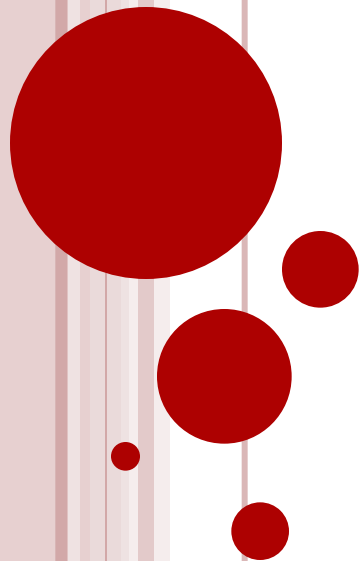


# **ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

- **Основные динамические характеристики: масса, импульс, сила**
- **Законы Ньютона**
- **Виды сил в механике**



# ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

**1 закон Ньютона:** существуют такие системы отсчета, в которых тело движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или действия других тел скомпенсированы.

- 📌 Системы отсчета, подчиняющиеся 1-му закону, называются **инерциальными** (ИСО) .
- 📌 В ИСО ускорение тела определяется только влиянием на него других тел (полей).
- 📌 Все ИСО эквивалентны друг другу.
- 📌 Если некая СО движется прямолинейно и равномерно относительно ИСО, то она тоже является инерциальной.

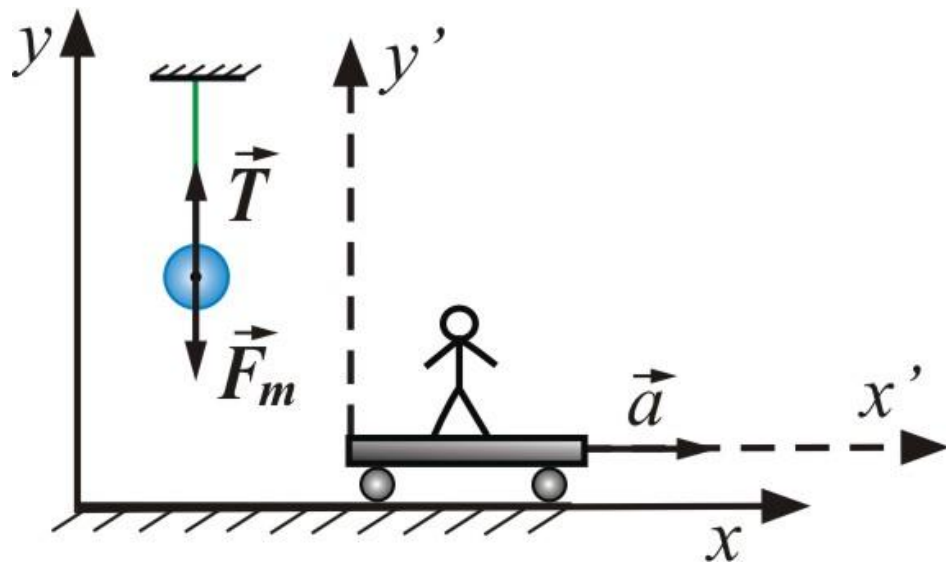
# РАССМОТРИМ НА ПРИМЕРЕ КАК ОТЛИЧАТЬ ИСО ОТ НСО.

$xy$  – СО, связанная с Землей;

$x'y'$  – СО, связанная с тележкой, движущейся с ускорением.

$xy$  – ИСО, так как в этой системе тело покоится, а силы, действующие на него компенсируют друг друга:

$$\vec{T} + \vec{F}_m = 0$$




$x'y'$  – НСО, так как в этой системе тело движется с ускорением  $\vec{a}'$ , направленным противоположно движению тележки, несмотря на то что, силы, действующие на него компенсируют друг друга.

# ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:


 **Масса**  $m$  [кг] – количественная мера инертности.

**Инертность** - свойство тела оставаться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно в отсутствие или при взаимной компенсации внешних воздействий (в ИСО).

**Аддитивность массы** - масса системы равна сумме масс составляющих её тел.

 **Импульс** – количественная мера механического движения.

Импульс материальной точки:  $\vec{p} = m\vec{v}$  [кг · м / с]

 **Сила**  $\vec{F}$  [Н] – количественная мера воздействия на данное тело других тел (или полей).

Действие силы на массивное тело приводит к изменению его скорости и (или) возникновения в нём деформаций

# ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

**2 закон Ньютона:** В ИСО скорость изменения импульса материальной точки со временем равна векторной сумме всех сил, действующих на нее:

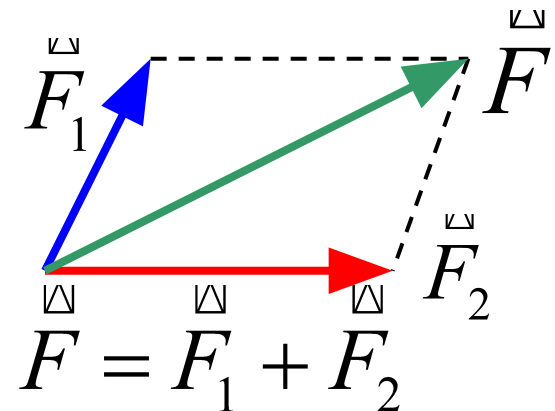
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2)$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \text{ - равнодействующая всех сил}$$



