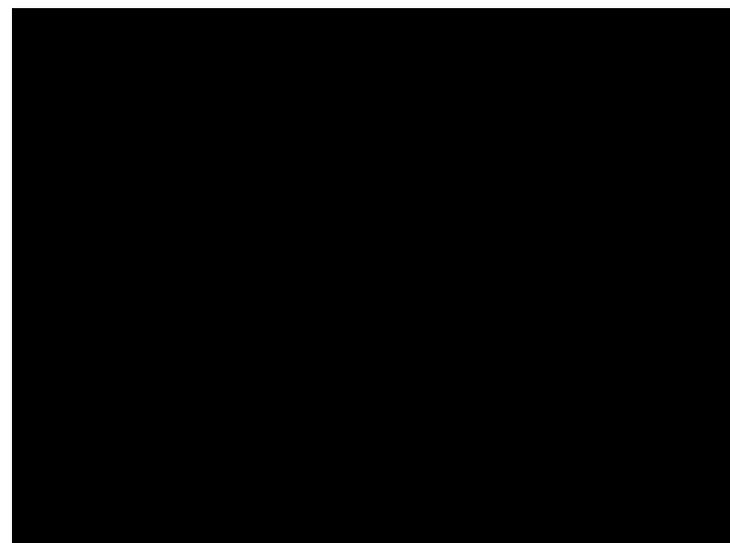


Введение в численные методы 2 курс

Мухин Сергей Иванович
`vmmus@cs.msu.ru`

2020 г.



Введение в численные методы
Численные методы алгебры
Численные методы
Численные методы математической физики
МКЭ
Кафедральные курсы



Общее содержание курса

- Численное решение систем линейных алгебраических уравнений
- Приближение функций
- Численное интегрирование
- Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений
- Разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Литература

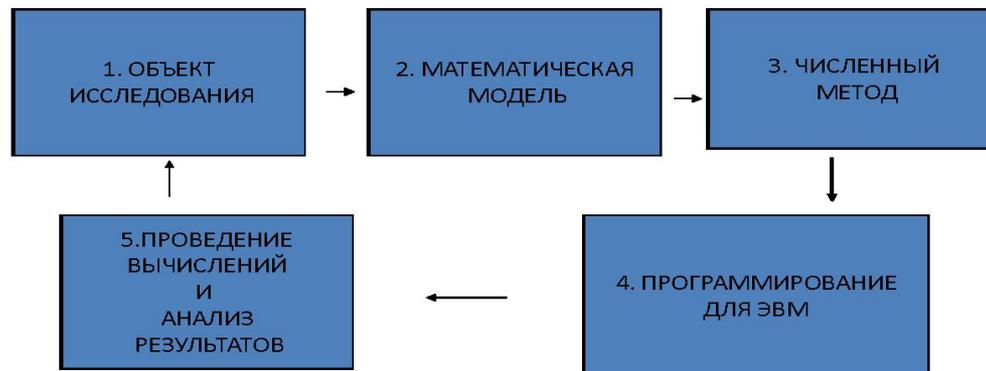
Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам . –М.: Логос, 2004, 184с .

Дополнительная литература:

1. Самарский А.А. Введение в численные методы. –М.: Наука, 1987, 288 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. –М.: Наука, 1978, 432 с.

- В настоящее время выработалась технология исследования сложных проблем, основанная на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей изучаемого объекта. Такой метод исследования называют вычислительным экспериментом.
- Пусть, например, требуется исследовать какой-то физический объект, явление, процесс. Тогда схема вычислительного эксперимента выглядит так, как показано на рисунке. Формулируются основные законы, управляющие данным объектом исследования (I) и строится соответствующая математическая модель (II), представляющая обычно запись этих законов в форме системы уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т.д.). При выборе физической и, следовательно, математической модели мы пренебрегаем факторами, не оказывающими существенного влияния на ход изучаемого процесса.
- Типичные математические модели, соответствующие физическим явлениям, формулируются в виде уравнений математической физики. Большинство реальных процессов описывается нелинейными уравнениями и лишь в первом приближении (при малых значениях параметров, малых отклонениях от равновесия и др.) эти уравнения

Схема вычислительного эксперимента



Необходимые этапы моделирования

- Знакомство с предметной областью
- Математическая формализация понятий и закономерностей предметной области
- Использование существующих и/или построение новых математических моделей
- Математическая постановка решаемой задачи (как правило, набор усложняющихся иерархических моделей)
- Выбор или построение вычислительного алгоритма с учетом особенностей задачи, исследование его свойств
- Теоретическое исследование (в рамках возможного) свойств задачи и решений
- Написание программ, эффективно реализующих
 - препроцессор (подготовка входных данных и областей расчета)
 - собственно вычислительный алгоритм (солвер)
 - постпроцессор обработки и визуализации результатов расчета
 - реализация и оптимизация параллельных вычислений (если нужно)
 - реализация сетевых версий(если нужно)
- Проведение тестовых и юстировочных вычислительных экспериментов
- Проведение собственно вычислительных экспериментов



Особенности математического моделирования и численного эксперимента

Исследование исходного объекта методом математического моделирования и вычислительного эксперимента неизбежно носит приближенный характер, потому что на каждом этапе вносятся те или иные погрешности. Так, построение математической модели связано с упрощением исходного явления, недостаточно точным заданием коэффициентов уравнения и других входных данных. По отношению к численному методу, реализующему данную математическую модель, указанные погрешности являются неустранимыми, поскольку они неизбежны в рамках данной модели.

При переходе от математической модели к численному методу возникают погрешности, называемые погрешностями метода. Они связаны с тем, что всякий численный метод воспроизводит исходную математическую модель приближенно. Наиболее типичными погрешностями метода являются погрешность дискретизации и погрешность округления. Поясним причины возникновения таких погрешностей.

Обычно построение численного метода для заданной математической модели разбивается на два этапа: а) формулировка дискретной задачи, б) разработка вычислительного алгоритма, позволяющего отыскать решение дискретной задачи. Например, если исходная математическая задача сформулирована в виде системы дифференциальных уравнений, то для численного решения необходимо заменить ее системой конечного, может быть, очень большого числа линейных или нелинейных алгебраических уравнений. В этом случае говорят, что проведена дискретизация исходной математической задачи. Простейшим примером дискретизации является построение разностной схемы путем замены дифференциальных выражений конечно-разностными отношениями. В общем случае дискретную модель можно рассматривать как конечномерный аналог исходной математической задачи. Ясно, что решение дискретизированной задачи отличается от решения исходной задачи. Разность соответствующих решений и называется погрешностью дискретизации. Обычно дискретная модель зависит от некоторого параметра дискретизации, при стремлении которого к нулю должна стремиться к нулю и погрешность дискретизации. При этом число алгебраических уравнений, составляющих дискретную модель, неограниченно возрастает. В случае разностных методов таким параметром является шаг сетки.



