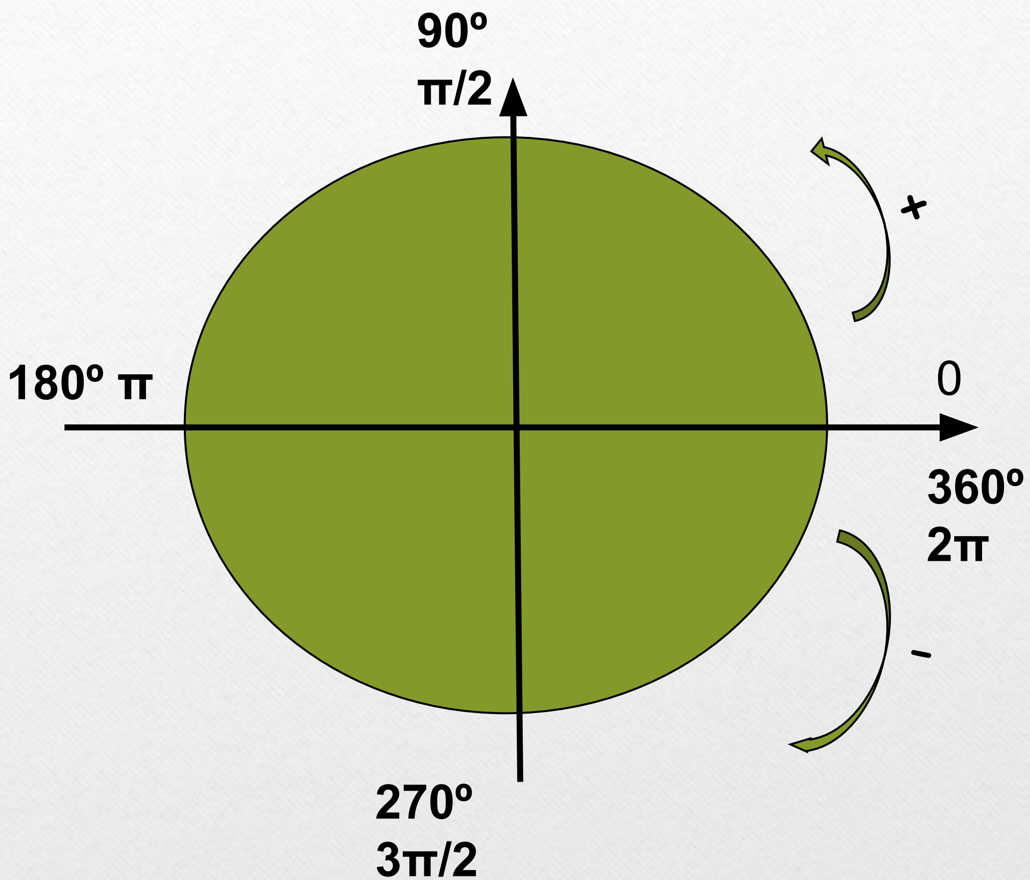
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