$$(2) \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{F}$$



# ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

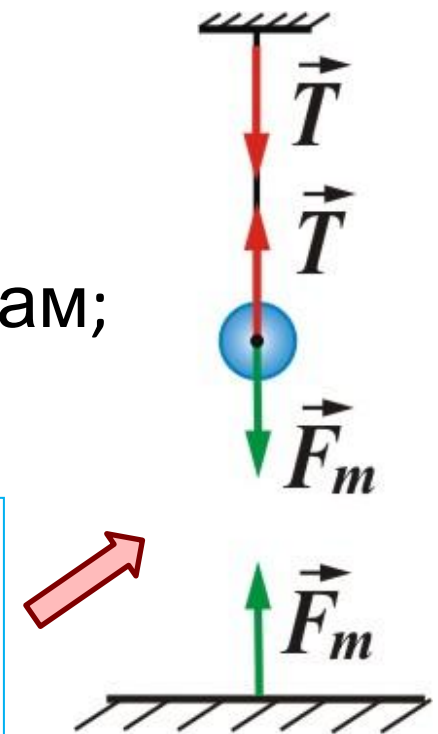
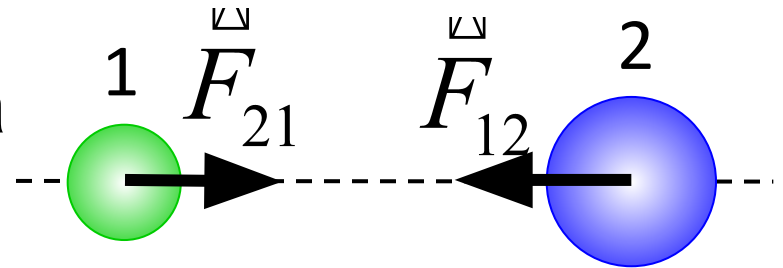
**3 закон Ньютона:** В ИСО два тела действуют друг на друга с силами равными по модулю и противоположными по направлению вдоль линии, соединяющей центры тел:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3)$$


**Важно:**

- $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  приложены к разным телам;
- $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  имеют одинаковую

**Пример:** Шар и Земля, а также шар и нить действуют друг на друга с одинаковыми силами, направленными



# ВИДЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ПРИРОДЕ

 **Гравитационное** – проявляется как притяжение между телами, обладающими массой.

**Электромагнитное** - существует между электрическими зарядами и заряженными телами.

**Гравитационное** } дальнедействующие  
**Электромагнитное** } взаимодействия,

т.е. могут действовать на больших расстояниях.

Именно эти взаимодействия играют

 определяющую роль в механике.

 **Сильное** ( $R_d < 10^{-15}$  м) } короткодействующие силы,  
т.е. проявляются

в мире элементарных частиц и в атомных

ядрах (радиус действия сил)

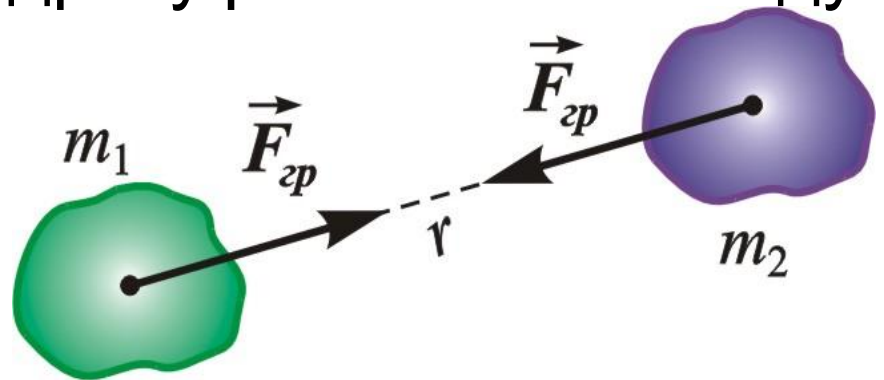
слабое ( $R_d < 10^{-16}$  м)

## Виды взаимодействий в природе

📌 **Гравитационное** – проявляется как притяжение между телами, обладающими массой.

**Закон Всемирного тяготения:** два тела притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной массам тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$F_{gp} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (4)$$



$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$  – гравитационная постоянная



## СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

Сила тяжести - действует со стороны Земли

на тело массой  $m$ .

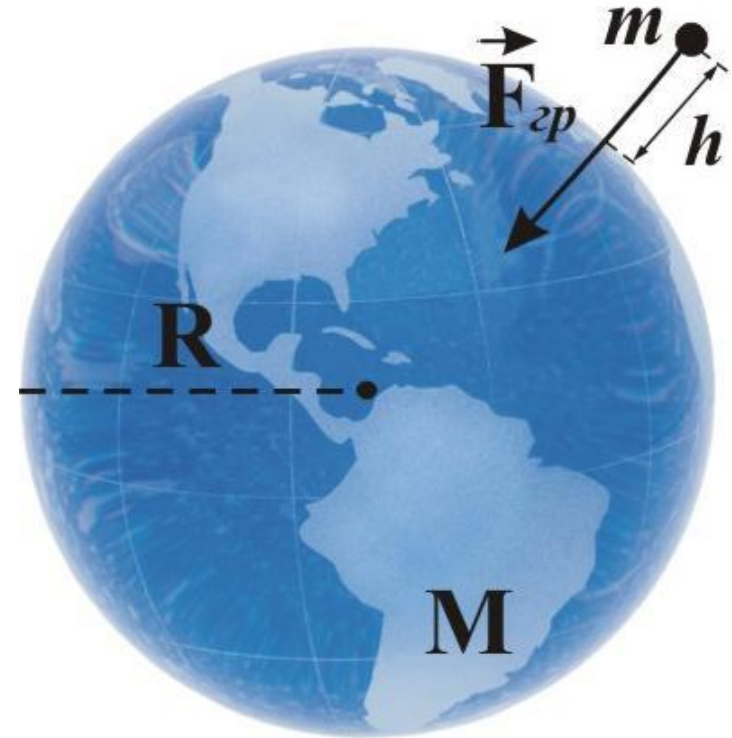
$$(4) \Rightarrow F_m = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

Сравнивая с (2):

$$\vec{F}_m = m\vec{g} \quad (5)$$

$g = G \frac{M}{(R+h)^2}$  - ускорение свободного падения на высоте  $h$ .

