

МИРЭА – Российский технологический университет
Институт Радиотехнических и телекоммуникационных систем
кафедра радиоволновых процессов и технологий

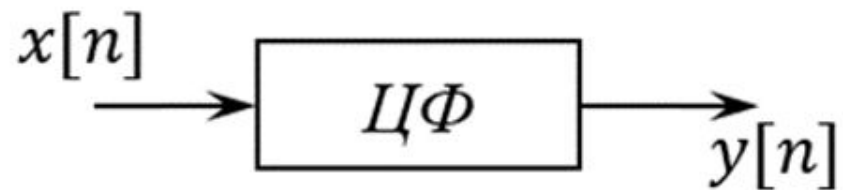
Презентация к лекции

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

ст. пр. каф. РПТ Исаков В.Н.

Москва 2020

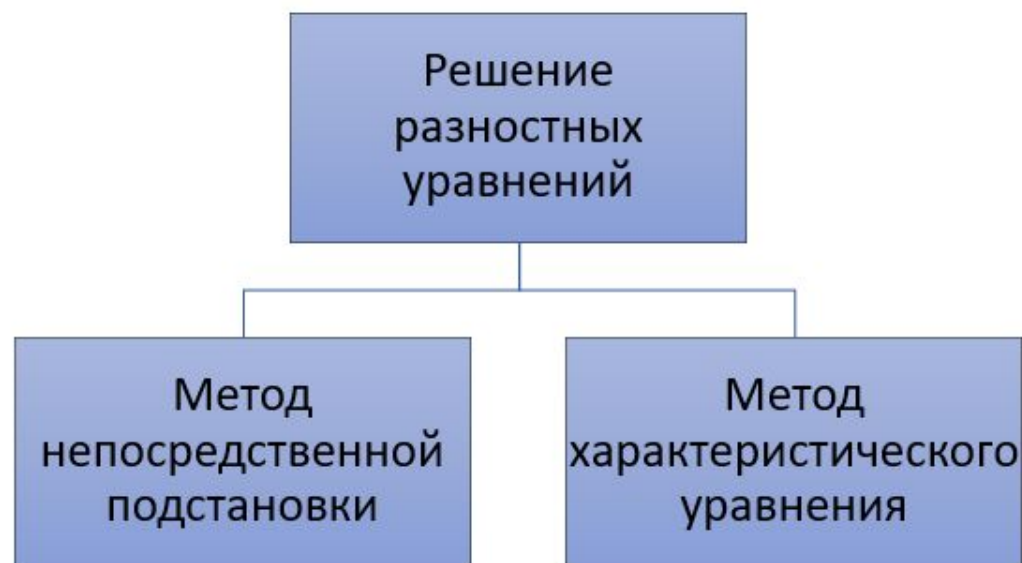
1. Понятие цифрового фильтра (ЦФ)



$$y[n] = \sum_{k=0}^N a_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad (1)$$

$$x[-1] = x_{-1}; x[-2] = x_{-2}; \dots; x[-N] = x_{-N} \quad (2)$$

$$y[-1] = 0; y[-2] = 0; \dots; y[-N] = 0 \quad (3)$$



Метод характеристического уравнения

Составляется однородное разностное уравнение

$$y[n] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] = 0 \quad (4)$$

Составляется характеристическое уравнение

$$z^N - \sum_{k=1}^N b_k z^{N-k} = 0 \quad (5)$$

Находятся корни характеристического уравнения

$$z_1^{(k_1)}, z_2^{(k_2)}, \dots, z_M^{(k_M)}, M \leq N \quad (6)$$
$$k_1 + k_2 + \dots + k_M = N$$

Записывается общее решение однородного разностного уравнения

$$y_{oo}[n] = \sum_{i=1}^M \sum_{m=0}^{k_i-1} C_{im} n^m \left(z_i^{(k_i)} \right)^n \quad (7)$$

Подбирается любое частное решение неоднородного разностного уравнения

$$y_{чн}[n] \quad (8)$$

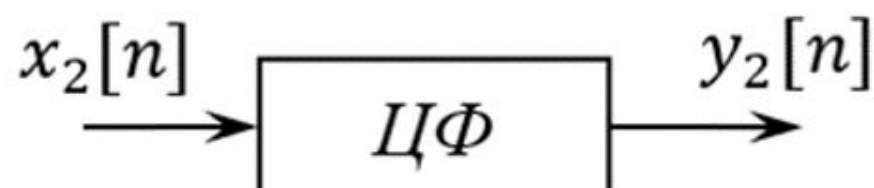
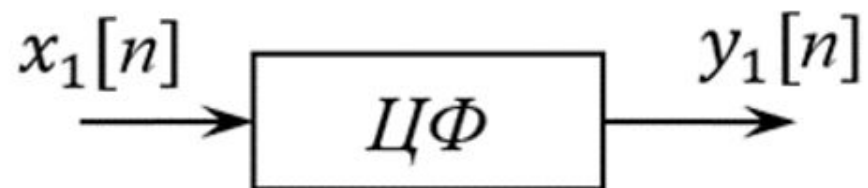
Записывается общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y_{он}[n] = y_{oo}[n] + y_{чн}[n] \quad (9)$$

