

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Испытания и события

Будем называть **испытанием** реализацию некоторой совокупности условий. Результатом испытания являются **события**.

Пример. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета - событие.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет при испытании. **Невозможным** называют событие, которое заведомо не произойдет при испытании. **Случайным** называют событие, которое при испытании может либо произойти, либо не произойти.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных

Испытания и события

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. В противном случае, события называются **совместными**.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий. Рассматриваемые в этом случае события образуют **полную группу несовместных событий**.

События называют **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным чем

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой $P(A) = \frac{m}{n}$, где m - число элементарных исходов, благоприятствующих A ; n - число всех возможных элементарных исходов испытания. Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Классическое определение вероятности

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события **A** определяется формулой

$W(A) = m/n$, где m - число появлений события, n - общее число испытаний.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Теоремы теории вероятностей

Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A , или события B , или обоих этих событий. По другому: **суммой $A + B$** двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. В частности, если два события A и B - несовместные, то $A + B$ - событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого. **Суммой нескольких событий** называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема. Вероятность появления одного из ~~двух несовместных~~ n событий равна сумме вероятностей этих событий:

Следствие. $\left(\sum_{i=1}^n P(A_i) \right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ вероятность появления одного из n попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей

Теоремы теории вероятностей

Теорема. Сумма вероятностей несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n , образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из двух противоположных событий обозначено через A , то

другое принято обозначать \bar{A} .

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p , то вероятность другого события обозначают через q . Таким образом, в силу предыдущей теоремы $p + q = 1$.

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Теоремы теории вероятностей

Произведением двух событий A и B называют событие AB , состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Условной вероятностью $P(B|A)$ называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Событие B называют независимым от события A , если появление события A не изменяет вероятности события B , т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P(B|A) = P(B)$. Можно показать, что если событие B не зависит от события A , то и событие A не зависит от события B ; это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Теоремы теории вероятностей

Для независимых событий теорема умножения имеет вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \text{ т. е. вероятность совместного появления двух}$$

независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Два события называют **независимыми**, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют **зависимыми**.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Для независимых событий $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$;

для зависимых событий $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B|A)$.

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$ события A . События H_1, H_2, \dots, H_n называются в этом случае гипотезами относительно события A .

Теорема. Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность

события A :

Эту формулу называют **формулой полной вероятности**. Вероятности $P(H_i)$ трактуются как доопытные (*априорные*) вероятности гипотез

Формула Байеса

Если известно, что событие A произошло, то априорные вероятности гипотез H_i должны быть пересчитаны.

Апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез H_i при условии, что событие A произошло, вычисляются по формуле **Байеса**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $P(A)$ определяется по формуле полной вероятности.

Повторные испытания

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют **независимыми относительно события A повторными испытаниями**. Будем считать, что в разных независимых испытаниях событие A имеет одну и ту же вероятность. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p . Тогда вероятность ненаступления события A равна q . Вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n - k$ раз обозначают $P_n(k)$ и находят с помощью формулы Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий

Повторные испытания

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \text{где } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Тогда $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ДСВ)

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Будем обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z , а их возможные значения - соответствующими строчными буквами x, y, z .

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически. При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая строка — вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу несовместных событий; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p (следовательно, вероятность не появления $q = 1 - p$). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях. Возможные значения X таковы: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = n$. Вероятности этих возможных значений $P_n(k)$ определяются формулой

Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

Напишем

X	n	$n - 1$...	k	...	0
P	p^n	$np^{n-1}q$...	$C_n^k p^k q^{n-k}$...	q^n

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. Рекомендуем запомнить это утверждение, так как далее оно используется многократно.

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Замечание. Две случайные величины называют **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины **зависимы**.

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух **независимых** случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Свойство 4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Теорема. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события **A** в **n** независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X) = np$.

Дисперсия дискретной случайной величины

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]$$

ее математического ожидания:

Замечание. Дисперсия дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Для ДСВ X , заданной своими значениями x_i и соответствующими им

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - M^2(X)$$

вероятностями:

Свойства дисперсии.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C) = 0$.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

Свойство 2. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии

Дисперсия дискретной случайной величины

Свойство 3. Дисперсия суммы двух **независимых** случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) .$$

Следствие. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Свойство 4. Дисперсия разности двух **независимых** случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) .$$

Теорема. Дисперсия числа появлений события **A** в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность **p** появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании: $D(X) = npq$.

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Теорема. Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа **взаимно независимых** случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)} \quad \sigma\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i)} \quad \text{или}$$

.

Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины

Рассмотрим n взаимно независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , которые имеют одинаковые распределения, а следовательно, и одинаковые характеристики. Обозначим среднее арифметическое рассматриваемых случайных величин через \bar{X} :
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Имеют место следующие утверждения:

1. Математическое ожидание среднего арифметического n одинаково распределенных **взаимно независимых** случайных величин равно

$$M(\bar{X}) = a$$

математическому ожиданию a каждой из величин:

2. Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных **взаимно независимых** случайных величин в n раз меньше дисперсии D

каждой из величин:

$$D(\bar{X}) = \frac{D}{n}$$

3. Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаковых независимых случайных величин в \sqrt{n} раз меньше среднего квадратического отклонения σ каждой из величин:
$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Теорема Чебышева. Если X_1, X_2, \dots, X_n - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε , вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (НСВ)

Невозможно дать перечень всех возможных значений НСВ. Поэтому табличный способ определения закона распределения неприменим.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность $P(X \leq x)$ случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x :

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0, 1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$.

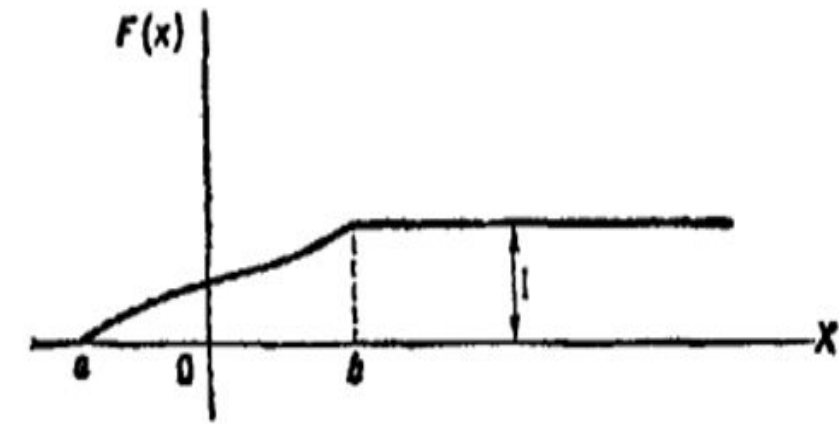
Свойство 2. $F(x)$ - неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b) , то: 1) $F(x) = 0$ при $x \leq a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \geq b$.



Квантиль случайной величины X порядка p называется действительное число x_p , являющееся решением уравнения $F(x_p) = p$.

Квантиль порядка $p = 0,5$ называется **медианой** h_x случайной величины X :
 $h_x = h_{0,5}$.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НСВ

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ - первую производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

пределах от a до b :

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Нахождение функции распределения по известной плотности распределения

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Свойства плотности распределения

Свойство 1. Плотность распределения - неотрицательная функция: $f(x) > 0$.

График плотности распределения называют кривой распределения.

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Закон равномерного распределения вероятностей

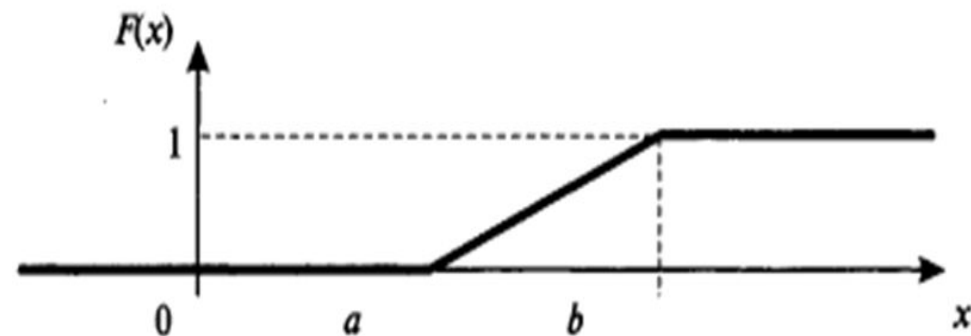
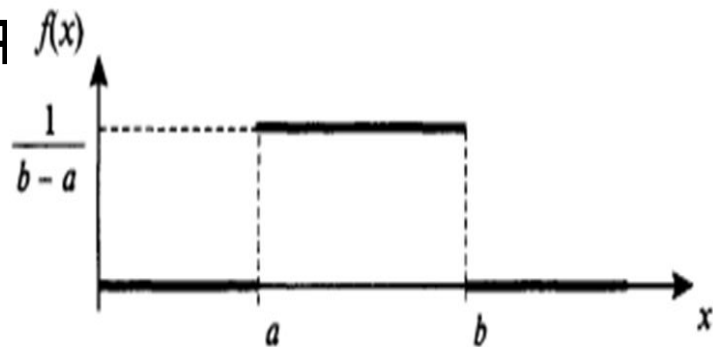
Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функция равномерного распределения $F(x) = \int_a^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$

Графики плотности и функции равномерного распределения

Обозначается:
 $X \sim R(a, b)$.