Дискретная модель представляет собой систему большого числа алгебраических уравнений. Невозможно найти решение такой системы точно и в явном виде. Поэтому приходится использовать тот или иной численный алгоритм решения системы алгебраических уравнений. Входные данные этой системы, а именно коэффициенты и правые части, задаются в компьютере не точно, а с округлением. **В процессе работы алгоритма погрешности округления обычно накапливаются, и в результате решение, полученное на ЭВМ, будет отличаться от точного решения дискретизированной задачи.** Результирующая погрешность называется погрешностью округления (иногда ее называют вычислительной погрешностью) Величина этой погрешности определяется двумя факторами: точностью представления вещественных чисел в ЭВМ и чувствительностью данного алгоритма к погрешностям округления.

Алгоритм называется устойчивым, если в процессе его работы вычислительные погрешности возрастают незначительно, и неустойчивым - в противоположном случае. При использовании неустойчивых вычислительных алгоритмов накопление погрешностей округления приводит в процессе счета к переполнению арифметического устройства компьютера.

Следует различать погрешности модели, метода и вычислительную. Типичной является ситуация, возникающая при решении задач математической физики, когда погрешность модели значительно превышает погрешность метода, а погрешностью округления в случае устойчивых алгоритмов можно пренебречь по сравнению с погрешностью метода. С другой стороны, при решении, например, систем обыкновенных дифференциальных уравнений возможно применение столь точных методов, что их погрешность будет сравнима с погрешностью округления. **В общем случае нужно стремиться, чтобы все указанные погрешности имели один и тот же порядок.** Например, нецелесообразно пользоваться разностными схемами, имеющими точность 10^{-6} , если коэффициенты исходных уравнений задаются с точностью 10^{-2} .

Одной и той же математической задаче можно поставить в соответствие множество различных дискретных моделей. Однако далеко не все из них пригодны для практической реализации. Вычислительные алгоритмы, предназначенные для быстродействующих компьютеров.

Можно выделить две группы требований к численным методам. Первая группа связана с адекватностью дискретной модели исходной математической задаче, и вторая группа - с реализуемостью численного метода на ЭВМ. К первой группе относятся такие требования, как сходимость численного метода, выполнение дискретных аналогов законов сохранения, качественно правильное поведение решения дискретной задачи.

Предположим, что дискретная модель математической задачи представляет собой систему большого, но конечного числа алгебраических уравнений. Обычно, чем точнее мы хотим получить решение, тем больше уравнений приходится брать. Говорят, что численный метод сходится, если при неограниченном увеличении числа уравнений решение дискретной задачи стремится к решению исходной задачи.

Поскольку реальный компьютер может оперировать лишь с конечным числом уравнений, на практике сходимость, как правило, не достигается. Поэтому важно уметь оценивать погрешность метода в зависимости от числа уравнений, составляющих дискретную модель. По этой же причине стараются строить дискретную модель таким образом, чтобы она **правильно отражала качественное поведение решения исходной задачи даже при сравнительно небольшом числе уравнений.**

Дискретной моделью дифференциальной задачи может быть разностная схема. Для ее построения область изменения независимых переменных заменяется дискретным множеством точек - сеткой, а входящие в исходное уравнение производные заменяются на сетке конечно-разностными отношениями. В результате получаем систему алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в точках сетки. Число уравнений этой системы равно числу точек сетки. Известно, что дифференциальные уравнения математической физики являются следствиями интегральных законов сохранения. Поэтому естественно требовать, чтобы **для разностной схемы выполнялись аналоги таких законов сохранения**. Разностные схемы, удовлетворяющие этому требованию, называются консервативными. Оказалось, что при одном и том же числе точек сетки консервативные разностные схемы более правильно отражают поведение решения исходной задачи, чем неконсервативные схемы.

Сходимость численного метода тесно связана с его корректностью. Предположим, что исходная математическая задача поставлена корректно, т.е. решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Тогда дискретная модель этой задачи должна быть построена таким образом, чтобы свойство корректности сохранилось. Таким образом, в понятие корректности численного метода включаются свойства однозначной разрешимости соответствующей системы уравнений и ее устойчивости по входным данным. Под устойчивостью понимается непрерывная зависимость решения от входных данных, равномерная относительно числа уравнений, составляющих дискретную модель.

Области применения

- ✓ Физика
 - теоретическая
 - прикладная
- ✓ Небесная механика и баллистика
- ✓ Технологии и материалы
- ✓ Атомная энергетика
- ✓ Аэрокосмическая промышленность
- ✓ Биология и медицина
- ✓ Неразрушающие средства контроля
- ✓ Промышленное производство
 - металлургия
 - химическое производство
 - строительство
 - машиностроение
- ✓ Транспорт и логистика
- ✓ Интеллектуальные системы
 - распознавание образов
 - интеллектуальный анализ данных
 - сети и нейросети
- ✓ Социология
- ✓ Лингвистика и машинный перевод

- ✓ Экономика
- ✓ Финансовые и актуарные модели
- ✓ Обратные задачи

✓ **ВСЕ ОСТАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ
ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ** 😊 😊 😊





КОМИТЕТ
ПО ДЕЛАМ ИЗОБРЕТЕНИЙ
И ОТКРЫТИЙ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ
СССР



ДИПЛОМ
НА ОТКРЫТИЕ

В соответствии с Положением об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях Комитет по делам изобретений и открытий при Совете Министров СССР установил, что граждане Союза Советских Социалистических Республик:

ТИХОНОВ Андрей Николаевич
САМАРСКИЙ Александр Андреевич
ЗАКАЯЗЬМИНСКИЙ Лев Алексеевич
ВОЛОСЕВИЧ Петр Петрович
ДЕГТЯРЕВ Лев Маркович
КУРДЮМОВ Сергей Павлович
ПОПОВ Юрий Петрович
СОКОЛОВ Вениамин Сергеевич
ФАВОРСКИЙ Антон Павлович

сделали открытие определяемое следующей формулой:

«Установлено ранее неизвестное явление образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя (Т-слой) при стационарном движении в магнитном поле сжимаемой среды, электропроводность которой увеличивается с повышением температуры, приводящее к резкому увеличению эффективности взаимодействия среды с магнитным полем.

Образование Т-слоя обусловлено существованием обратных нелинейных связей между электро-и гидродинамическими величинами и происходит в тот момент и в том месте, где параметр гидромагнитного взаимодействия по порядку величины равен единице, и происходит наиболее интенсивно, когда магнитное число Рейнольдса также становится порядка единицы».

