Рациональные уравнения и неравенства

доцент кафедры «Математическое образование»
Монахова О.А.

Понятие уравнения.

- *Уравнением* называют равенство, содержащее неизвестную (неизвестные), которое при подстановке значений неизвестной обращается в числовое равенство.
- ***Пример.*** 1. $kx + b = 0$, $ax + by = c$.
- 2. $ax^2 + bx + c = 0$.
- 3. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- 4. $a^x = b$.
- 5. $sin\, x = a$.
- Если значение неизвестной обращает уравнение в верное числовое равенство, то оно называется *корнем* (*решением*)этого уравнения.
- *Множество корней* уравнения называют *множеством решений* этого уравнения.
- ***Пример.*** 1. $2x – 4 = 0$, $x = 2$.
- 2. $2x – 4 = 2x$, корней нет, множество решений пусто $\varnothing$.
- 3. $x^2 – 4 = 0$, множество решений $\{2, -2\}$.
- 4. $x = x$, множество решений $(-\infty, +\infty)$.
- Если множество решений двух уравнений совпадают, то уравнения называют *равносильными*.
- ***Пример.*** 1. $2x – 4 = 0$ равносильно уравнению $3x = 6$.
- 2. $2^x = 2$ равносильно уравнению $x^2 - 2x + 1 = 0$.
- В результате преобразований уравнения могут появиться *посторонние* корни уравнения.
- ***Пример.*** 1. $x^{0.5}=-x$, возведем в квадрат $x = x^2$. Корни второго уравнения 0 и 1. 1 – посторонний корень для первого уравнения.

Равносильные преобразования уравнения

- *Областью определения* уравнения называют множество значений неизвестной, при которых выражения, содержащиеся в уравнении, имеют

Теорема 1. ***Если к обеим частям уравнения $f(x)=g(x)$ прибавить одно и то же выражение $\varphi(x)$, которое имеет смысл при всех x из области определения уравнения $f(x)=g(x)$, то получится уравнение $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$, равносильное данному.***

- Приведение подобных слагаемых может привести к расширению области определения уравнения, появлению посторонних корней.
- ***Пример. 1***. $\lg x + x^2 = 1 + \lg x$.
- $x^2 = 1$ имеет корни $\{1; -1\}$, -1 – посторонний корень исходного уравнения

Теорема 2. ***Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить или разделить на одно и то же выражение $\varphi(x)$, которое имеет смысл при всех значениях x из области определения данного уравнения и нигде в этой области определения не обращается в нуль, то получится уравнение***

$$f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x)\ \left(\text{или}\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{g(x)}{\varphi(x)}\right);$$

равносильное данному.

Равносильные преобразования уравнения

- Умножение или деление обеих частей уравнения может привести к изменению области уравнения потере или приобретению корней.
- ***Пример. 1***. $x^2 = x$, разделив на x, получим неравносильное уравнение $x = 1$, произошла потеря корня $x = 0$.

Теорема 3. *Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$, где $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ при всех значениях x из области определения уравнения, возвести в одну и ту же натуральную степень n, то получится уравнение $(f(x))^n = (g(x))^n$, равносильное данному.*

- При возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни.
- ***Пример.*** 1. $x^{0.5} = x - 6$, $x = x^2 - 12x + 36$. Корни второго уравнения 4 и 9. 4 – посторонний корень для первого уравнения.

Равносильные преобразования уравнения

- Примеры преобразований уравнений, приводящие к неравносильным уравнениям.

$$f(x) - f(x) = 0,\ \frac{f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y},\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},\ (\sqrt{x})^2 = x,$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ x^{\log_x y} = y,$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1,\ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},\ \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Дробно-рациональные уравнения

- *Дробно-рациональным* называется уравнение вида
- $f(x)/g(x)=0$,
- $(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)/(b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0) = 0$.
- Если знаменатель дроби – постоянный, то уравнение *рациональное* $f(x) = 0$. Корень уравнения $f(x) = 0$ является корнем многочлена $f(x)$.
- ***Теорема Безу.*** Число с является корнем $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится без остатка на двучлен $(x - c)$.
- ***Следствие.*** Многочлен n-й степени имеет не более n корней.