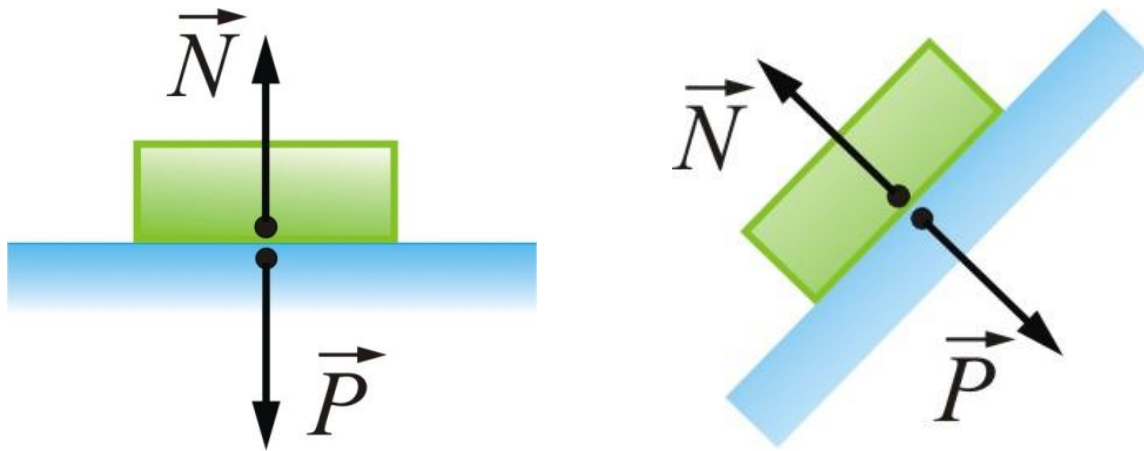
Вблизи поверхности Земли:  $g = G \frac{M}{R^2} = 9,8 \text{ м/с}^2$



## СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

📌 **Вес  $\vec{P}$**  - сила, с которой тело действует на опору или подвес.


📌 **Сила реакции опоры  $\vec{N}$**  (натяжения нити  $\vec{T}$ ) - действует со стороны опоры (подвеса) на тело.

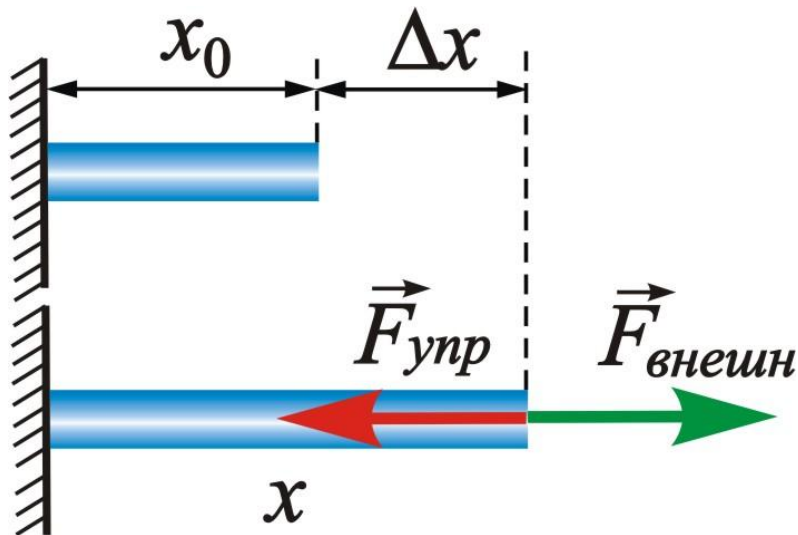


Согласно 3-му закону Ньютона:

$$\vec{P} = -\vec{N} \quad (6)$$

# СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

 **Сила упругости** – сила, возникающая в деформированном теле и стремящаяся вернуть ему первоначальную форму и размеры.



**Виды деформации:**

- упругая
- пластическая

Для упругой деформации типа растяжение-сжатие

выполняется **закон**

$$F_{упр} = k |\Delta x| \quad \text{закон Гука: (7)}$$

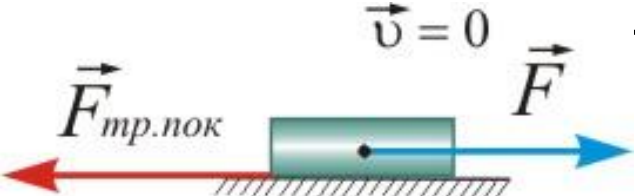
$\Delta x = x - x_0$  - абсолютная деформация

# СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

 **Сухое трение** – действует между твёрдыми телами.

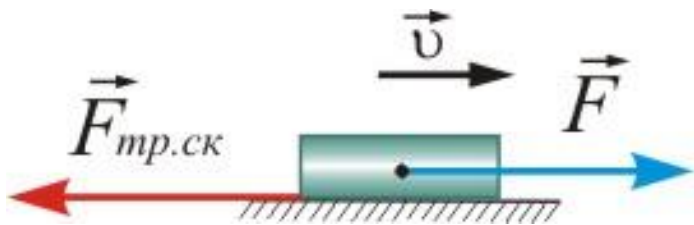
а) **сила трения покоя** действует на покоящееся тело

при  $\vec{v} = 0$  и  $0 < F_{\text{тр.пок}} \leq F_{\text{max}} = \mu N$



The diagram shows a green rectangular block on a hatched surface. A blue arrow labeled  $\vec{F}$  points to the right, and a red arrow labeled  $\vec{F}_{\text{тр.пок}}$  points to the left. Above the block, the text  $\vec{v} = 0$  is written.