Настоящее открытие зарегистрировано в Государственном реестре открытий СССР 27 февраля 1968 г. за № 55 с присвоением № 1965

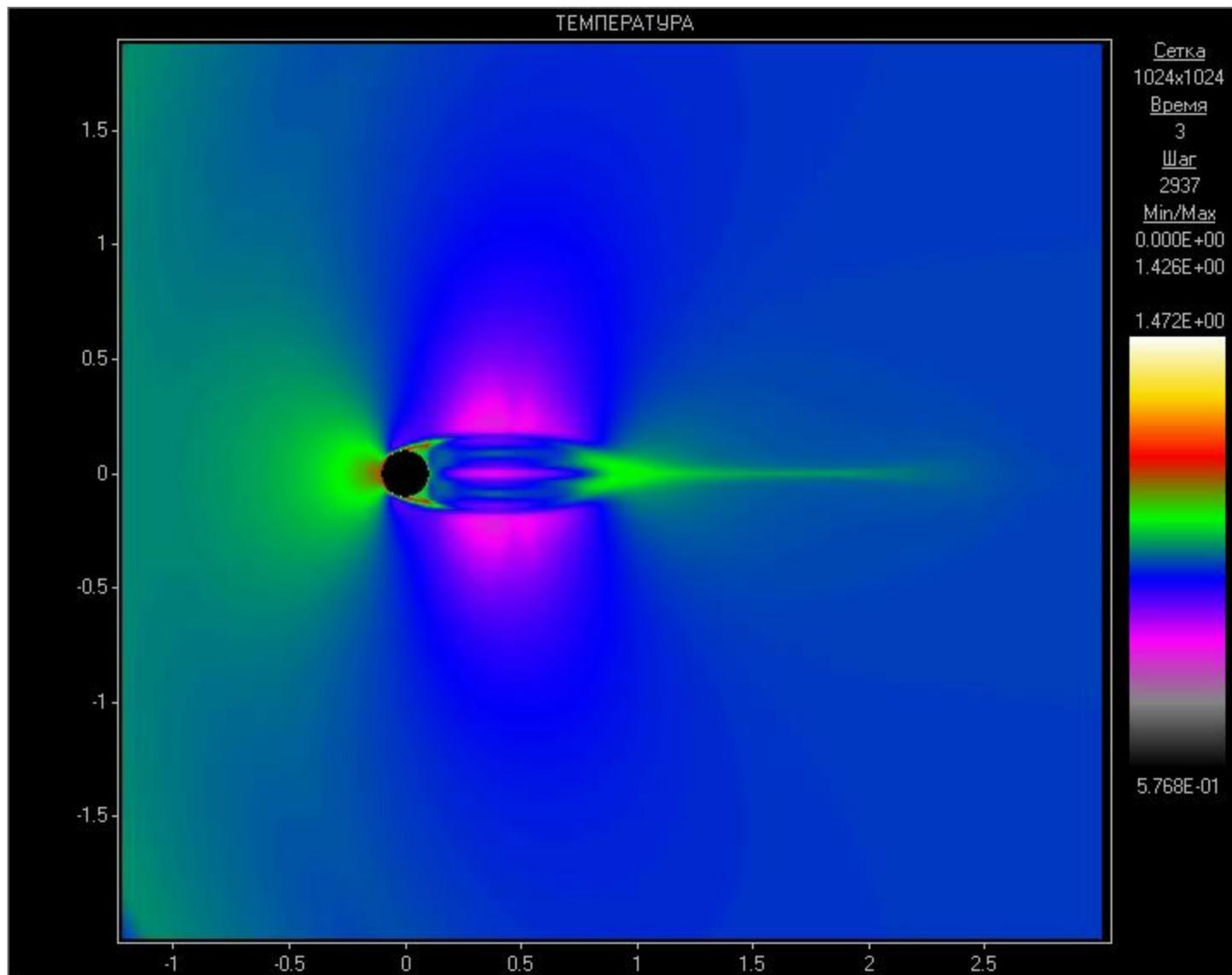
Председатель Комитета

Ю. Мансарев

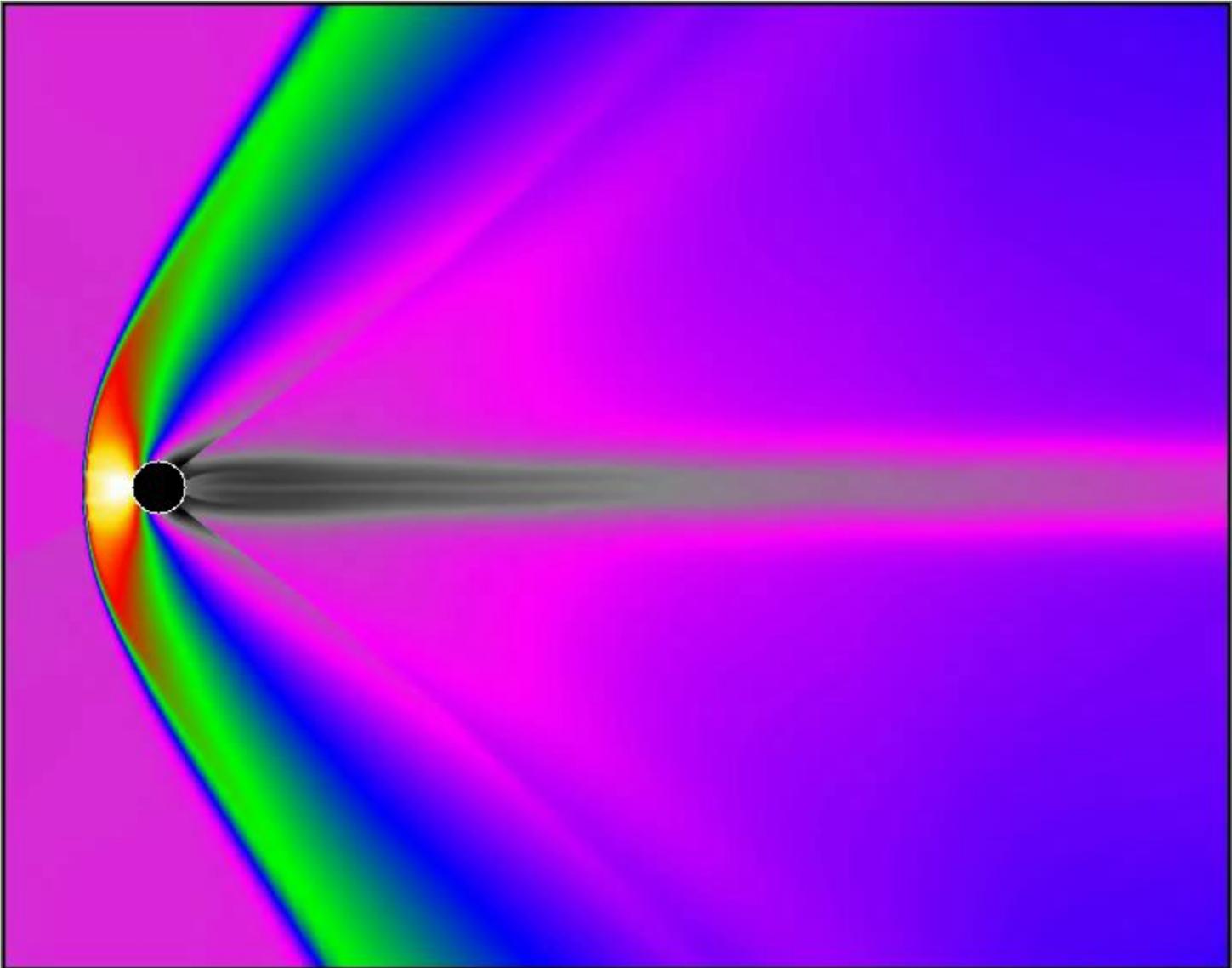