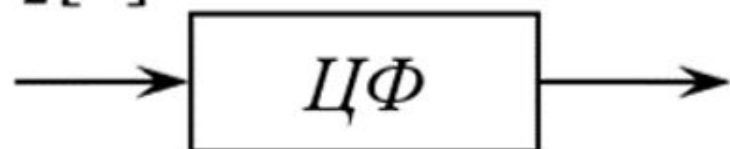
Находятся произвольные постоянные, соответствующие заданным начальным условиям

$$C_{im} \quad (10)$$

2. Принцип суперпозиции



$$x[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]$$



$$y[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]$$

2. Принцип суперпозиции

$$y_1[n] = \sum_{k=0}^N a_k x_1[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y_1[n-k] \quad y_2[n] = \sum_{k=0}^N a_k x_2[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y_2[n-k] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^N a_k (k_1 x_1[n-k] + k_2 x_2[n-k]) + \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] = \\ &= k_1 \sum_{k=0}^N a_k x_1[n-k] + k_2 \sum_{k=0}^N a_k x_2[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad (12) \\ (11) \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k x_{1,2}[n-k] \end{aligned}$$

$$y[n] = k_1 \left(y_1[n] - \sum_{k=1}^N b_k y_1[n-k] \right) + k_2 \left(y_2[n] - \sum_{k=1}^N b_k y_2[n-k] \right) + \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad (13)$$

$$y[n] - (k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]) = \sum_{k=1}^N b_k (y[n-k] - (k_1 y_1[n-k] + k_2 y_2[n-k])) \quad (14)$$

$$y[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n] \quad (15)$$

3. Оператор и временные характеристики ЦФ

$$y[n] = T \{x[n]\} \quad (16)$$

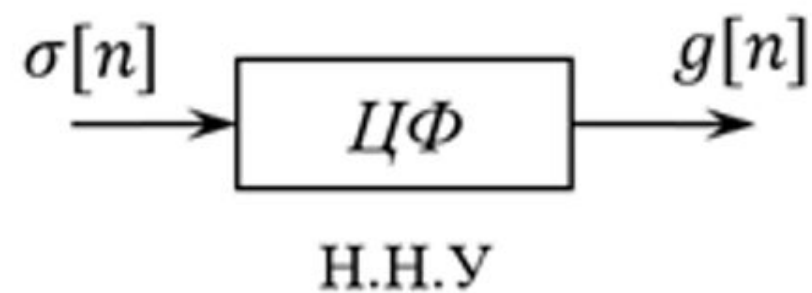
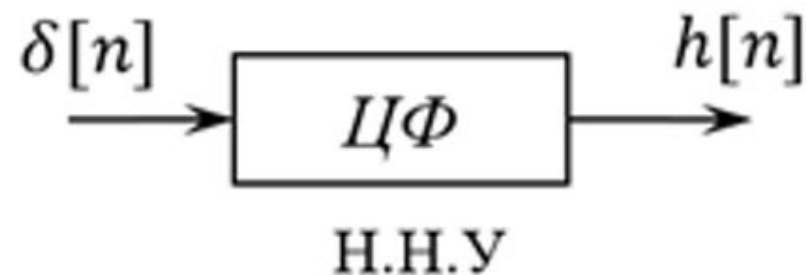
$$T \{k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]\} = k_1 T \{x_1[n]\} + k_2 T \{x_2[n]\} \quad (17)$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (18)$$

$$y[n] = T \{x[n]\} = T \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] T \{ \delta[n-k] \} \quad (19)$$

$$h[n] = T \{ \delta[n] \} \quad (20)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[n-k] h[k] = x * h[n] \quad (21)$$



