,8}{\sqrt{500\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)-\Phi\left(\frac{0-500\cdot 0,8}{\sqrt{500\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\Phi(-1,12)-\Phi(-44,72)=$$

$$=-\Phi(1,12)+\Phi(44,72)=-0,3686+0,5=0,1314.$$

б) Найдем вероятность того, что будет от 390 до 410 годных деталей:

$$P_{500}(390,410) \approx \Phi\left(\frac{410-500\cdot 0,8}{\sqrt{500\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)-\Phi\left(\frac{390-500\cdot 0,8}{\sqrt{500\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\Phi(1,12)-\Phi(-1,12)=$$

$$=\Phi(1,12)+\Phi(1,12)=2\Phi(1,12)=2\cdot 0,3686=0,7372.$$

Вероятнее получить от 390 до 410 годных деталей.

Ответ: Вероятнее получить от 390 до 410 годных деталей.

Задача. Стоматологическая клиника распространяет рекламные листовки у входа в метро. Опыт показывает, что в одном случае из тысячи следует обращение в клинику. Найти вероятность того, что при распространении 50 тыс. листков число обращений будет:

А) равно 41,

Б) находиться в границах от 36 до 47.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами

$n = 50000$ - количество распространенных листовок,

$p = \frac{1}{1000} = 0,001$ - вероятность обращения в клинику после получения листовки,

$q = 1 - p = 0,999$.

А) Так как n достаточно велико, будем использовать приближенную формулу – локальную формулу Лапласа: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $k = 41$, значения функции $\varphi(x)$ берутся из таблицы. Подставляем:

$$P_{50000}(41) \approx \frac{1}{\sqrt{50000 \cdot 0,001 \cdot 0,999}}\varphi\left(\frac{41 - 50000 \cdot 0,001}{\sqrt{50000 \cdot 0,001 \cdot 0,999}}\right) = 0,141 \cdot \varphi(-1,273) =$$

$$= 0,141 \cdot \varphi(1,273) = 0,141 \cdot 0,177 \approx 0,025.$$

Б) Так как n достаточно велико, будем использовать приближенную формулу – интегральную теорему Лапласа: $P_n(m1, m2) \approx \Phi\left(\frac{m2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $m1 = 36$, $m2 = 47$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ – функция Лапласа (значения берутся из таблиц).

Подставляем:

$$P_{50000}(36;47) \approx \Phi\left(\frac{47 - 50000 \cdot 0,001}{\sqrt{50000 \cdot 0,001 \cdot 0,999}}\right) - \Phi\left(\frac{36 - 50000 \cdot 0,001}{\sqrt{50000 \cdot 0,001 \cdot 0,999}}\right) = \Phi(-0,42) - \Phi(-1,98) =$$

$$= -\Phi(0,42) + \Phi(1,98) = -0,1644 + 0,4762 \approx 0,3118.$$

Ответ: 0,025; 0,3118.

Пример 1.35. Проверкой установлено, что цех в среднем выпускает 96% продукции высшего сорта. На базе приемщик проверяет 200 изделий этого цеха. Если среди них окажется более 10 изделий не высшего сорта, то вся партия изделий бракуется, т. е. возвращается в цех. Какова вероятность того, что партия будет принята?

❍ Здесь $n = 200$, $p = 0{,}04$ (вероятность негодного изделия), $q = 0{,}96$. Вероятность принятия всей партии, т. е. $P_{200}(0 \leqslant m \leqslant 10)$, можно найти по формуле (1.44); здесь $k_1 = 0$, $k_2 = 10$. Находим, что $x_1 = \dfrac{0 - 200 \cdot 0{,}04}{\sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} \approx -2{,}89$, $x_2 = \dfrac{10 - 200 \cdot 0{,}04}{\sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} \approx 0{,}72$, $P_{200}(0 \leqslant m \leqslant 10) = \Phi_0(0{,}72) - \Phi_0(-2{,}89) = 0{,}26424 + 0{,}49807 = 0{,}7623$. Заметим, что $\Phi(0{,}72) - \Phi(-2{,}89) = 0{,}7642 - (1 - \Phi(2{,}89)) = 0{,}7642 - (1 - 0{,}998074) = 0{,}7623$. ●

С помощью функции Лапласа можно найти вероятность отклонения относительной частоты $\frac{n_A}{n}$ от вероятности p в n независимых испытаниях. Имеет место формула

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}=2\Phi_0\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\varepsilon>0$ — некоторое число.

❑ Из $\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon$ следует: $-\varepsilon\leqslant\frac{n_A}{n}-p\leqslant\varepsilon$, $np-n\varepsilon\leqslant n_A\leqslant np+n\varepsilon$. По формуле получаем:

$$P_n\{np-n\varepsilon\leqslant n_A\leqslant np+n\varepsilon\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=2\Phi_0\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

т. е. $P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}=2\Phi_0\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. ■

Пример 1.36. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при $n = 1200$ независимых выстрелах отклонение «частости» от вероятности по модулю не превышает $\varepsilon = 0{,}05$.

$$P_{1200}\left\{\left|\frac{n_A}{n}-0{,}6\right|\leqslant 0{,}05\right\} = 2\Phi_0\left(0{,}05\cdot\sqrt{\frac{1200}{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) = 2\Phi_0(3{,}54) = 0{,}9996.$$