30 " мая 1969 года



Обтекание дозвуковым потоком

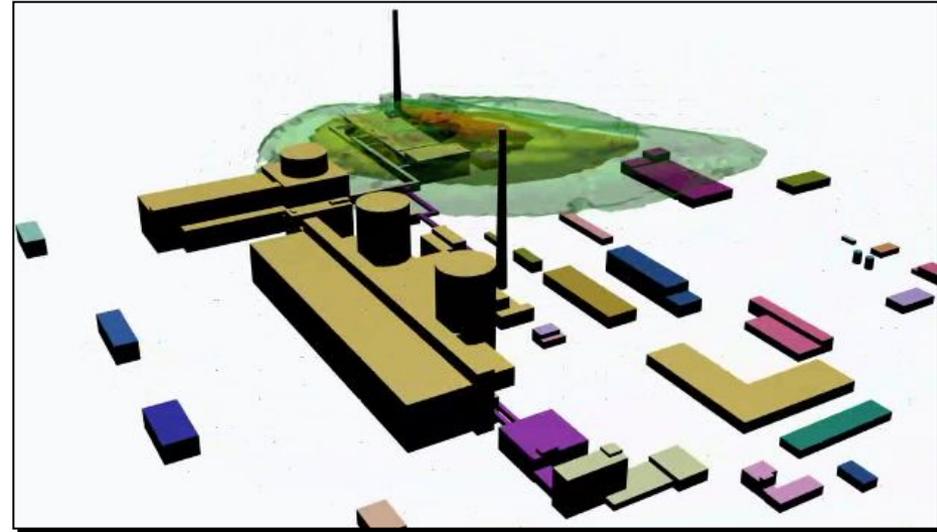
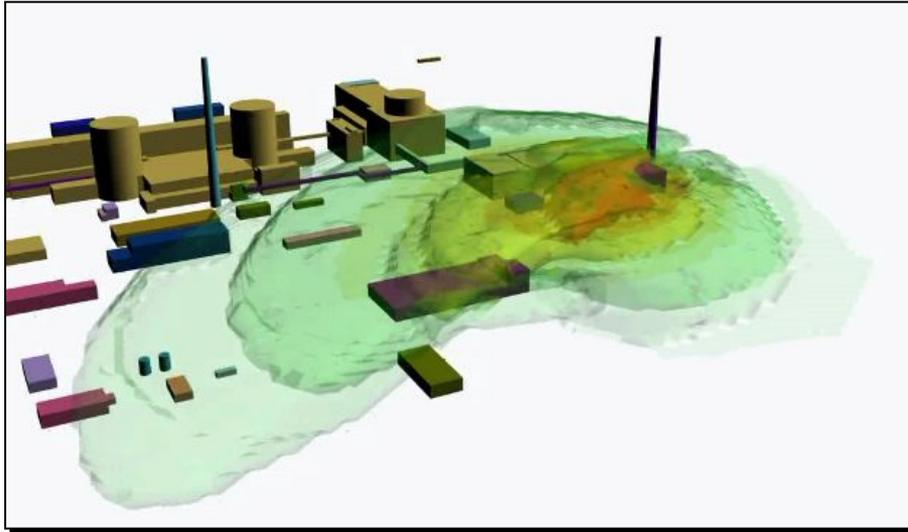


Обтекание сверхзвуковым потоком

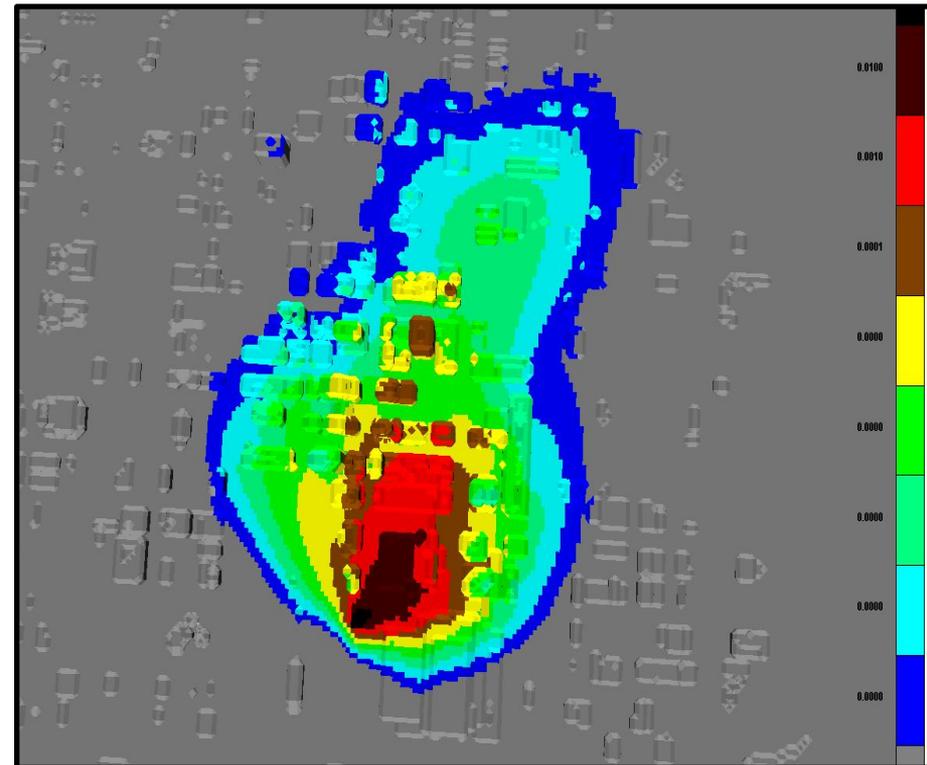
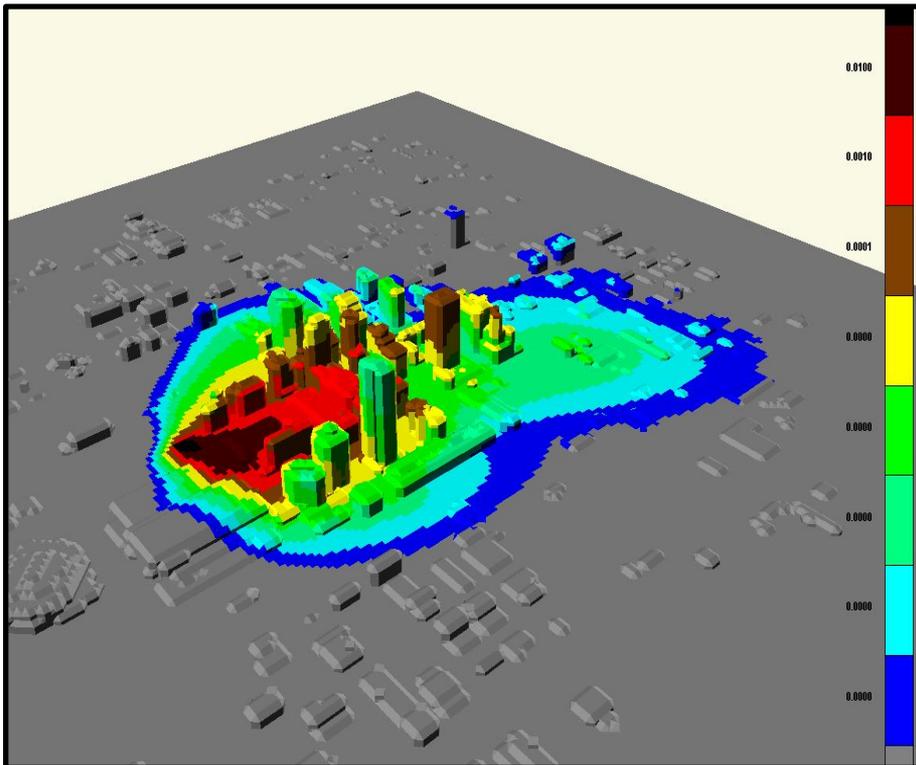