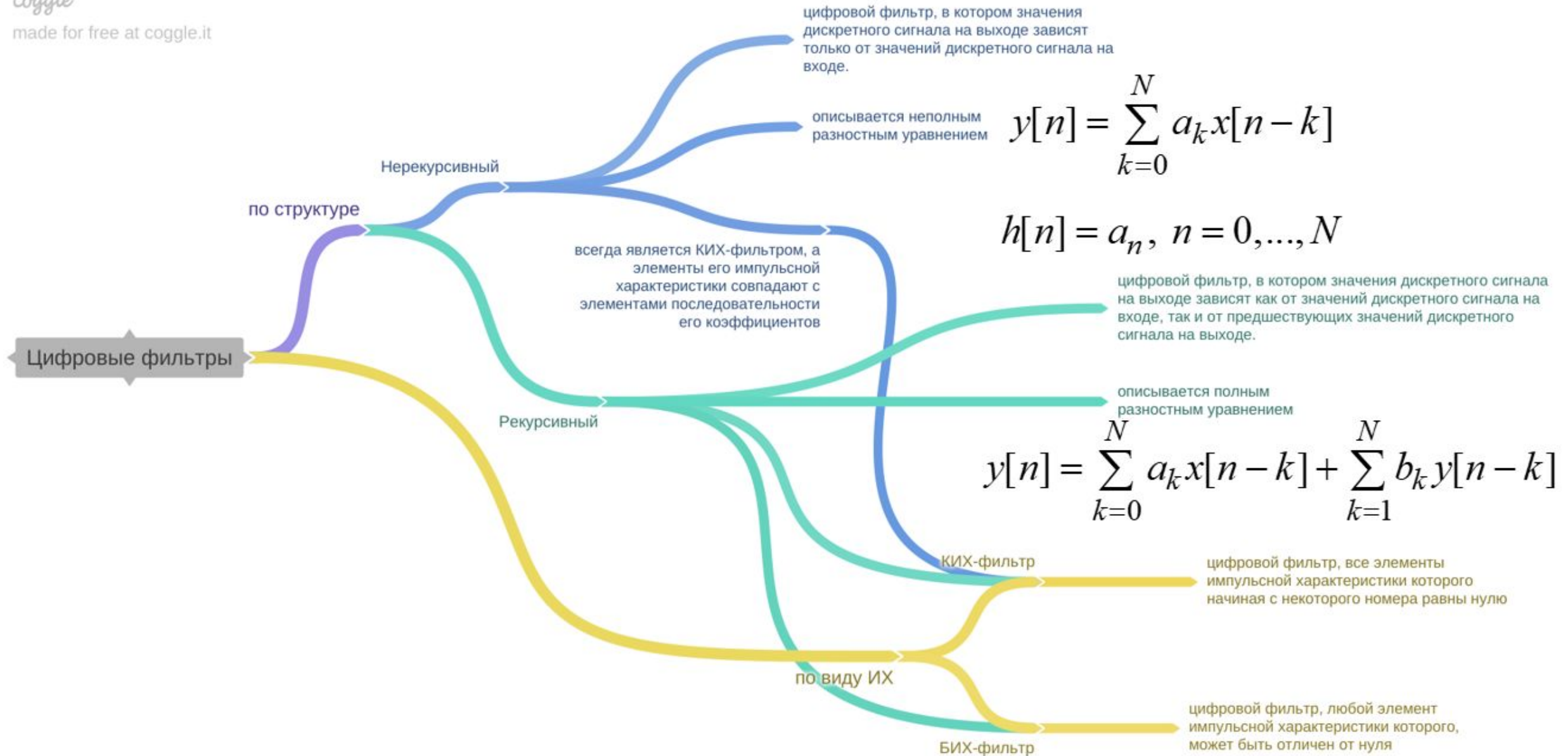
$$g[n] = T \{ \sigma[n] \} = T \left\{ \sum_{k=0}^n \delta[k] \right\} = \sum_{k=0}^n h[k] \quad (22)$$