б) **сила трения скольжения** действует между телом и опорой при их относительном движении



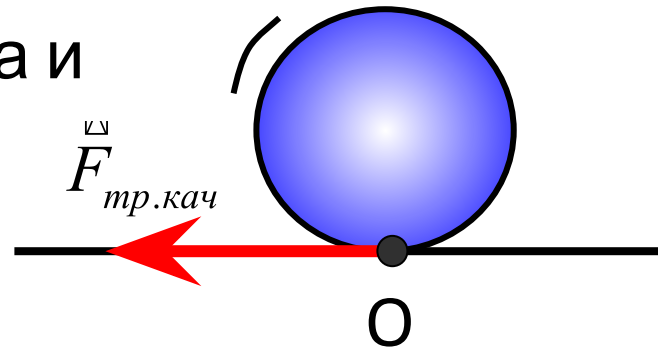
$$F_{\text{тр.ск}} = \mu N \quad (8)$$


$\mu$  – коэффициент трения  
(безразмерная величина)

# СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

в) **Сила трения качения** - действует на катящееся тело. Причина - деформация катка и опорной поверхности.

- Обычно  $F_{\text{тр.кач.}} \ll F_{\text{тр.ск.}}$  при прочих равных условиях.

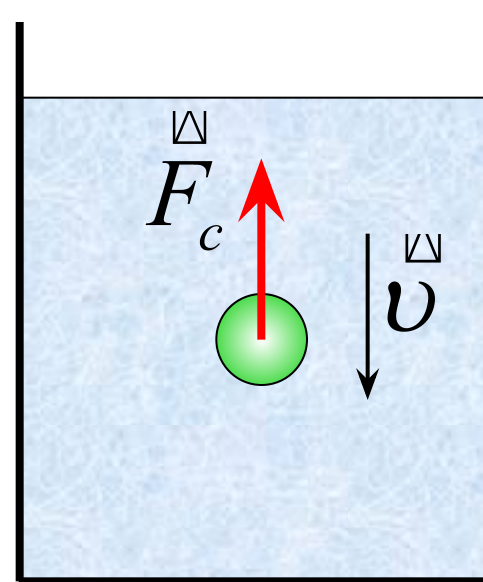


 **Сила вязкого трения** – действует на тело, движущееся в жидкости или газе.


При не очень больших скоростях:

$$\vec{F}_c = -\sigma \vec{v} \quad (9)$$

$\sigma$  - коэффициент, зависящий от формы и размеров тела и вязкостных свойств среды



# СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

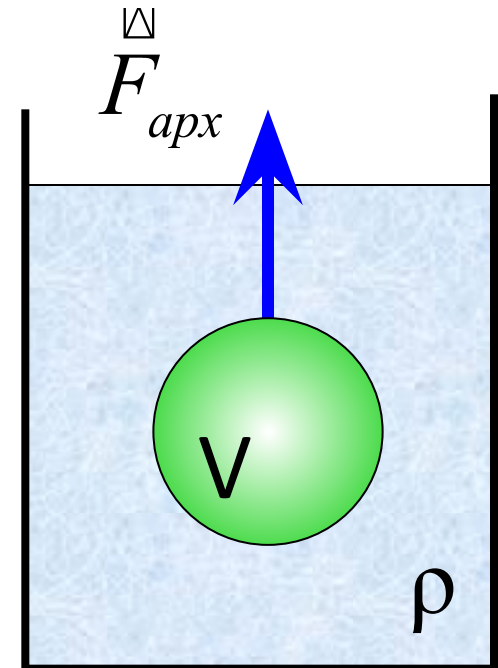
 **Сила Архимеда** – выталкивающая сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ:

$$F_{арх} = \rho g V \quad (10)$$

$\rho$  – плотность жидкости;

$V$  – объем тела, погруженный в жидкость;

$g$  – ускорение свободного падения



Если тело погружено в жидкость частично, то сила Архимеда действует только на погруженную часть

# ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Виды движения твёрдого  
тела

Поступательн

ое

Вращательн

ое

При поступательном движении все точки тела двигаются одинаково.

Тело можно рассматривать как материальную точку.

Для описания его движения применяем второй закон Ньютона для центра масс (С) тела:

$$\frac{dp_C}{dt} = \sum_i F_i \quad ma_C = \sum_i F_i$$

# **ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

- **Основные динамические характеристики вращательного движения: момент силы, момент инерции и момент импульса относительно оси вращения.**
- **Основное уравнение динамики вращательного движения.**
- **Теорема Штейнера.**



# ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

При вращательном

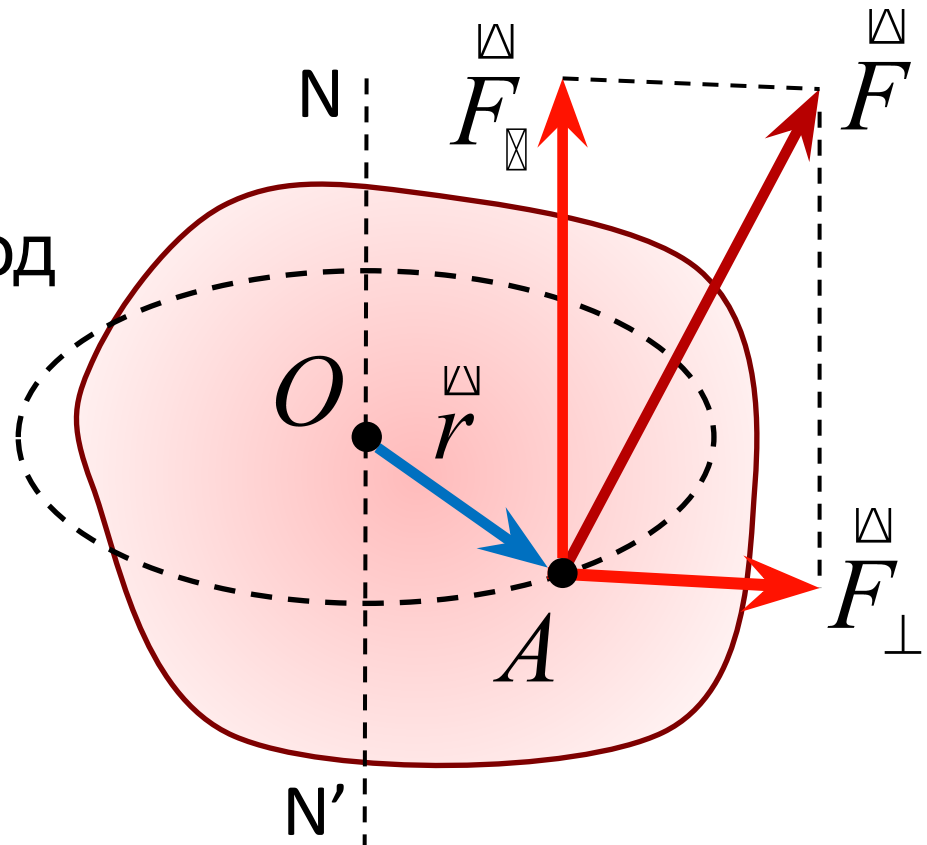
- 📌 **Движение:** и ускорения точек тела зависят от их расстояния до оси вращения.
- 📌 Характер вращения определяют не только величина и направление действующей на тело силы, но и точка ее приложения.
- 📌 Инертные свойства тела зависят не только от массы тела, но и от его формы и размеров.



1. 2 закон Ньютона для материальной точки не может описывать вращательное движение тела.
2. В уравнения динамики вращения должны входить особые динамические характеристики.

# МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть тело массы  $m$  вращается вокруг неподвижной оси  $NN'$  под действием силы  $\vec{F}$ .  
Д.А. – точка приложения силы;  
 $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения.



$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}$$

$\vec{F}_{\perp}$  – перпендикулярна оси вращения;

$\vec{F}_{\parallel}$  – параллельна оси вращения.

Только перпендикулярная составляющая силы приводит тело во вращение вокруг оси  $NN'$ .

# МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

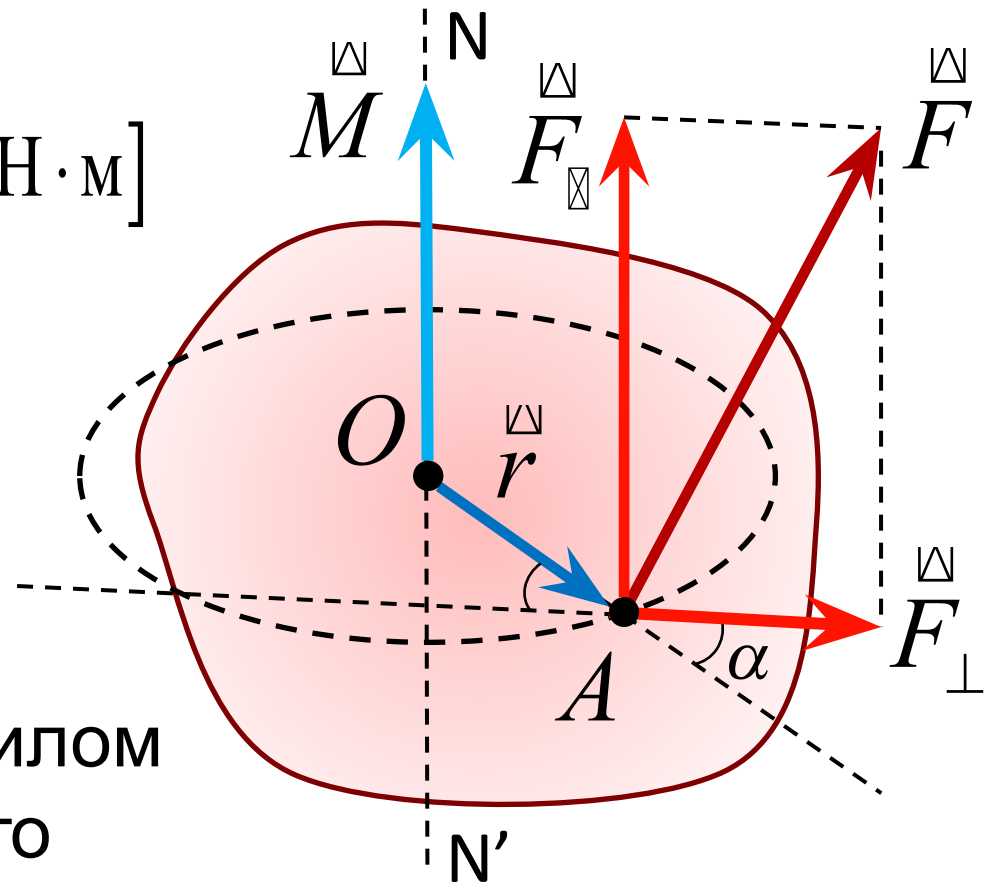
Моментом силы относительно оси вращения называют векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы и перпендикулярной составляющей силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_\perp] \quad (1) \quad [\text{Н} \cdot \text{м}]$$

