Кислицын А.А.
Физика атома, атомного ядра и элементарных частиц

02.(1). Приложение к вопросу 02: вывод формулы Резерфорда.

Для удобства продублируем несколько слайдов из предыдущей презентации

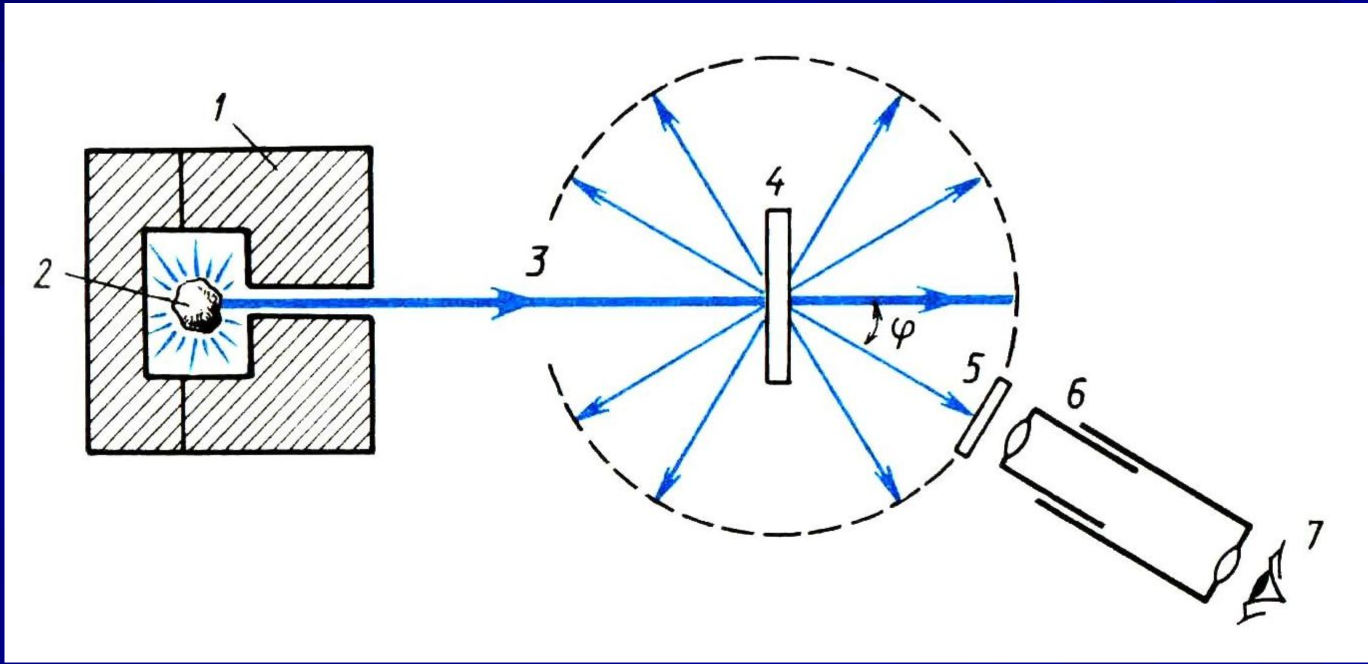
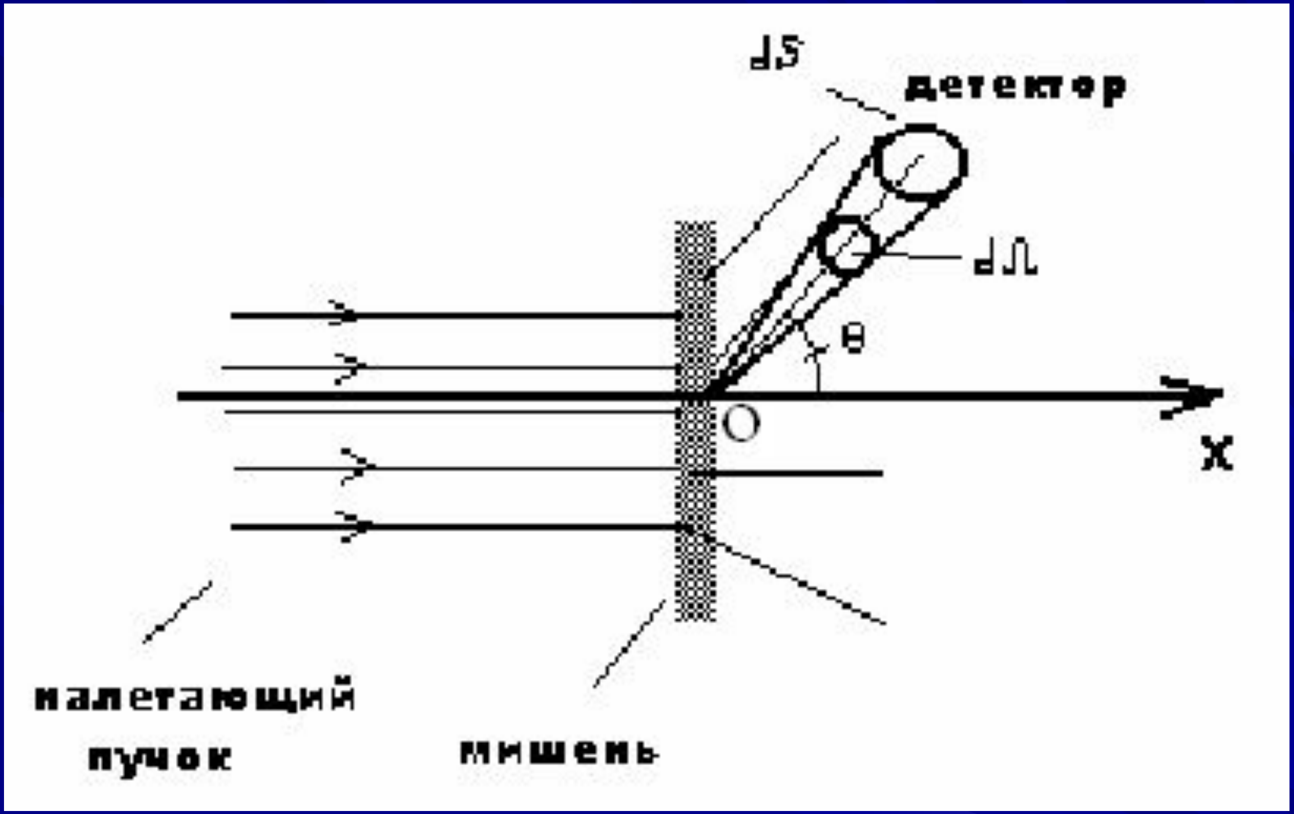