Задачи экологии

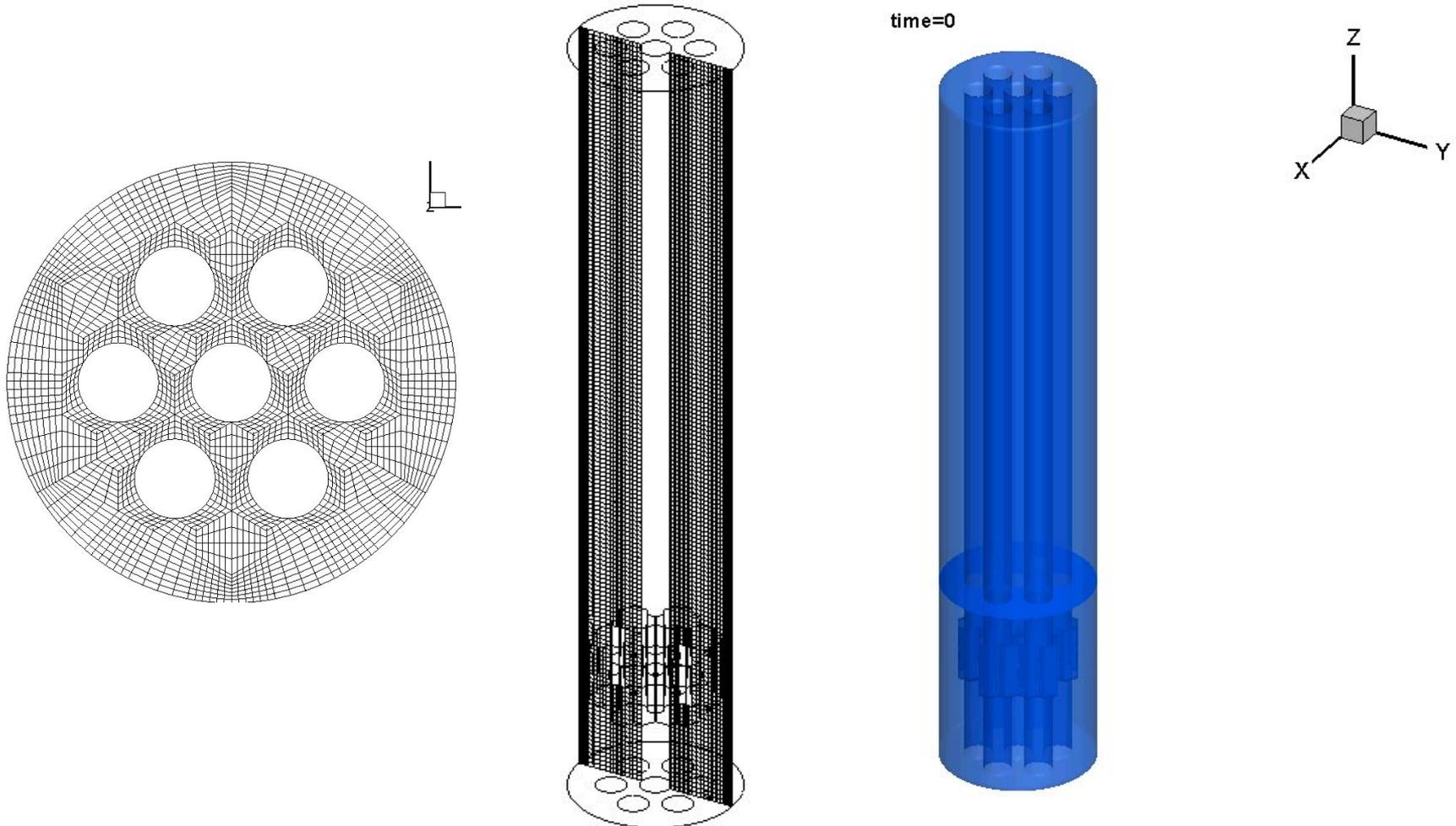
Application of CFD modeling for atmospheric transfer Concentration field



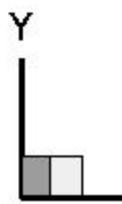
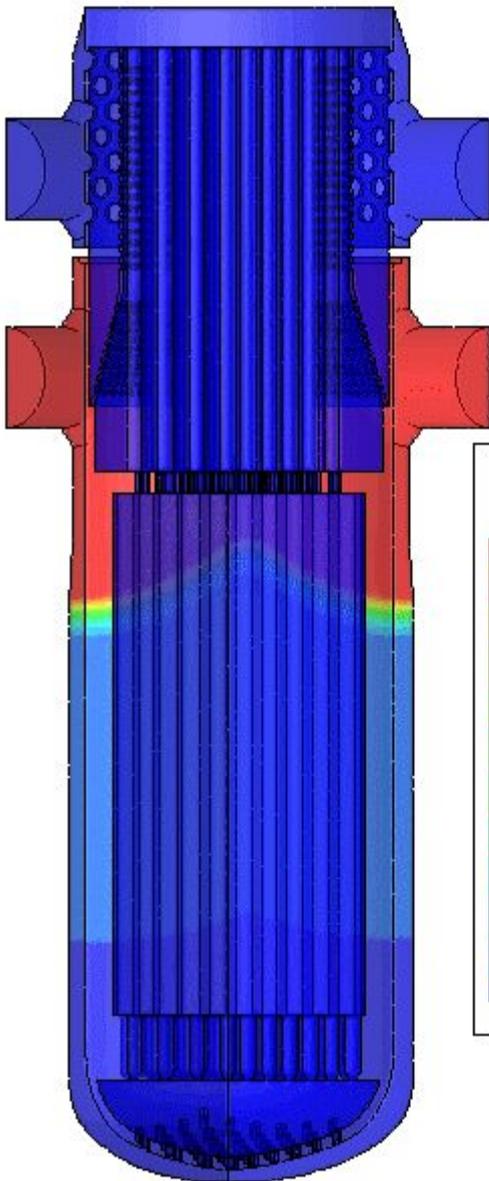
Modeling of impurity dispersion in urban area