$\vec{M}$   $\parallel$  оси вращения

$\vec{M} \perp \vec{r}, \vec{M} \perp \vec{F}_\perp$

Направление  $\vec{M}$  определяется правилом правой руки (правого винта)



# МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Величина момента

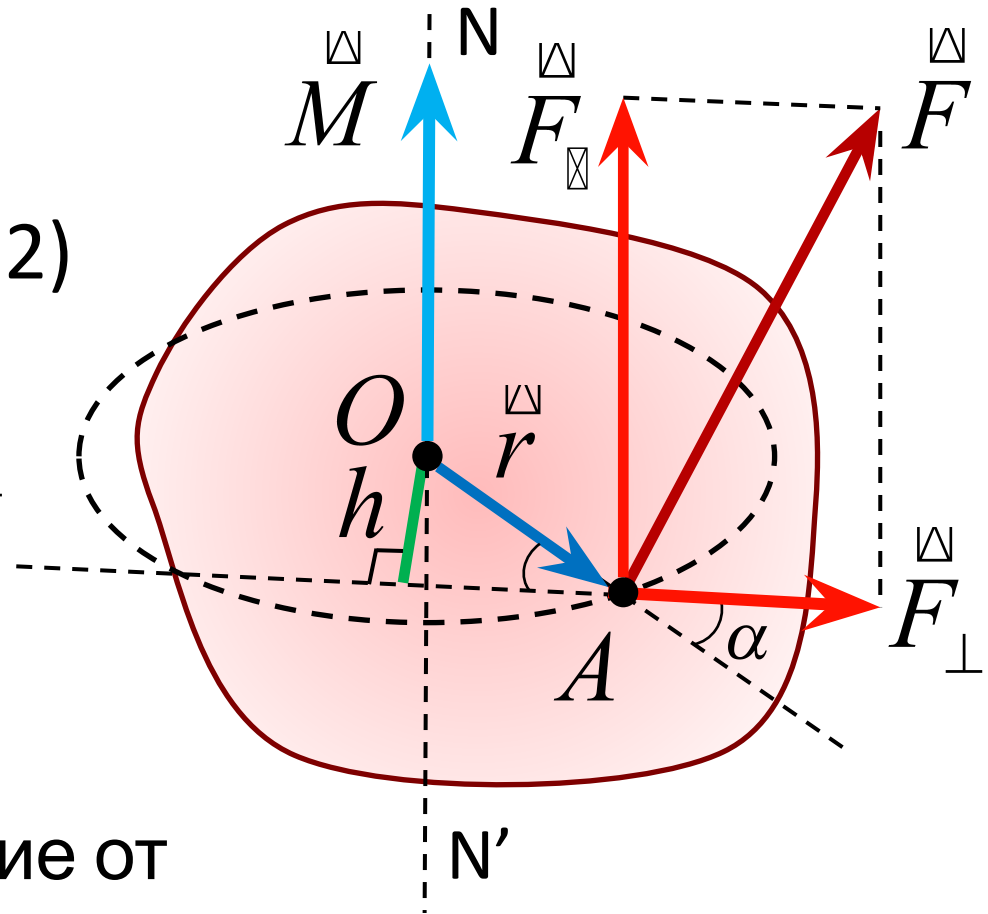
силы:

$$M = r F_{\perp} \sin \alpha \quad (2)$$

$\alpha$  - угол между  $r$  и  $F_{\perp}$

$$h = r \sin \alpha$$

$h$  - **плечо силы** –  
кратчайшее расстояние от  
оси вращения до линии,  
вдоль которой действует  
сила .



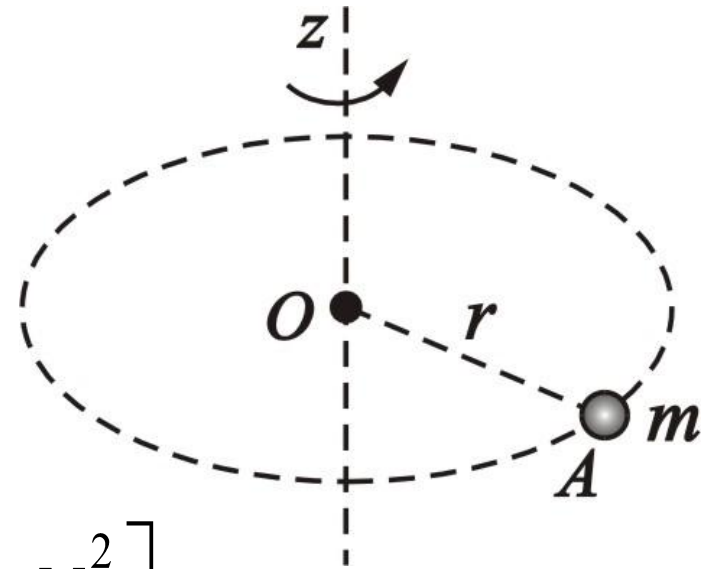
$$M = h F_{\perp} \quad (3)$$

# МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим материальную точку (м.т.)  $A$  массой  $m$ , вращающуюся вокруг неподвижной оси  $z$  на расстоянии  $r$  от нее.