Деление многочлена на многочлен

- ***1. Деление углом.***

$$x^4+x^3+2x^2+x+1 \;\Big|\; \underline{x^3-2x^2+x-2}$$

$$\underline{x^4-2x^3+x^2-2x} \qquad x+3$$

$$3x^3+x^2+3x+1$$

$$\underline{3x^2-6x^2+3x-6}$$

$$x^3-2x^2+x-2 \;\Big|\; \underline{7x^2+7}$$

$$\underline{x^3 \qquad +x} \qquad \frac{1}{7}x-\frac{2}{7}$$

$$-2x^2-2$$

$$\underline{-2x^2-2}$$

$$0$$

- ***2. Схема Горнера.***
- **Пример**. Разделить многочлен $f(x)=x^5+2x^4+3x+2$ на $x+1$.
- В этом примере $x_0=-1$. Составим таблицу:

	1	2	0	0	3	2
-1	1	1	-1	1	2	0

- Из таблицы следует, что $f(x) = (x+1)(x^4+x^3-x^2+x+2)$.

Кратные корни многочлены

- *Наибольшая* натуральная степень k, при возведении в которую $(x - c)^k$ является делителем многочлена $f(x)$, называется *кратностью корня c* многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x)=0$).
- ***Пример.*** $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$.
- 1 – простой корень многочлена,
- 2 – двукратный корень,
- 3 – трехкратный корень.

Формулы Виета

- Пусть $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ - многочлен, который имеет ровно n корней с учетом их кратности.

Тогда $f(x) = a_n (x - x_1) \ldots (x - x_n)$ по т. Безу, а при этом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \ldots\ldots \\ x_1x_2 \ldots x_{n-1} + x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n + \cdots + x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n}, \\ x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

- Т.о. приведенные формулы Виета связывают корни многочлена и его коэффициенты.
- *Записать формулы Виета для многочлена 2 степени и 3 степени.*

Формулы Виета

Рациональные корни многочлена

- ***Теорема***. Пусть $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ - многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь p/q является корнем многочлена $f(x)$, то числитель этой дроби p является делителем свободного члена a_0 этого многочлена, знаменатель q этой дроби является делителем старшего коэффициента a_n.

Пример. Найти рациональные корни многочлена $f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$.

Выпишем делители свободного члена данного многочлена 2: ± 1, ± 2. Эти числа являются всеми возможными значениями числителя p корня этого многочлена;

делители старшего коэффициента 3: ± 1, ± 3 - возможные значения знаменателя q корня.

Возможные рациональные корни имеют вид $\frac{p}{q}$: $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$.

Рациональные корни многочлена

- ***Следствие.*** Если старший коэффициент многочлена с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни многочлена являются целыми и являются делителями свободного члена.
- ***Пример.*** $x^3 - 3x + 2 = 0$. Найдите корни многочлена.

Методы решения рациональных уравнений

- ***1. Разложение на множители***
- ***Пример.***

332. $x^6 - 64 = 0.$

- ***2. Метод подбора.***
- ***Пример.***

333. $x^3 + x - 2 = 0.$

- ***3. Метод замены переменных.***
- Пример.

342. $3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$

Решение уравнений

Решите уравнения.

331. $x^4-1=0.$

332. $x^6-64=0.$

333. $x^3+x-2=0.$

334. $x^3-4x^2+x+6=0.$

335. $x^3+9x^2+23x+15=0.$

336. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8.$

337. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0.$

338. $x^4+5x^3+4x^2-24x-24=0.$

339. $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0.$

340. $x^5+4x^4-6x^3-24x^2-27x-108=0.$

341. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2.$

342. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$ **343.** $\frac{(3+x)(2+x)(1+x)}{(3-x)(2-x)(1-x)}=-35.$

344. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}.$

345. $2x^4-x^3+5x^2-x+3=0.$

346. $2x^4-4x^3+13x^2-6x+15=0.$

347. $x^3+4x^2-2x-8=0.$

348. $x^3-3x^2+4x-12=0.$

349. $x^3+3x+4=0.$

350. $x^8-15x^4-16=0.$

351. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1.$

352. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9.$ **353.** $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2.$

354. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1.$

52

355. $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}.$

356. $x^3-x^2-\frac{8}{x^3-x^2}=2.$

357. $x(x-1)(x-2)(x-3)=15.$

358. $(x-1)x(x+1)(x+2)=24.$

359. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3.$

360. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=4{,}5.$

361. $(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=1.$

362. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

363. $10x^3-3x^2-2x+1=0.$ **364.** $4x^3-3x-1=0.$

365. $38x^3+7x^2-8x-1=0.$

366. $4x^3+6x^2+4x+1=0.$

367. $16x^3-28x^2+4x+3=0.$

368. $100x^3-120x^2+47x-6=0.$

369. $6x^3-13x^2+9x-2=0.$

370. $4x^3+6x^2+5x+69=0.$

371. $3x^3-2x^2+x-10=0.$

372. $32x^3-24x^2-12x-77=0.$

373. $4x^3+2x^2-8x+3=0.$

374. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0.$

375. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

376. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4.$ **377.** $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=5\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right).$

378. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0.$

379. $x^4+x^3+4x^2+5x+25=0.$

380. $x^4+2x^3-7x^2-4x+4=0.$

381. $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0.$

382. $x^4-8x+63=0.$ **383.** $\frac{x^2-6x-9}{x}=\frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}.$

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

- *Методы решения уравнений с модулем.*
- *1) Раскрытие модуля по определению.*
- ***Пример.***

384. а) $|x| + x^3 = 0$;

- *2) Разбиение на промежутки.*
- ***Пример.*** **397.** а) $|x-1| - |x-2| = 1$;
- *3) Возведение обеих частей в квадрат.*
- ***Пример.*** **391.** а) $|3x+2| = |2x-3|$;

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

391. а) $|3x+2|=|2x-3|$; б) $|6x+5|=|1-x|$.

392. а) $|x^2+x-1|=2x-1$; б) $|x^2-x-3|=-x-1$.

393. а) $2|x^2+2x-5|=x-1$; б) $2|x^2-x|=x^2+1$.

394. а) $x^2+3|x|+2=0$; б) $2x^2-|x|-15=0$.

395. а) $(x+1)^2-2|x+1|+1=0$; б) $x^2+2x-3|x+1|+3=0$.

396. а) $|x|+|x+1|=1$; б) $|x+1|+|x+2|=2$.

397. а) $|x-1|-|x-2|=1$; б) $|x-2|+|4-x|=3$.

398. а) $|x-1|+|x-2|=1$; б) $2|x+3|-|x-4|=4$.

399. а) $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$;
б) $|x+1|-|x-2|+|3x+6|=5$.

400. а) $|2x+1|-|3-x|=|x-4|$;
б) $|x-1|+|1-2x|=2|x|$.

401. а) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$;
б) $|x+1|-|x|+3|x-1|=2$.

402. а) $|x|-2|x+1|+3|2x-4|=1$;
б) $|x|+2|x+1|-3|x-3|=0$.

403. а) $|x^2-9|+|x-2|=5$;
б) $|x^2-1|+|x+1|=0$.

404. а) $|x^2-4|-|9-x^2|=5$;
б) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.

405. а) $|x-x^2-1|=|2x-3-x^2|$;
б) $|x^2+2x|-|2-x|=|x^2-x|$.

406. а) $||3-2x|-1|=2|x|$;
б) $||x+4|-2x|=3x-1$.

407. а) $|2|x-1|+3x-4|=x-2$;
б) $|3x-|2x-5||=x+5$.

408. а) $|-2x-|3x+4|+5|=1-5x$;
б) $|-5x-3|2x-3|+2|=11+x$.

409. а) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; б) $\dfrac{|x^2-x|+1}{|x+1|-x^2}=1$.

410. а) $\dfrac{|x^2-3x+2|+x}{|x^2-x|+1}=1$;

б) $\dfrac{|x^2+4x+3|-x}{2-|2x+x^2|}=1$.

Рациональные неравенства

- Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_p$ — натуральные числа и где

$$a_i\neq a_j,\ b_i\neq b_j \text{ при } i\neq j;\ a_i\neq b_j\ (i=1, 2, \ldots, k;\ j=1, 2, \ldots, p).$$

- Нули числителя и нули знаменателя отметим на числовой прямой, внутри каждого из образовавшихся промежутков функция сохраняет свой постоянный знак.
- Значит, для решения дробно-рационального неравенства, $f(x) < 0$ ($f(x) \geq 0$), нужно
- 1. Привести неравенство к стандартному виду.
- 2. Найти и отметить на числовой прямой нули числителя и нули знаменателя).
- 3. Определить знак функции на каждом промежутке. (Можно использовать кривую знаков).
- 4. Выбрать нужные промежутки.

Рациональные неравенства

- ***Пример.***

$$\frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3} \leqslant 0.$$

Рациональные неравенства

Решите неравенства.