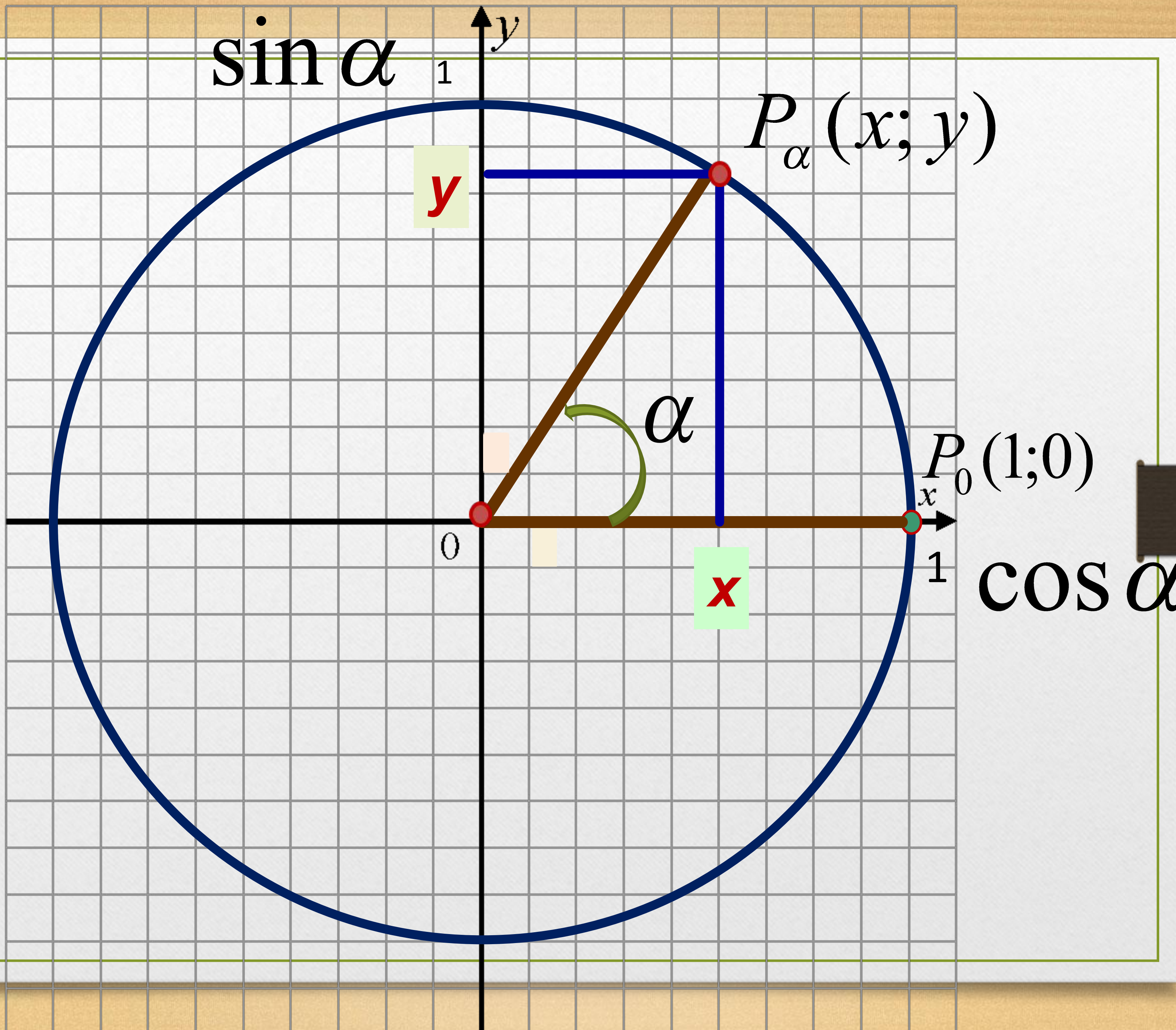
1

Тригонометрический круг



π = 180 °

2



Знаки по четвертям

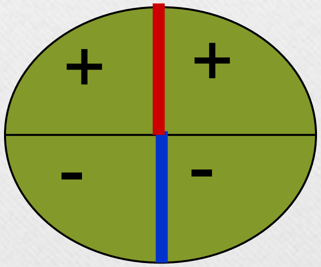
Синус: знаки соответствуют знакам по оси У,

Косинус: знаки соответствуют знакам по оси Х

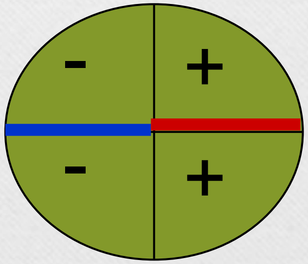
Тангенс и котангенс:

в 1 четверти знак плюс, далее знаки чередуются

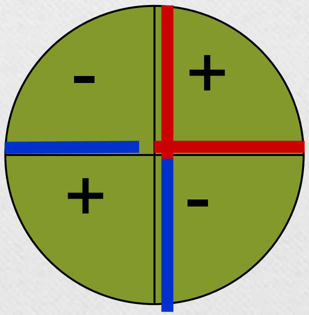
Sin



Cos



tg, ctg



4

Градусная мера угла в радианах

$n^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot n$ рад

- Радианная мера угла в градусах?

