06.04.20.

Тема:
Тетраэдр и параллелепипед.
Задачи на построение сечений.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

https://infourok.ru/videouroki/1430
https://infourok.ru/videouroki/1419
https://infourok.ru/videouroki/1417

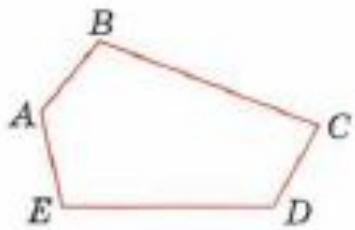
Теоретическая часть:
Прочитать.
Теоремы и определения
(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

§4 Тетраэдр и параллелепипед

12 Тетраэдр

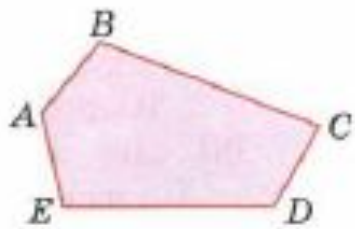
Одна из глав нашего курса будет посвящена многогранникам — поверхностям геометрических тел, составленным из многоугольников. Но еще до подробного изучения многогранников мы познакомимся с двумя из них — **тетраэдром** и **параллелепипедом**. Это даст нам возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей, на примере двух важных геометрических тел.

Прежде чем ввести понятия тетраэдра и параллелепипеда, вспомним, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. Многоугольник мы рассматривали либо как замкнутую линию без самопересечений, составленную из отрезков (рис. 33, *а*), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая ее саму (рис. 33, *б*). При рассмотрении поверхностей и тел в пространстве будем пользоваться вторым толкованием многоугольника. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность.



а)

Многоугольник $ABCDE$ — фигура, составленная из отрезков



б)

Многоугольник $ABCDE$ — часть плоскости, ограниченная линией $ABCDE$

Рис. 33

Перейдем теперь к определению тетраэдра.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA. **Поверхность, составленная из четырех треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется тетраэдром и обозначается так: $DABC$ (рис. 34).**

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами тетраэдра**. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными**. На рисунке 34 противоположными являются ребра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделя-

этом штриховыми линиями изображаются невидимые ребра. На рисунке 34 невидимым является только ребро AC, а на рисунке 35 — ребра EK, KF и KL.

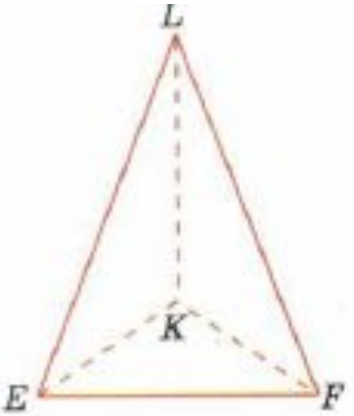


Рис. 35

13 Параллелепипед

Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны (рис. 36, *а*). Четырехугольники

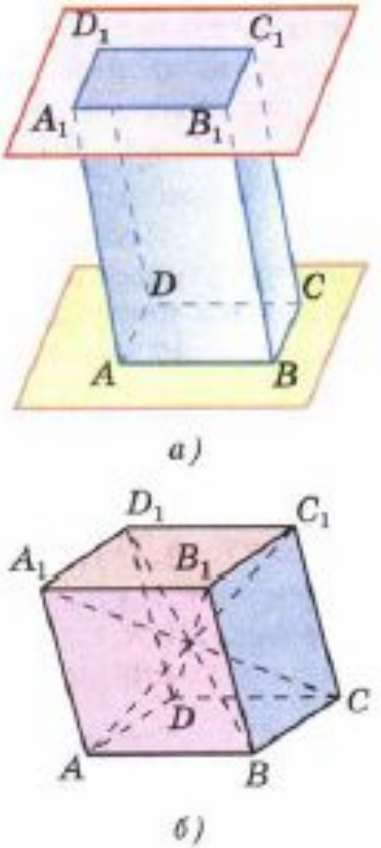
$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны, например, в четырехугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 — по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей (свойство 1^0, п. 11). Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырех параллелограммов (1), называется **параллелепипедом** и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины параллелограммов — **вершинами параллелепипеда**. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются **смежными**, а не имеющие общих ребер — **противоположными**. На рисунке 36, *б* противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются **противоположными**. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю параллелепипеда**. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке 36, *б* диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1.

Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями параллелепипеда**. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми ребрами**. Так, если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут параллелограммы (1), а боковыми ребрами — отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Параллелепипед изображается обычно так, как показано на рисунке 36, *б*. При этом изображениями



Параллелепипед

Рис. 36

граней являются параллелограммы; невидимые ребра и другие невидимые отрезки, например диагонали, изображаются штриховыми линиями*.

Рассмотрим два свойства параллелепипеда.

1^0. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.**

Докажем, например, параллельность и равенство граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37, *а*). Так как $ABCD$ и ADD_1A_1 — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 одной грани соответственно параллельны двум пересекающимся прямым CD и DD_1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны.