Числовые характеристики НСВ

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

определенный интеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox , то

Дисперсией НСВ называют математическое ожидание квадрата ее отклонения от мат. ожидания

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

Если возможные

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

если

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

возможные значения принадлежат всей оси x , то

Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ . Можно показать, что a есть математическое ожидание, σ - среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

Общим называют нормальное распределение с произвольными параметрами a и σ ($\sigma > 0$). Обозначается $X \sim N(a, \sigma)$.

Нормированным называют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$: $X \sim N(0, 1)$.

Плотность нормированного распределения $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функция $F(x)$ общего нормального распределения $X \sim N(a, \sigma)$:

Нормальная кривая

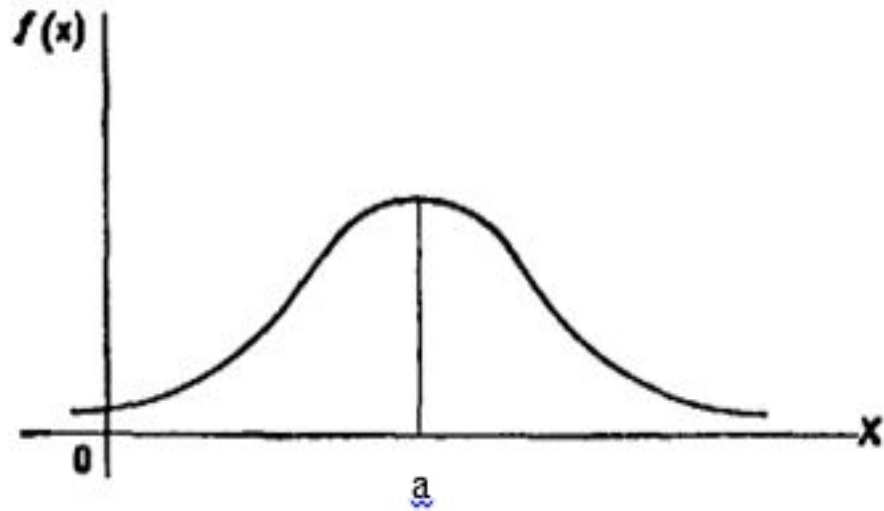


График плотности нормального распределения $X \sim N(a, \sigma)$ называют нормальной кривой (кривой Гаусса).

При

$a = 0$ и $\sigma = 1$ нормальную кривую

называют нормированной.

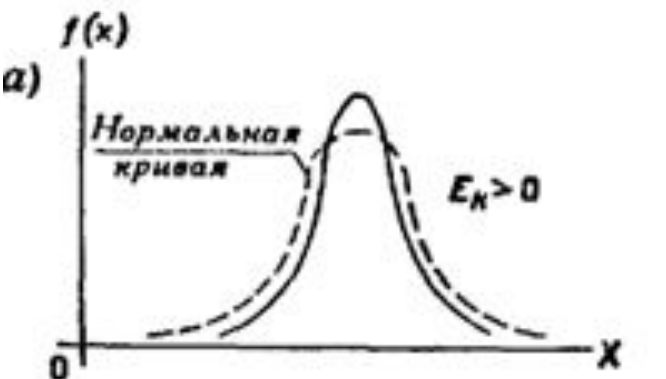
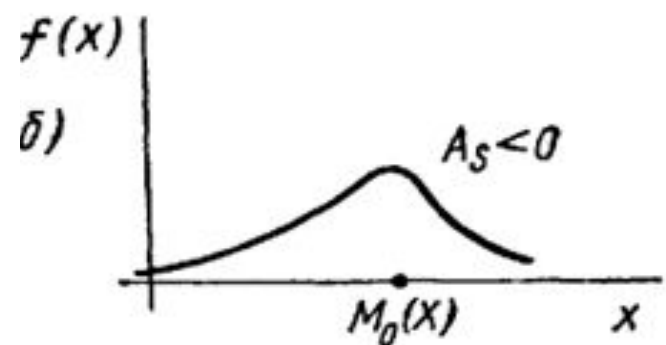
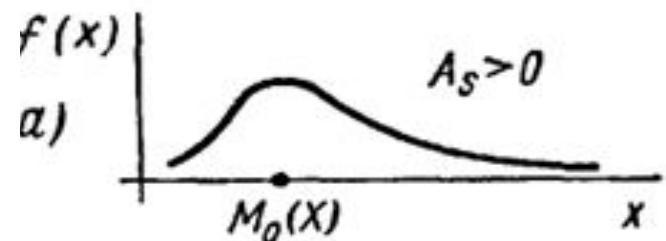
Центральная предельная теорема

Нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике.