α рад $= \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot \alpha^{\circ}$

5

Таблица

Функция	Значения				
	0 0°	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

6

Четность, нечетность тригонометрических функций

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

→ **Нечетные функции**

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

→ **Четная функция**

7

Обратные тригонометрических функций

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b$$

$$arctg(-b) = -arctgb$$

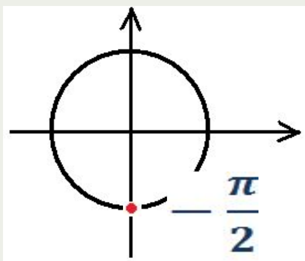
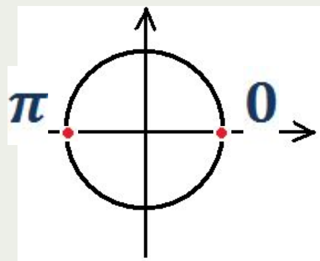
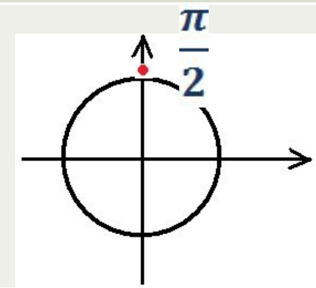
$$\arccos(-b) = \Pi - \arccos b$$

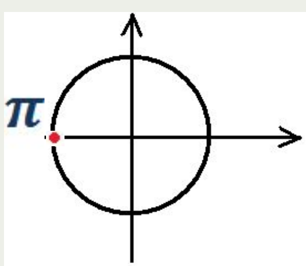
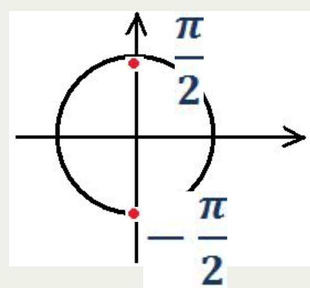
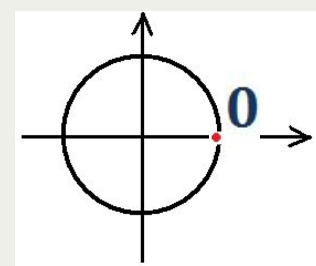
$$arcctg(-b) = \Pi - arcctgb$$

8

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Частные случаи

$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
		

$\cos x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z$
		

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

9

$\cos x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение не имеет решения.

Если $|a| \le 1$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \epsilon Z$

$\sin x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение не имеет решения.

Если $|a| \le 1$ $x = (-1)^{к} \arcsin a + \pi к, к \epsilon Z$

$tg\, x = a$

$x = arctg\, a + \pi n, n \epsilon Z$

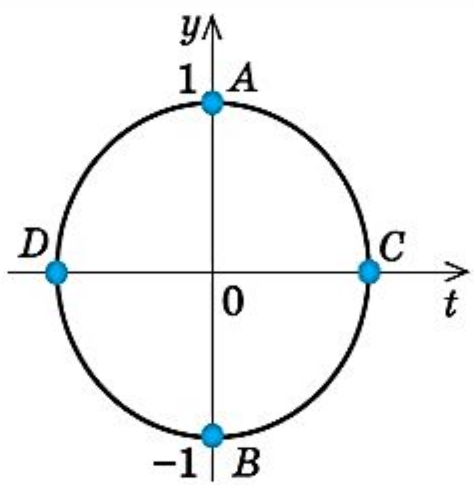
$a \epsilon (-\infty, +\infty)$

$ctg\, x = a$

$x = arcctg\, a + \pi n, n \epsilon Z$

10

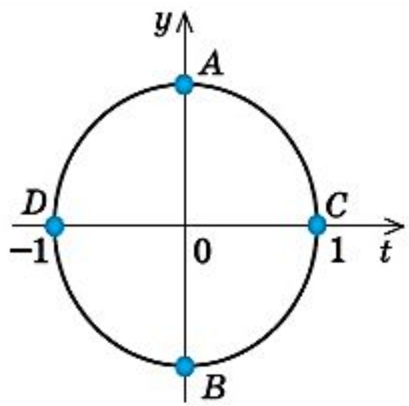
Решения	Примеры
$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$: Корней нет $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$	1. $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z.$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$ 2. $\sin x = \sqrt{3}.$ Корней нет, так как $\sqrt{3} > 1.$

2. Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$	
	$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in Z$ $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

11

Решения	Примеры
$\cos x = a$ $\lvert a\rvert > 1$: **Корней нет** $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	1. $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. 2. $\cos x = \sqrt{3}$. Корней нет, поскольку $\sqrt{3} > 1$.