Докажем теперь равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то $AB = DC$ и $AA_1 = DD_1$. По этой же причине стороны углов A_1AB и D_1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC_1D_1, поэтому эти параллелограммы равны.

2^0. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим четырехугольник A_1D_1CB, диагонали которого A_1C и D_1B являются диагоналями параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 37, *а*). Так как $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$ (объясните почему), то A_1D_1CB — параллелограмм. Поэтому диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

Далее рассмотрим четырехугольник AD_1C_1B (рис. 37, *б*). Он также является параллелограммом (докажите это), и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким

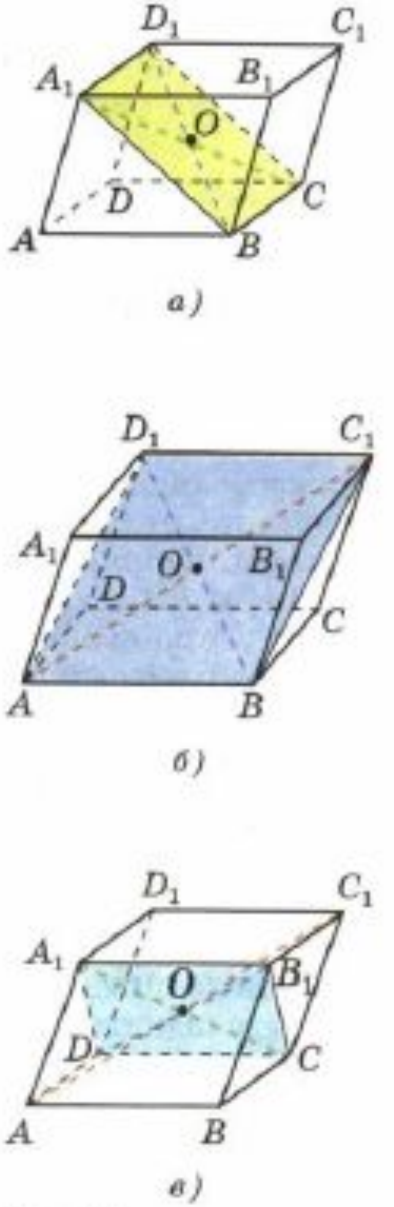


Рис. 37

образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

Наконец, рассматривая четырехугольник A_1B_1CD (рис. 37, *в*), точно так же устанавливаем, что и четвертая диагональ DB_1 параллелепипеда проходит через точку O и делится ею пополам.

14 Задачи на построение сечений

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их **сечения** различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем **секущей плоскостью** тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением тетраэдра (параллелепипеда)**. Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 38). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники (рис. 39, *а*), пятиугольники (рис. 39, *б*) и шестиугольники (рис. 39, *в*).

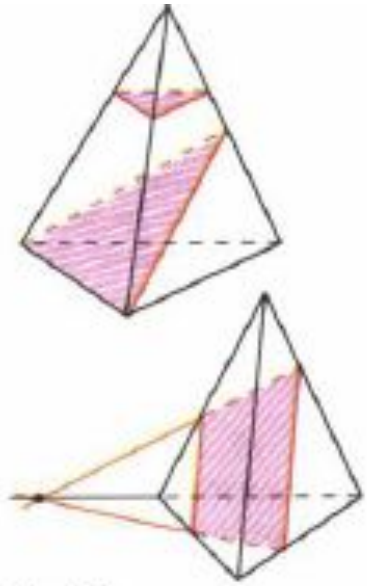


Рис. 38

При построении сечений параллелепипеда на рисунке следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны (свойство 1^0, п. 11). Так, на рисунке 39, *б* секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) — по отрезкам AE и BC, поэтому $AB \parallel CD$ и $AE \parallel BC$. По той же причине на рисунке 39, *в* $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Отметим также, что для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

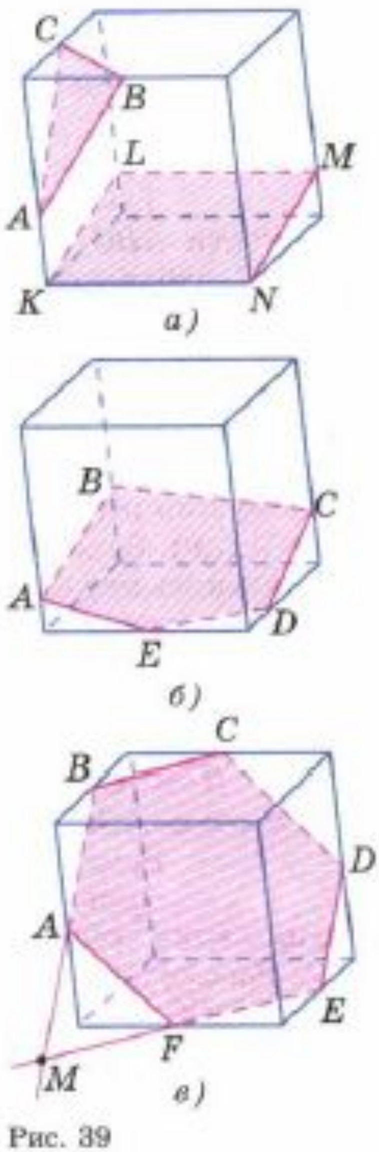


Рис. 39

Рассмотрим примеры построения различных сечений тетраэдра и параллелепипеда.