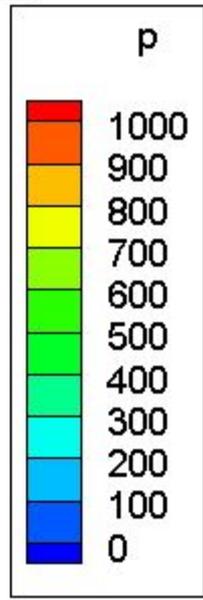
Coolant dynamics in Fuel Assembly



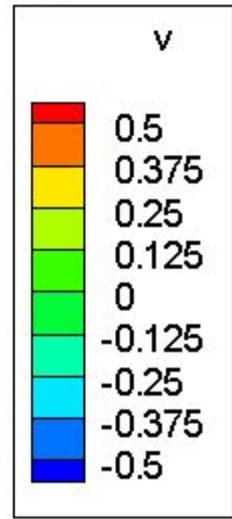
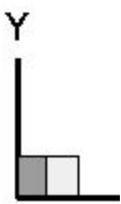
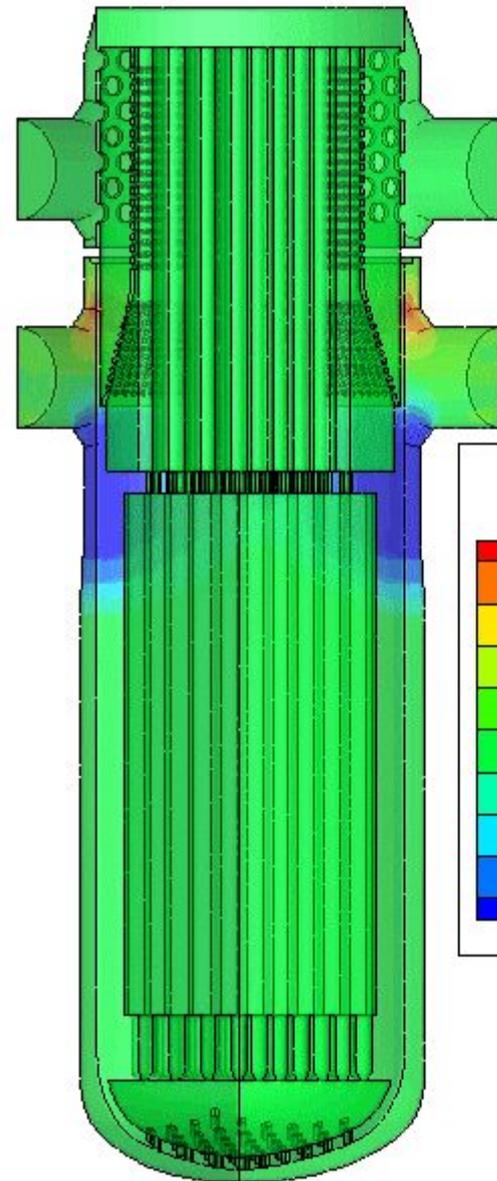
time=0.562235327966039



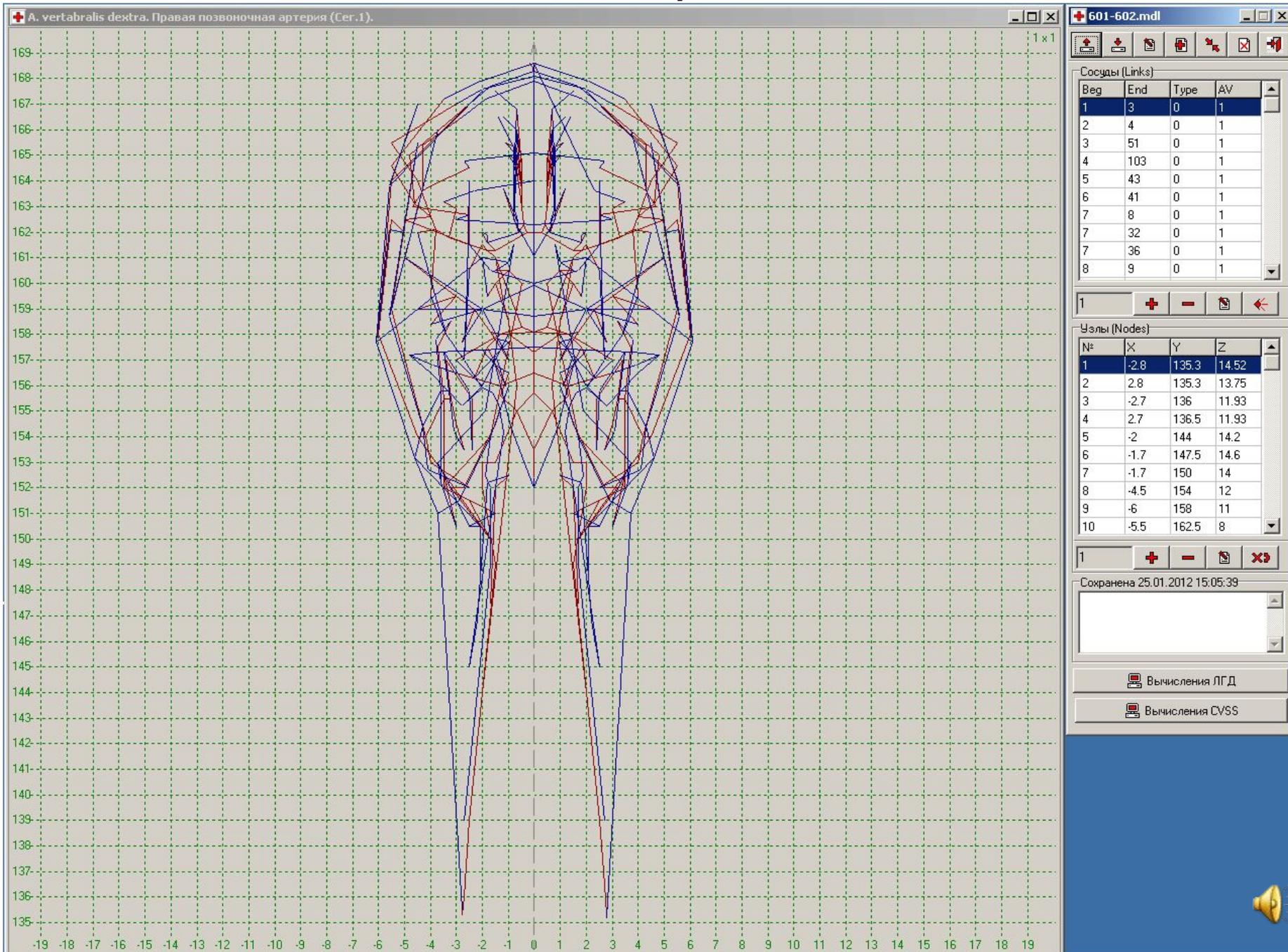
Animation of pressure and vertical speed component