$$h[n] \Big|_{n < 0} = 0 \quad g[n] \Big|_{n < 0} = 0 \quad (23)$$

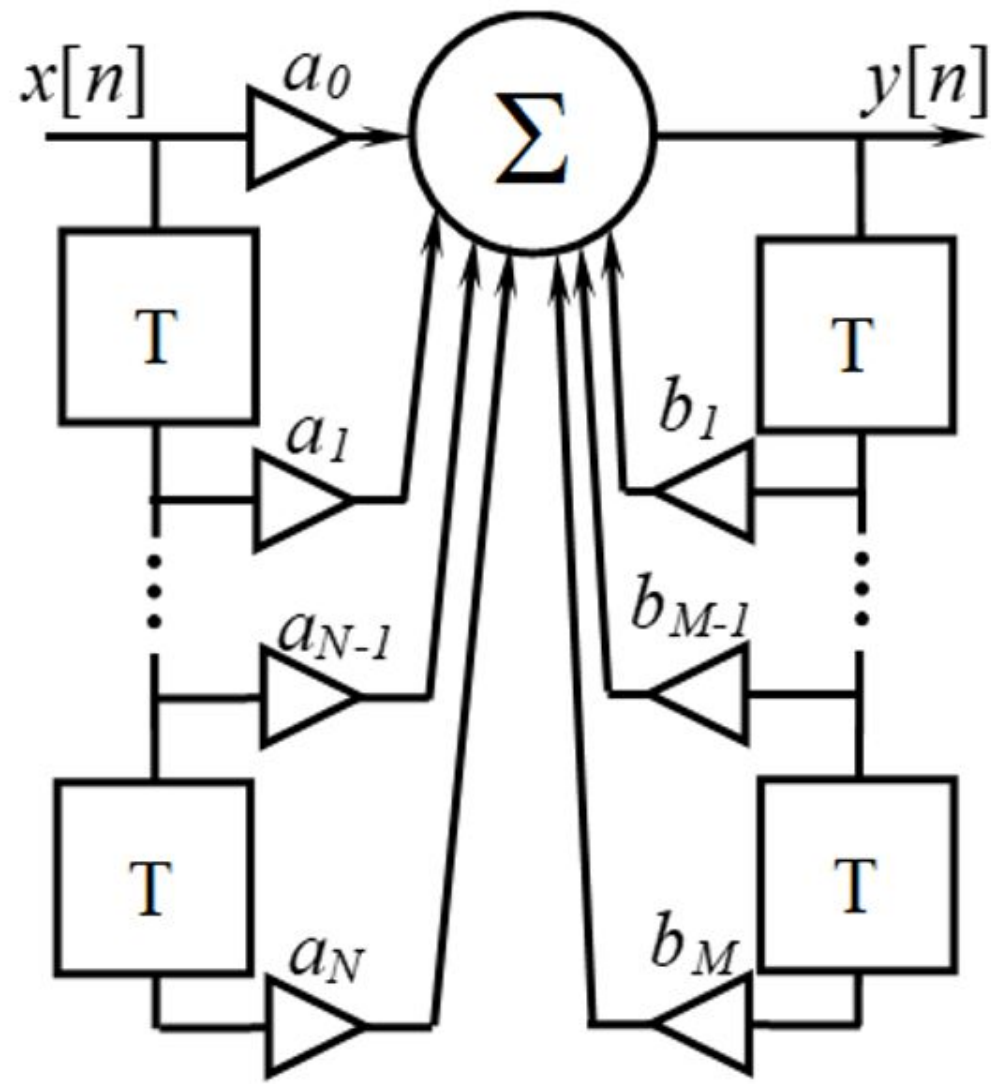
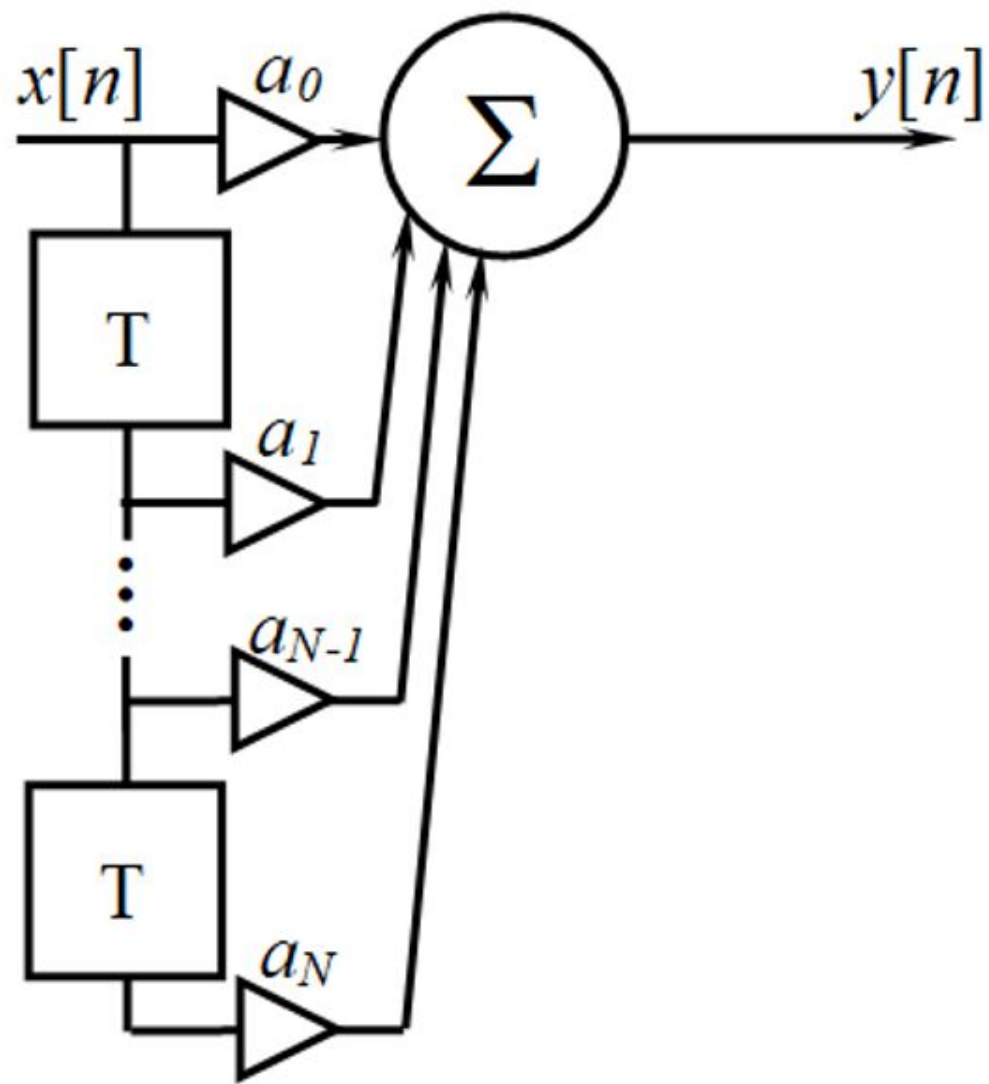
4. Классификация цифровых фильтров