Теорема. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Оценка отклонения теоретического распределения от нормального

Асимметрией теоретического распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу стандартного отклонения:

$$A_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$


Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания; асимметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой расположена слева от математического ожидания.

Эксцессом теоретического распределения называют характеристику, которая определяется равенством

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

, где

Если эксцесс положительный, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем

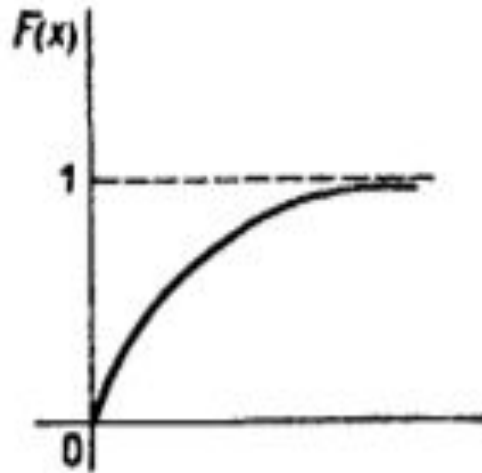
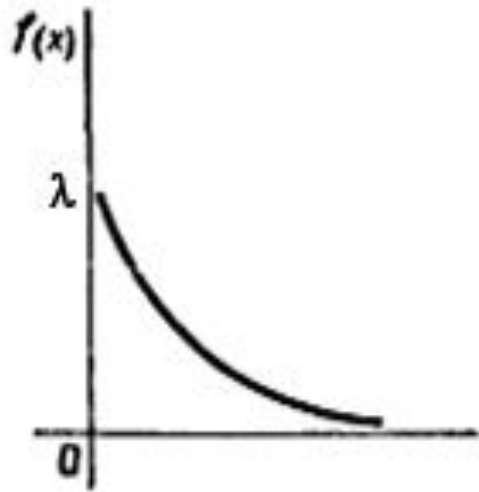
Экспоненциальное (показательное) распределение имеет

плотность $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$

где $\lambda > 0$ - параметр экспоненциального

распределения. Функция распределения экспоненциальной

НСВ $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$



Экспоненциальное распределение обозначается $X \sim E(\lambda)$.

Числовые характеристики НСВ

$X \sim E(\lambda): M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$

Распределением χ^2 с k степенями свободы называется распределение СВ $\chi^2(k)$, равной сумме квадратов k независимых нормально распределенных по стандартному нормальному закону

$$\chi^2(k) = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2$$

$N(0, 1)$ случайных величин U_i , $i = 1, 2, \dots, k$, т.е.

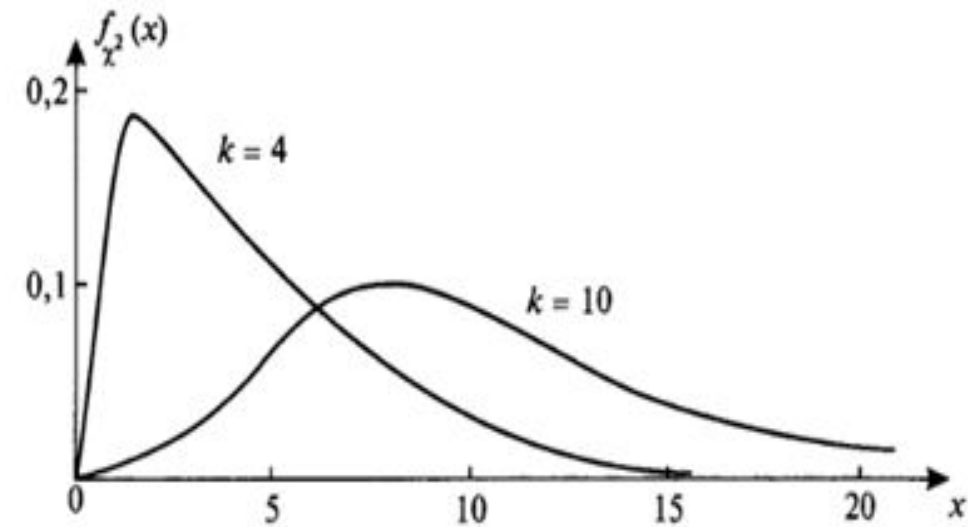
Числовые характеристики

распределения $D[\chi^2(k)] = 2k$

$\chi^2: \chi^2(k_1) + \chi^2(k_2) = \chi^2(k_1 + k_2)$

Имеет место:

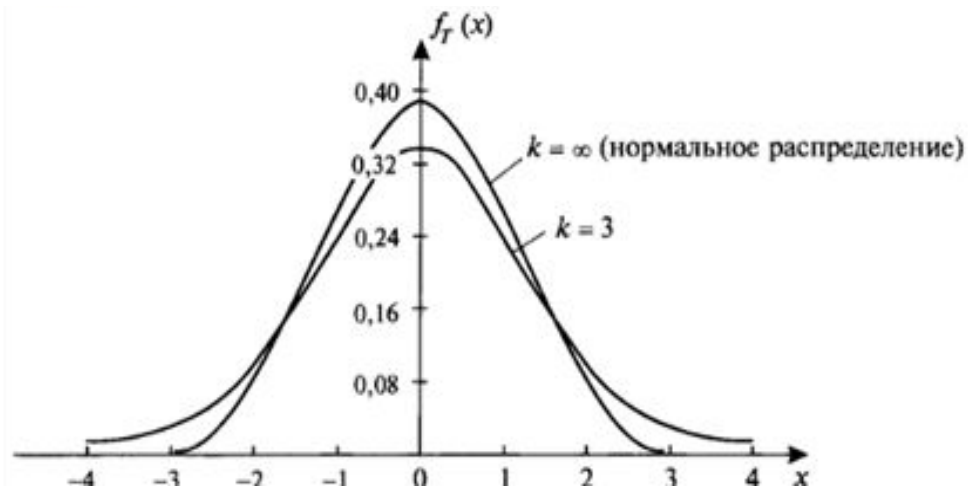
Распределение $\chi^2(k)$ при больших k ($k > 30$) с достаточной точностью аппроксимируется нормальным распределением.



Распределением Стьюдента с k степенями свободы

называется распределение случайной величины $T(k)$, равной

отношению двух независимых СВ U и V , где $U \sim N(0, 1)$.

$$T(k) = \frac{U}{\sqrt{\chi^2(k)/k}}$$


Обозначение $X \sim T(k)$.

Для СВ $X \sim T(k)$ $M[X] = 0$ $D[X] = \frac{k}{k-2}$, $k > 2$

Для квантилей распределения

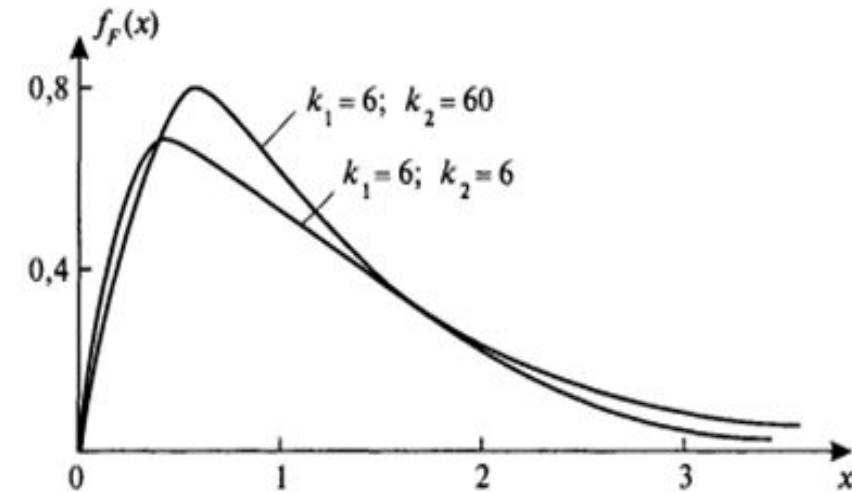
Стьюдента (k)

$$t_p(k) = -t_{1-p}(k)$$

При больших k ($k > 30$) для квантилей распределения Стьюдента выполняется приближенное равенство

Распределением Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы

называется распределение СВ $F(k_1, k_2) = \frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}$.



Для СВ $X \sim F(k_1, k_2)$: $M[X] = \frac{k_2}{k_2 - 2}, k_2 > 2$,

$$D[X] = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}, k > 4$$

Для квантилей распределения

$$F_{1-p}^{(k_1, k_2)} = \frac{1}{F_p(k_1, k_2)}$$

Между случайными величинами, имеющими нормальное распределение, распределение χ^2 , Стьюдента и Фишера имеют место соотношения:

$$T^2(k) = F(1, k), \quad F(k, \infty) = \frac{\chi^2(k)}{k},$$

$$\chi^2(1) = U^2, \quad t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(k) = F_{1-\alpha}(1, k).$$