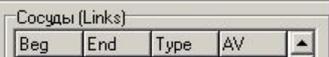
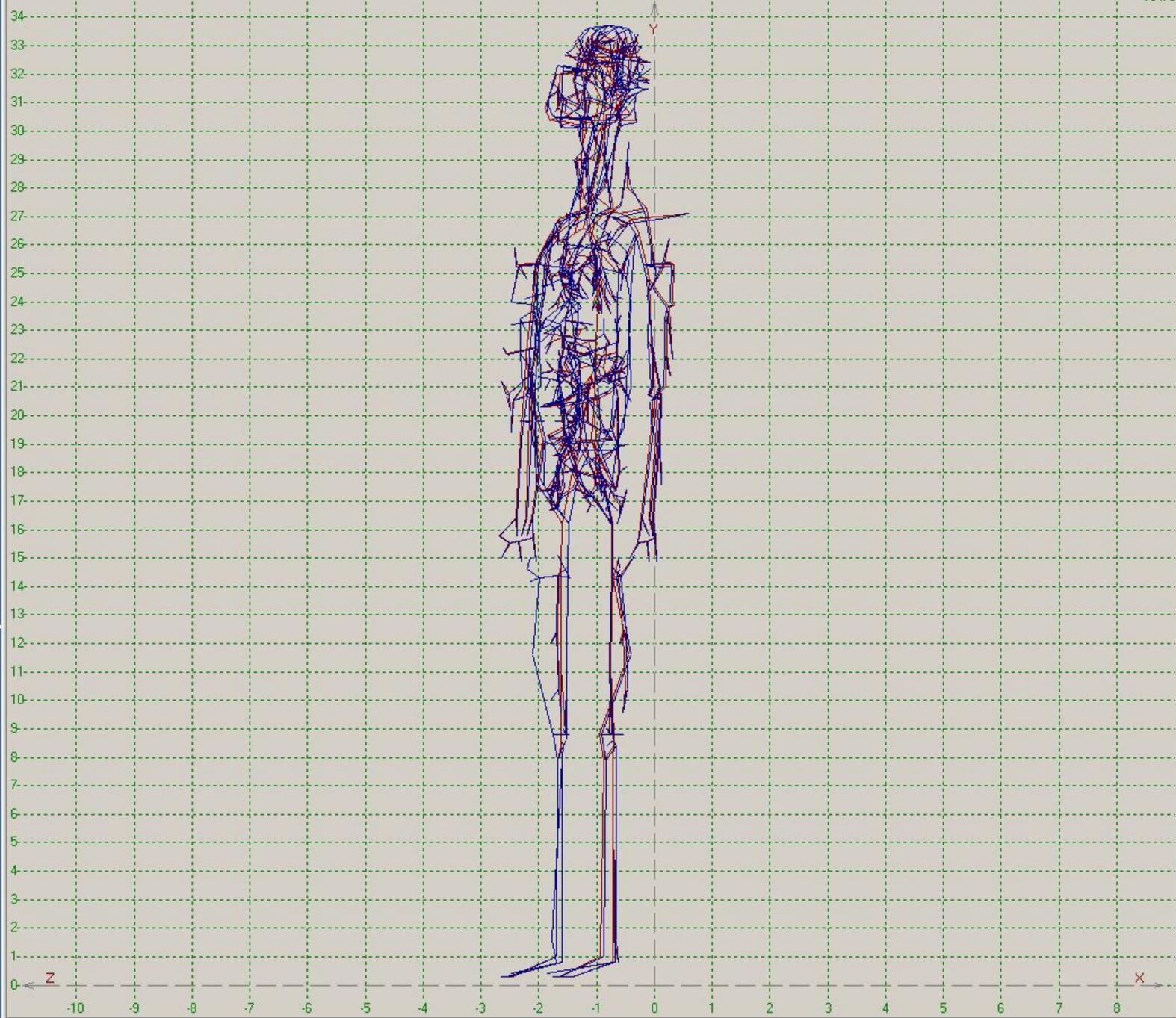


time=0.562235327966039



Задачи медицины и физиологии





Сосуды (Links)

Бег	End	Type	AV
1	2	50	1
2	3	50	1
3	4	50	1
3	99	100	1
4	5	50	1
4	339	100	1
5	6	50	1
5	107	100	1
6	7	50	1
7	8	50	1



Узлы (Nodes)

№	X	Y	Z
1	-1	128	17.8
2	-1.5	131	18.5
3	-1	132	17.12
4	-0.2	133	15.75
5	0.5	132	14.38
6	1.5	129	13
7	1	113	13.9
8	1	111	13.91
9	1	109	13.92
10	1	101	14.5