2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$



$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k,\ k \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

12

Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} x = a \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} x = 0 \\ x = \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\operatorname{tg} x = 1$ ▶ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in Z.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ctg} x = a \\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ctg} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\operatorname{ctg} x = 7$ ▶ $x = \operatorname{arcctg} 7 + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

13

Тригонометрические уравнения, решаемые выненсением за скобки….

$\cos^2 x - 2\cos x = 0$.

$\cos x(\cos x - 2) = 0.$

$\cos x = 0$ или $\cos x - 2 = 0.$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 2$

решений нет

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 2$

решений нет

14

Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным

$$\cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

Сделаем замену переменной $t = \cos x$ $|t| \leq 1$

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

Получаем : $t = -5$, $t = 1$

Делаем обратную замену

$\cos x = 1$ cosx=-5 решений нет

$x = 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $2\pi n, n \in Z$

Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0.$$

$$6(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 7 = 0.$$

$$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$\cos x = 2$$

решений нет

Далее применяем формулу

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $\cos x = 2$

16

Пример

$$\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$$

Применим основное тригонометрическое тождество

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Сделаем замену переменной

$t = \cos x$ $\qquad$ $\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2 + t = 0$

Получаем : $t = \sqrt{2}$, $\quad t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|t| \le 1$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

17

Однородные тригонометрические уравнения 1 степени

$\sin x - 2\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = 2$

решений нет

18

Однородные тригонометрические уравнения 2 степени

$sin^2 x – 6 sin x cos x + 5 cos^2 x = 0.$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$\cos x = 2$$

решений нет

19

Пример

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \ 1 + \cos x = 0$$

Сделаем замену переменной $t = \cos x$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$|t| \le 1$$

Получаем : $t = -1$ $t = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi к, к \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi к, к \in Z$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $\pi + 2\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi к, n, к \in Z$

20

Пример $tgx + 3ctgx = 4$

$$tgx + \frac{3}{tgx} = 4$$

Сделаем замену переменной $t = tgx$

$tgx = 1/ctgx$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

Получаем : $t = 3$, $t = 1$

$tgx = 3$

$x = arctg\,3 + \pi к, к \in Z$

$tgx = 1$

$x = arctg\,1 + \pi n, n \in Z$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, arctg\,3 + \pi к, n, к \in Z$

Задания для самостоятельной работы

Вариант № 1	Вариант № 2
1) $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$	1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$
2) $\cos 2x + 3\sin x = 2$	2) $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 1\frac{9}{16}$
3) $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$	3) $2tgx - 2ctgx = 3$
4) $ctgx - \sqrt{3}\,tgx + 1 = \sqrt{3}$	4) $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25$
5) $1 + \cos x = ctg\frac{x}{2}$	5) $2\cos 2x - 4\cos x = 1$

Ответы самостоятельной работы

Вариант № 1	Вариант № 2
1) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$	1) $x = (-1)^{к}\frac{\pi}{6} + \pi к, к\epsilon Z$
2) $x = (-1)^{к}\frac{\pi}{6} + \pi к; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n, к\epsilon Z$	2) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi к; \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, к, n\epsilon Z$
3) $x = \frac{\pi}{6}(4к + 1); (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n, n, к\epsilon Z$	3) $x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n, n\epsilon Z$ или $x = \mathrm{arctg}\,2 + \pi к, к\epsilon Z$
4) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi к; \frac{\pi}{6} + \pi n, n, к\epsilon Z$	4) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z$
5) $x = \pi + 2\pi к; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, к, n\epsilon Z$	5) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi к, к\epsilon Z$

	2. Основные тригонометрические тождества		3.Формулы двойного аргумента
1	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	7	$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
2	$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$	8	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3	$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$	9	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
4	$tgx\, ctgx = 1$	10	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
5	$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	11	$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$
6	$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	12	$ctg2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$

4. Формулы сложения

1	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
2	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
3	$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
4	$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
5	$tg(x+y)=\dfrac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}$
6	$tg(x-y)=\dfrac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}$
7	$ctg(x+y)=\dfrac{ctgxctgy-1}{ctgx+ctgy}$
8	$ctg(x-y)=\dfrac{ctgxctgy+1}{ctgx-ctgy}$

5. Формулы преобразования суммы в произведение

1	$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
2	$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$
3	$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
4	$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

6. Формулы преобразования произведения в сумму

1	$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
2	$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
3	$\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

Формулы приведения

α	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$