Отображение наилучших откликов

$\sqsupset\ G = \{I\ ;\ S\ ;\ U\}.$

$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S;$

$(s_1, s_2, \dots, s_n) \to b_1(s_{-1}) \times b_2(s_{-2}) \times \dots \times b_n(s_{-n})$

$B\colon S \to S$

Характеризация равновесия по Нэшу

$\sqsupset$ $G = \{I\,;\,S\,;\,U\}$, $s^* \in S$;

B: $S \to S$ – отображение наилучших откликов.

s^* – равновесие по Нэшу $\Leftrightarrow$ s^* – неподвижная точка отображения наилучших откликов,

т.е. $s^* \in B\,(s^*)$.

Квазивогнутые функции (quasiconcave)

$\sqsupset F\colon \mathbb{R}^{m} \to \mathbb{R}^{1}$.

F – квазивогнутая функция, если для $\forall\ a \in \mathbb{R}^1$ $\{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \geq a\}$ – выпуклое.

Теорема
(достаточные условия существования равновесия по Нэшу)

$\sqsupset G = \{I\,;\,S\,;\,U\}$; для $\forall\ i \in I \quad \exists\, m_i$: $S_i \subset \mathbb{R}^{\mathrm{mi}}$.

Если для $\forall\ i \in I$

(1) S_i непусто, выпукло и компактно;

(2) u_i непрерывна;

(3) $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ квазивогнута по s_i;

то $\mathrm{NE}(G) \neq \varnothing$.

Неединственность/неоптимальность равновесия по Нэшу

	L_2	D_2
L_1	1, 1	0, 0
D_1	0, 0	0, 0

Фокальное равновесие по Нэшу

	L	C	R
U	3 1	0 0	0 0
M	0 0	2 2	0 0
D	0 0	0 0	1 3

Road rules

	L_2	R_2
L_1	1, 1	0, 0
R_1	0, 0	1, 1

Отсутствие равновесия по Нэшу

	L	R
U	0 1	1 0
D	1 0	0 1

Lecture vs Cinema III

	L_2	C_2
L_1	0, 2	3, 1
C_1	1, 0	0, 3

Симплексы

$\daleth\ m \in \mathbb{N}$.

Симплекс размерности $m - 1$ есть

$$S^{(m-1)} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \mid x_j \geq 0$$

$$\text{для } \forall j = 1, \dots, m\,;\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1\}.$$

Чистые и смешанные стратегии
(pure and mixed strategies)

$\urcorner$ $G = \{I\,;\,S\,;\,U\}$, для $\forall\ i \in I\ \ |S_i| = m_i \in \mathbb{N}$.

$\urcorner$ $i \in I$.

Смешанная стратегия σ_i: $S_i \to [0;\ 1]$ ставит в соответствие каждой чистой стратегии $s_i \in S_i$ вероятность $\sigma_i(s_i) \geq 0$ того, что s_i будет выбрана, причем $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Множества и профили смешанных стратегий

$\exists\ G = \{I\,;\,S\,;\,U\}$, для $\forall\ i \in I \quad |S_i| = m_i \in \mathbb{N}$.

Для $\forall\ i \in I$ множество его смешанных стратегий Σ_i есть симплекс размерности $m_i - 1$.

Набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ называется профилем смешанных стратегий.

$\sigma \in \Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$ – пространство смешанных стратегий игры G

Выигрыши по наборам смешанных стратегий

∃ $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ – профиль смешанных стратегий для игры $G = \{I\,;\, S\,;\, U\}$, $i \in I$.

Выигрыш игрока i, соответствующий профилю σ, есть

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} [(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)) \cdot u_i(s)]$$

<u>Смешанное расширение конечной игры</u>
(mixed expansion)

$\exists$ $G = \{I\ ;\ S\ ;\ U\}$ – конечная игра n игроков;

$\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$, где

Σ_i – множество смешанных стратегий игрока $i \in I$.

Смешанным расширением игры G называется такая игра $\Gamma = \{I\ ;\ \Sigma\ ;\ U\}$, что

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \Big[\Big(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)\Big) \cdot u_i(s)\Big].$$

Носитель смешанной стратегии (mixed strategy support)

$\daleth$ $G = \{I\,;\, S\,;\, U\}$ – конечная игра, $i \in I$,

S_i – множество чистых стратегий игрока i ,

$\sigma_i \in \Sigma_i$ – смешанная стратегия игрока i .

Носителем смешанной стратегии σ_i называется множество

$S_i^+(\sigma_i) = \{\, s_i \in S_i \mid \sigma_i(s_i) > 0 \,\}$.

<u>Полностью смешанные стратегии</u>
(completely mixed strategies)

$\daleth$ $G = \{I\,;\,S\,;\,U\}$ – конечная игра, $i \in I$;

S_i – множество чистых стратегий игрока i,

$\sigma_i \in \Sigma_i$ – смешанная стратегия игрока i.

Стратегия σ_i называется полностью смешанной, если $S_i^+(\sigma_i) = S_i$.

Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях (mixed Nash equilibrium)

⊐ $G = \{I\,;\,S\,;\,U\}$ – конечная игра n игроков;

$\Gamma = \{I\,;\,\Sigma\,;\,U\}$ смешанное расширение G;

$\sigma^* = (\sigma^*_1, \sigma^*_2, \ldots, \sigma^*_n) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$.

Набор стратегий σ^* называется равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях для игры G, если

для $\forall\ i \in I$

$u_i(\sigma^*_i, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i})$ для $\forall\ \sigma_i \in \Sigma_i$,

т.е. если σ^* является равновесием по Нэшу для игры Γ.

Характеризация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях

$\sqsupset$ $G = \{I\,;S\,;U\}$ – конечная игра n игроков;

$\Gamma = \{I\,;\Sigma\,;U\}$ – смешанное расширение G ;

$\sigma^* = (\sigma^*_1, \sigma^*_2, \dots, \sigma^*_n) \in \Sigma$.

Набор σ^* является равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях для игры G тогда и только тогда, когда для $\forall\ i \in I$

$u_i(s'_i, \sigma^*_{-i}) = u_i(s''_i, \sigma^*_{-i})$ для $\forall\ s'_i, s''_i \in S_i^+(\sigma_i)$,

$u_i(s'_i, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s''_i, \sigma^*_{-i})$ для $\forall\ s'_i \in S_i^+(\sigma_i)$ и для $\forall\ s''_i \notin S_i^+(\sigma_i)$.