882. $x(x-1)^2>0.$
883. $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0.$
884. $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4<0.$
885. $x^3-64x>0.$ **886.** $x^2+10\leqslant 7x.$
887. $x^2-7x<3.$ **888.** $-x^2-16+8x\geqslant 0.$
889. $x^2+5x+8>0.$ **890.** $x^4+8x^3+12x^2\geqslant 0.$
891. $(x-1)(x^2-3x+8)<0.$ **892.** $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\leqslant 0.$
893. $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{5-2x}>0.$ **894.** $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}>0.$
895. $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-3)\leqslant 0.$
896. $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4)<0$
897. $(2x^2-x-5)(x^2-9)(x^2-3x)\leqslant 0.$
898. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0.$ **899.** $\dfrac{x^2-4x-2}{9-x^2}<0.$
900. $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25}\geqslant 0.$ **901.** $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0.$
902. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0.$ **903.** $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0.$ **904.** $\dfrac{3x-2}{2x-3}<3.$

152

Рациональные неравенства

905. $\frac{7x-4}{x+2}\geqslant 1.$ **906.** $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}.$ **907.** $\frac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8}>2.$

908. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}.$ **909.** $\frac{x+1}{x-2}>\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}.$

910. $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}>3.$ **911.** $\frac{1}{3x-2-x^2}>\frac{3}{7x-4-3x^2}.$

912. $\frac{3}{6x^2-x-12}<\frac{25x-47}{10x-15}-\frac{3}{3x+4}.$ **913.** $\frac{2-x}{x^3+x^2}\geqslant\frac{1-2x}{x^3-3x^2}.$

914. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leqslant\frac{1-2x}{x^3+1}.$ **915.** $\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}\geqslant\frac{5(6-x)}{x-2}.$

Решите системы неравенств.

916. $\begin{cases}\frac{3x+5}{7}+\frac{10-3x}{5}>\frac{2x+7}{3}-\frac{148}{21},\\ \frac{7x}{3}-\frac{11(x+1)}{6}>\frac{3x-1}{3}-\frac{13-x}{2}.\end{cases}$

917. $\begin{cases}3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}>4-\frac{7-3x}{2},\\ 7(3x-6)+4(17-x)>11-5(x-3).\end{cases}$

918. $\begin{cases}\frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2}<2x,\\ \frac{2x+15}{9}>\frac{1}{5}(x-1)+\frac{x}{3}.\end{cases}$ **919.** $\begin{cases}x^2-4x+3<0,\\ 2x-4<0.\end{cases}$

Неравенства с модулем

Решите неравенства.

950. а) $|x+5|>11$; б) $|2x-5|<3$.
951. а) $|3x-1|\geqslant 5$; б) $|2x-4|\leqslant 1$.
952. а) $|2x-1|<|4x+1|$; б) $|1-3x|\geqslant|2x+3|$.
953. а) $\left|-\frac{5}{x+2}\right|<\left|\frac{10}{x-1}\right|$; б) $\left|\frac{3}{2x-7}\right|<\left|-\frac{6}{x+4}\right|$.
954. а) $|1-2x|>3-x$; б) $|x+8|<3x-1$.
955. а) $|4-3x|\geqslant 2-x$; б) $|2x-3|\geqslant x+4$.
956. а) $|2x-3|\geqslant 2x-3$; б) $|3x+1|\leqslant 3x+1$.
957. $|5x^2-2x+1|<1$.
958. $|6x^2-2x+1|\leqslant 1$. **959.** $|-2x^2+3x+5|>2$.
960. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|<3$. **961.** $\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right|\geqslant 2$.
962. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|>1$. **963.** $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|\leqslant 3$.
964. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\geqslant 1$.
965. $x^2+2|x|-3\leqslant 0$. **966.** $x^2+5|x|-24>0$.
967. $|x^2-3x-15|<2x^2-x$. **968.** $|x^2+x+10|\leqslant 3x^2+7x+2$.
969. $|2x^2+x+11|\geqslant x^2-5x+6$. **970.** $|4x^2-9x+6|>-x^2+x-3$.
971. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 2$. **972.** $|x-6|>|x^2-5x+9|$.
973. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$. **974.** $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.
975. $|x|+|x-1|<5$. **976.** $|x+1|+|x-2|>5$.
977. $|x-2|-|2x+1|<3$. **978.** $|3x-1|+|2x-3|-|x+5|<2$.
979. $|x-1|+|2-x|>3+x$. **980.** $\frac{|x+1|}{|x-2|-2}<1$ **981.** $\frac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|}\leqslant 1$.
982. $||2x+1|-5|>2$. **983.** $||x-3|+1|\geqslant 2$. **984.** $||x-1|+x|<3$.
985. $||x-2|-x+3|<5$. **986.** $|2x-|3-x|-2|\leqslant 4$.
987. $|2x-|x+3|+1|>2$.
988. $\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right|+\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-12<0$.