coggle

made for free at coggle.it



Схемы цифровых фильтров



5. Принцип транспозиции

$$x[n] = \sigma[n]X \cos(\omega nT + \varphi_X) = \sigma[n] \operatorname{Re} \dot{X} e^{j\omega nT} \quad (24)$$

$$\dot{X} = X e^{j\varphi_X} \quad (25)$$

$$n \rightarrow \infty \quad (26)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]\sigma[n-k] \operatorname{Re} \dot{X} e^{j\omega(n-k)T} = \operatorname{Re} \dot{X} \sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega kT} e^{j\omega nT} \quad (27)$$

$$\sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega kT} \Big|_{n \rightarrow \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] e^{-j\omega kT} = H_{\text{д}}(\omega) \quad (28)$$

$$y[n] = \operatorname{Re} \dot{X} H_{\text{д}}(\omega) e^{j\omega nT} = Y \cos(\omega nT + \varphi_Y) \quad (29)$$

$$\dot{Y} = Y e^{j\varphi_Y} \quad (30)$$

$$\dot{Y} = H_{\text{д}}(\omega) \dot{X} \quad (31)$$

6. Частотные характеристики цифровых фильтров

$$H_{\text{д}}(\omega) = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} \quad (32)$$

$$H_{\text{д}}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega kT} \quad (33)$$

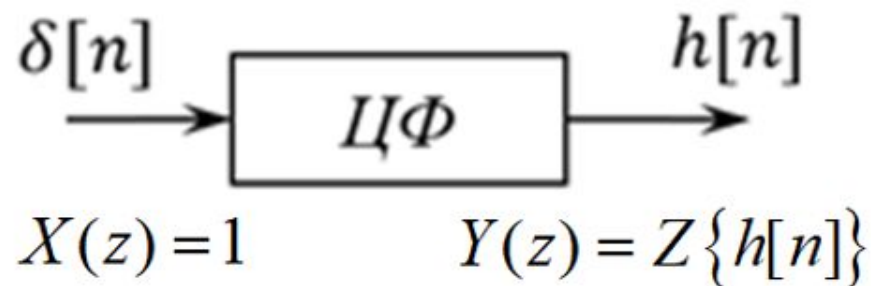
$$|H_{\text{д}}(\omega)| = \frac{Y}{X} \quad (34)$$

$$\varphi_{H_{\text{д}}}(\omega) = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega) = \arg H_{\text{д}}(\omega) \quad (35)$$

7. Системная функция цифрового фильтра

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N a_k X(z) z^{-k} + \sum_{k=1}^N b_k Y(z) z^{-k} \quad (36)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (37)$$



$$H(z) = Z\{h[n]\} \quad (38)$$

$$H_{\text{д}}(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k e^{-jk\omega T}} \quad (39)$$

8. Характеристики цифрового фильтра и их взаимосвязь

coggle

made for free at coggle.it