Задача 1

На ребрах AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M, N и P (рис. 40, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

Решение

Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения еще одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 40, *б*), которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырехугольник $MNPQ$ — искомое сечение.

Если прямые NP и BC параллельны (рис. 40, *в*), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ME', параллельной прямой NP. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ME'.

Задача 2

Точка M лежит на боковой грани ADB тетраэдра $DABC$ (рис. 41, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно основанию ABC.

Решение

Так как секущая плоскость параллельна плоскости ABC, то она параллельна прямым AB, BC и CA. Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC (п. 6, утверждение 1^0). Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведем через точку M прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми ребрами DA и DB (рис. 41, *б*). Затем через точку P проведем прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR — искомое сечение.

Задача 3

На ребрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

Решение

Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если точки A, B и C лежат на ребрах, выходящих из одной вершины (см. рис. 39, *а*), нужно провести отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение — треугольник ABC. Если точки A, B и C расположены так, как

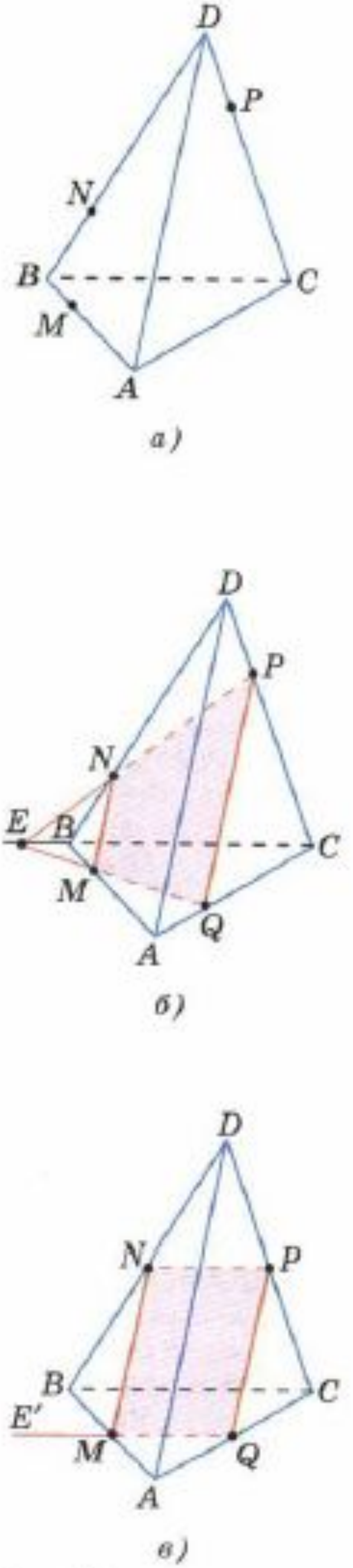
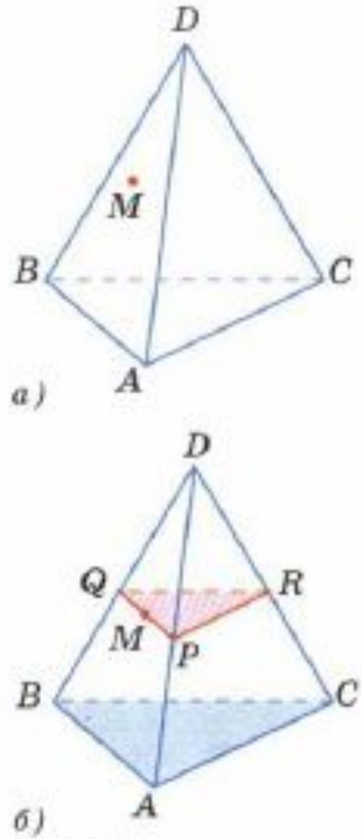


Рис. 40

показано на рисунке 39, *б*, то сначала нужно провести отрезки AB и BC, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C — прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с ребрами нижней грани дают точки E и D. Остается провести отрезок ED, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.

Более трудный случай, когда данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *в*. В этом случае можно поступить так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведем прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Далее через точку M проведем прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с ребрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведем прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.



а) б)
Рис. 41

Практическая часть.

66 Назовите все пары скрещивающихся (т. е. принадлежащих скрещивающимся прямым) ребер тетраэдра $ABCD$. Сколько таких пар ребер имеет тетраэдр?

67 В тетраэдре $DABC$ дано: $\angle ADB = 54°$, $\angle BDC = 72°$, $\angle CDA = 90°$, $DA = 20$ см, $BD = 18$ см, $DC = 21$ см. Найдите: а) ребра основания ABC данного тетраэдра; б) площади всех боковых граней.

71 Изобразите тетраэдр $DABC$ и на ребрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.

72 Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости грани ABC, если: а) точка M является серединой ребра AD; б) точка M лежит внутри грани ABD.