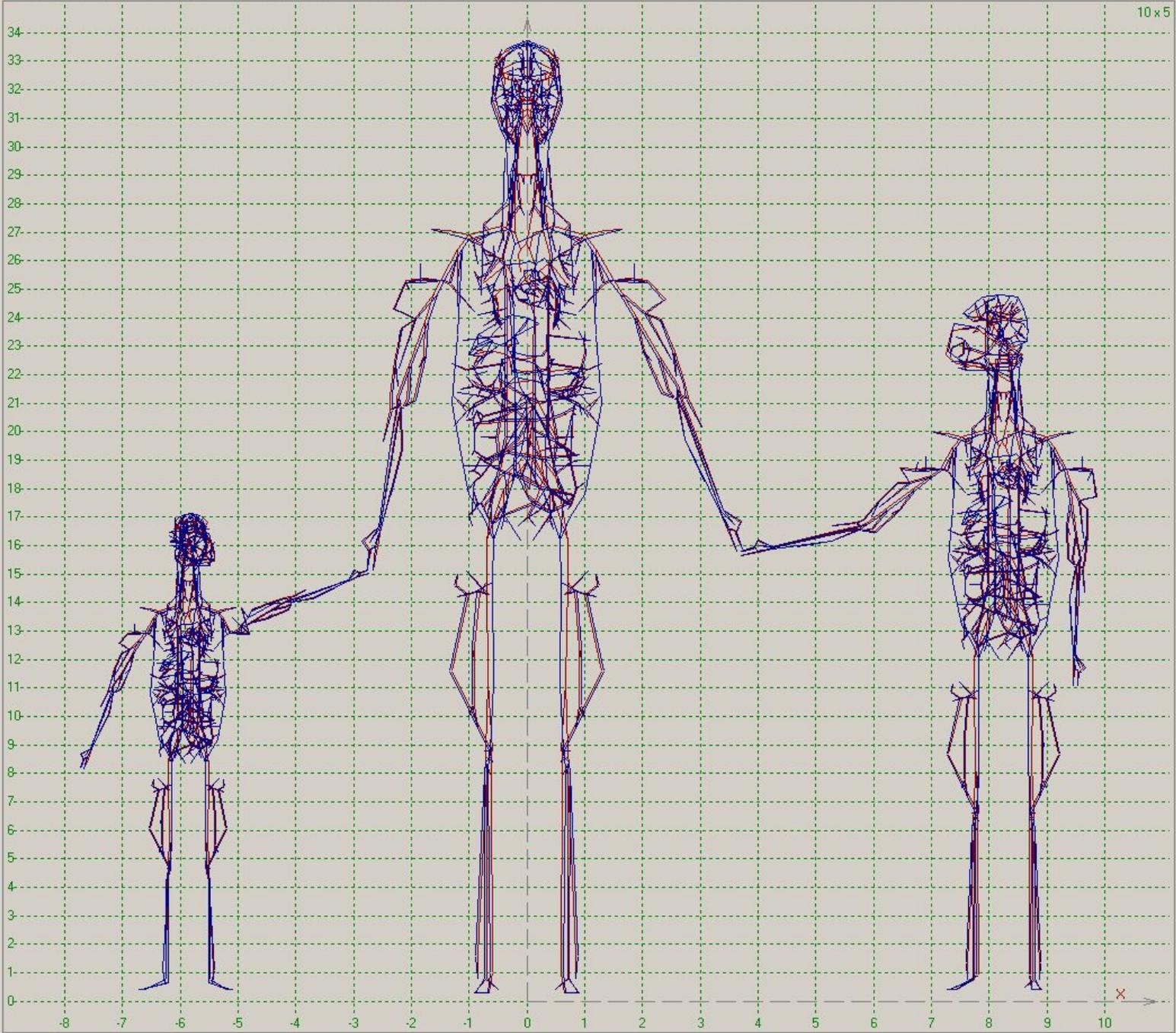
Сохранена 24.01.2012 13:43:09

Модель с корректно расставленными направлениями потоков QDir и радиусами сосудов для визуализации VisRad

Вычисления ЛГД

Вычисления CVSS



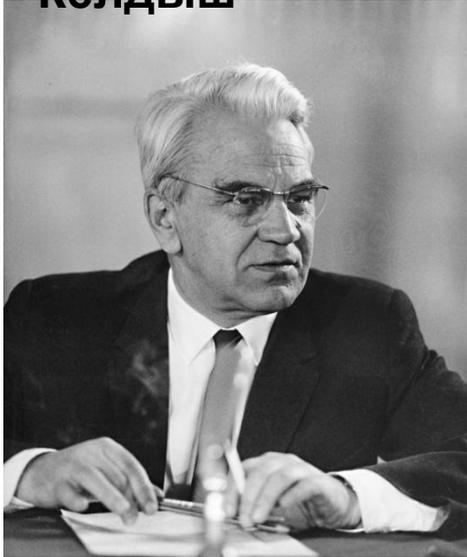


Отцов-основоположников современной
вычислительной математики и
информатики полезно знать и
использовать их опыт и результаты.

Некоторые из них :



Мстислав Всеволодович Келдыш



- Основатель Института Прикладной математики
- Президент Академии Наук (1961-9175)
- Один из трех «К»

Королев, Курчатов, Келдыш



Одна из характерных ранних прикладных работ

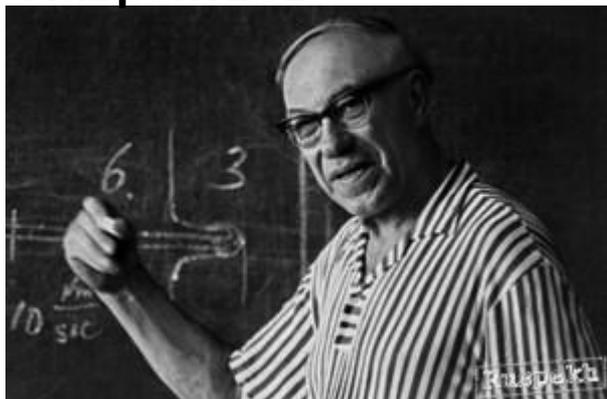
(1942)

Флаттер - автоколебание самолетных конструкций.
Флаттер имеет резонансную природу, т. е. аналогичен эффекту резонанса, наблюдаемому при колебаниях упругой пружины с прикрепленной массой m и коэффициентом упругости k

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right] + m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m \sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho V^2 b \left[\theta + \frac{1}{V} \left(\frac{3}{4} b - x_0 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0;$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left[GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - m \sigma \frac{\partial y^2}{\partial \tau^2} + J_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial m_x}{\partial \alpha} \rho V^2 b^2 \left[\theta + \frac{1}{V} \left(\frac{3}{4} b - x_0 - \frac{\pi}{16} \frac{b}{\partial m_x / \partial \alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0,$$

Михаил Алексеевич Лаврентьев



Первый директор
Института точной
механики и
вычислительной техники



Сергей Алексеевич Лебедев



Директор Института
точной механики и
вычислительной техники
(1952-1973)



БЭСМ-6
(1967 г.)

**Организатор и первый руководитель
факультета вычислительной
математики и кибернетики МГУ.**



- топология и функциональный анализ
- математическая физика
- теория обратных и некорректных задач
- вычислительная математика

**Андрей Николаевич
Тихонов**



- Математическая физика
- Вычислительная математика
- Общая теории разностных схем
- Один из основателей отечественной школы математического моделирования и вычислительного эксперимента

А.А.Самарский

Математическая модель — это „эквивалент“ объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах. После того, как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту установлена, с моделью проводятся разнообразные и подробные „опыты“, дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта.



**Бахвалов
Николай Сергеевич**

Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975

● Успех в прикладной науке требует широкой математической подготовки, поскольку только такая подготовка может обеспечить приспособляемость к непрерывно меняющимся типам задач, предъявляемых к решению. Одной из причин необходимости изучения «бесполезных» для практики на первый взгляд разделов математики является достижение более уверенного и более свободного владения «иужными» разделами математики.

● В то же время надо воспринимать как должное, что большая часть результатов вычислений будет выброшена сразу же после их получения. Дело в том, что производимая работа зачастую носит исследовательский характер, и трудно заранее предсказать, что и в какой форме следует получить, на каком пути нужно искать численное решение задачи. I

● При реальной работе в области приложений математики возникает большое число осложнений самого различного, зачастую нематематического характера.

**Это надо
ПОМНИТЬ**