Момент инерции м.т.:

$$I_{m.t.} = mr^2 \quad (4) \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

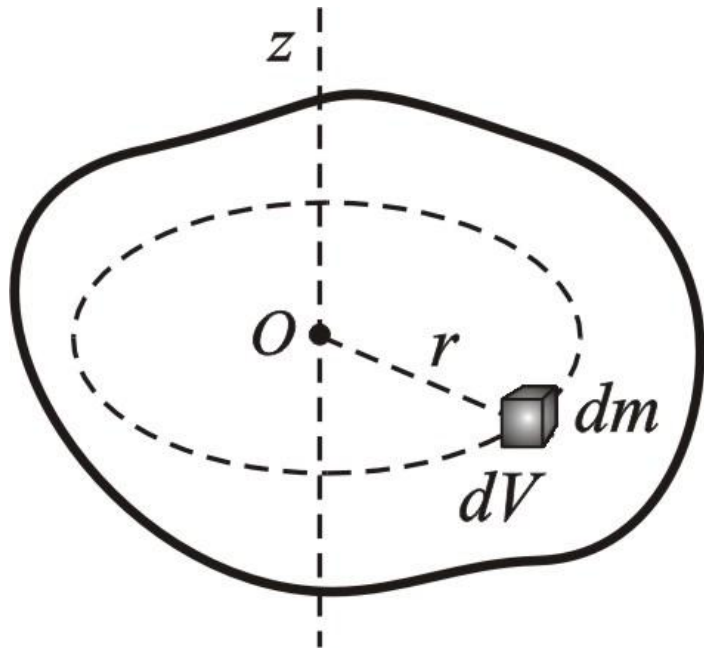


Момент инерции – аддитивная величина 

Момент инерции системы материальных точек:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

## МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ



Для вычисления момента инерции твёрдого тела его можно разбить на бесконечно малые элементы, каждый из которых можно считать материальной точкой.

$$dI = dm \cdot r^2 = \rho r^2 \cdot dV \quad \text{- момент инерции элемента массой } dm$$





$$I = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV \quad (4)$$



## МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Момент инерции твёрдого тела характеризует его инертные свойства при вращательном движении.

Момент инерции тела зависит от:

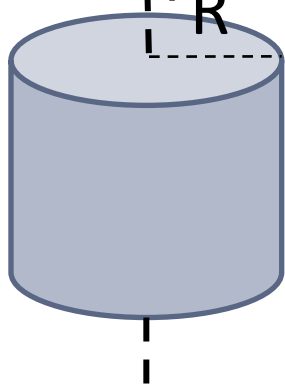
-  массы тела;
-  его формы и размеров;
-  распределения плотности по объёму;
-  расположения оси вращения.

$$I = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV \quad (4)$$

# МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Сплошной

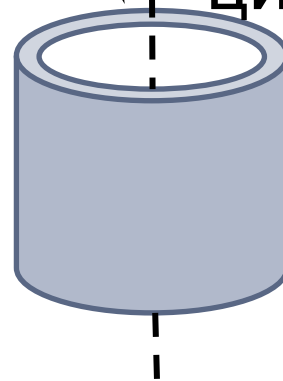
цилиндр



$$I_{ц} = \frac{1}{2} mR^2 \quad (5)$$

Полый

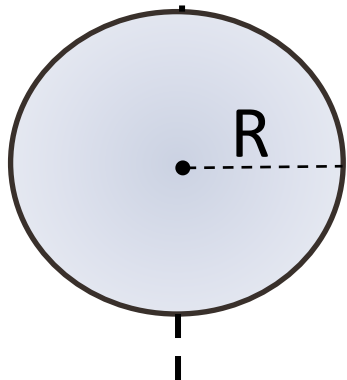
цилиндр



$$I = mR^2 \quad (6)$$

Сплошной

шар



$$I_{ш} = \frac{2}{5} mR^2 \quad (7)$$

Стержень

длиной  $l$

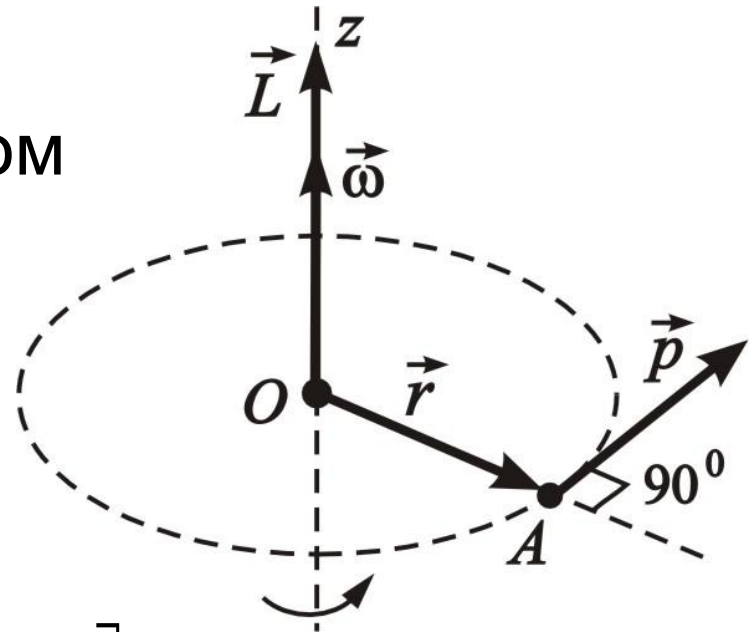


$$I_{cm} = \frac{1}{12} ml^2 \quad (8)$$



# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим материальную точку  $A$  массой  $m$  и импульсом  $\vec{p}$ , вращающуюся вокруг неподвижной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ .



Момент импульса м.т.:

$$\vec{L}_{m.t.} = [\vec{r}, \vec{p}] \quad (9) \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}]$$


$$\vec{p} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad L_{m.t.} = rp \sin 90^\circ = rmv = mr^2 \omega$$

$$\vec{L} \uparrow \uparrow \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{m.t.} = mr^2 \vec{\omega}$$

## МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Момент импульса тела произвольной формы можно найти представив его как совокупность материальных точек:

$$L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i r_i^2$$

Момент инерции тела  $I = \sum_i m_i r_i^2$    $L = I \omega$  (10)

:

При вращении тела момент его импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость вращения.

# ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

## ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть материальная точка А массой  $m$  вращается вокруг неподвижной оси по окружности радиуса  $r$  под действием силы  $F$ , лежащей в плоскости

вращения  $F_{\perp}$

Проекция  $F_{\perp}$  на направление  $\tau$ :

$$F_{\tau} = F_{\perp} \sin \alpha \quad (11)$$

$$M = F_{\perp} r \sin \alpha$$

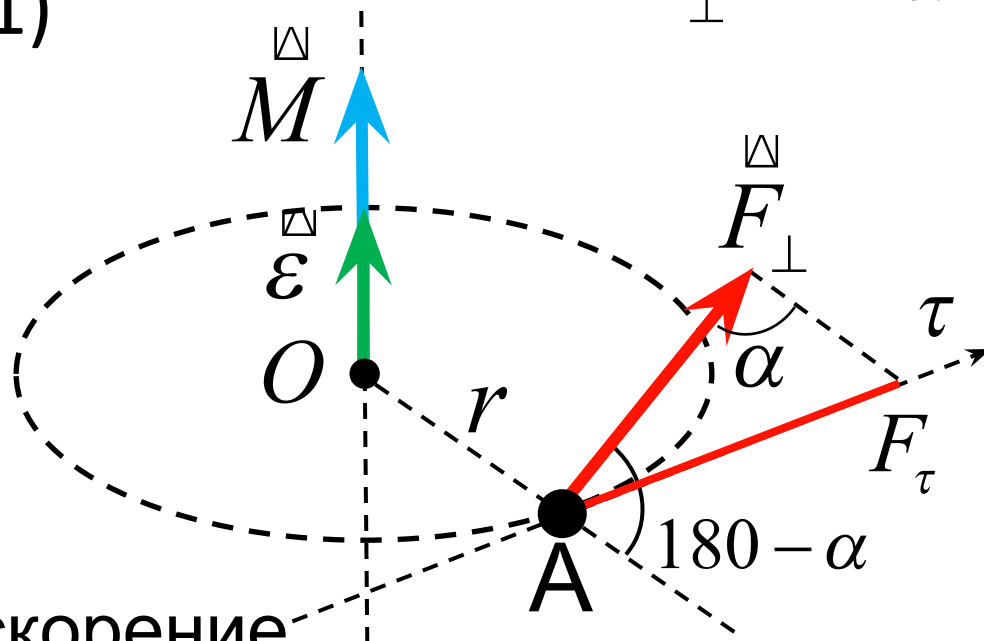
По 2 закону Ньютона:

$$F_{\tau} = m a_{\tau}$$

$$F_{\tau} = m \varepsilon r \quad (12)$$

$\varepsilon$  – угловое ускорение;

$a_{\tau}$  – тангенциальное ускорение.

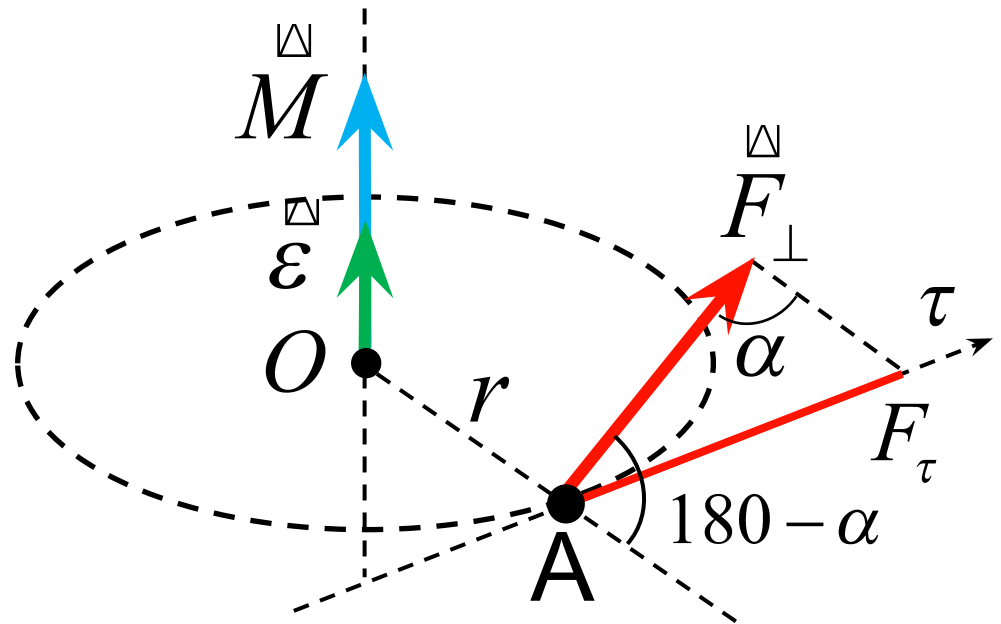


# ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

$$(11) \text{ и } (12) \Rightarrow F_{\perp} r \sin \alpha = \varepsilon m r^2 \Rightarrow M = m r^2 \varepsilon$$


Для тела произвольной формы:

$$I \varepsilon = \sum_i M_i \quad (13)$$



Произведение момента инерции твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение равно векторной сумме моментов внешних сил, действующих на тело относительно той же оси.

## УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} \\ L &= I\omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow I\varepsilon = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{I} \right) = \frac{dL}{dt}$$


Производная по времени момента импульса твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения равна векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i M_i \quad (14)$$