Схема опытов Резерфорда (Rutherford E.)

1- свинцовый контейнер, 2- источник альфа-частиц, 3- пучок альфа-частиц, 4- тонкая металлическая фольга, 5- сцинтиллятор, 6- микроскоп, 7- глаз наблюдателя.

Рассеяние частиц атомными ядрами.



O - центр рассеяния (ядро атома). Детектор с площадью рабочей поверхности dS регистрирует частицы, рассеянные под углом θ - (угол рассеяния), и летящие внутри телесного угла $d\Omega$.

Количество частиц dN, летящих внутри телесного угла $d\Omega$, и зарегистрированных детектором за единицу времени, равно:

$$dN = d\sigma \cdot n_1 \cdot v_1 \cdot n_2 \cdot V\ , \qquad (2.1)$$

где n_1 - плотность частиц в налетающем пучке, v_1 - их скорость, n_2 - число ядер в единице объема мишени, V - рабочий объем мишени, равный произведению площади поперечного сечения пучка на толщину мишени, если частицы пролетают сквозь мишень (в этом случае мишень называется "тонкая"). Если частицы останавливаются внутри мишени, то площадь поперечного сечения пучка надо умножить на глубину проникновения частиц, в этом случае мишень называется "толстая". Коэффициент $d\sigma$ называется "эффективным сечением".

Из формулы (2.1) находим эффективное сечение:

$$d\sigma = \frac{dN}{n_1 v_1 n_2 V} \tag{2.2}$$

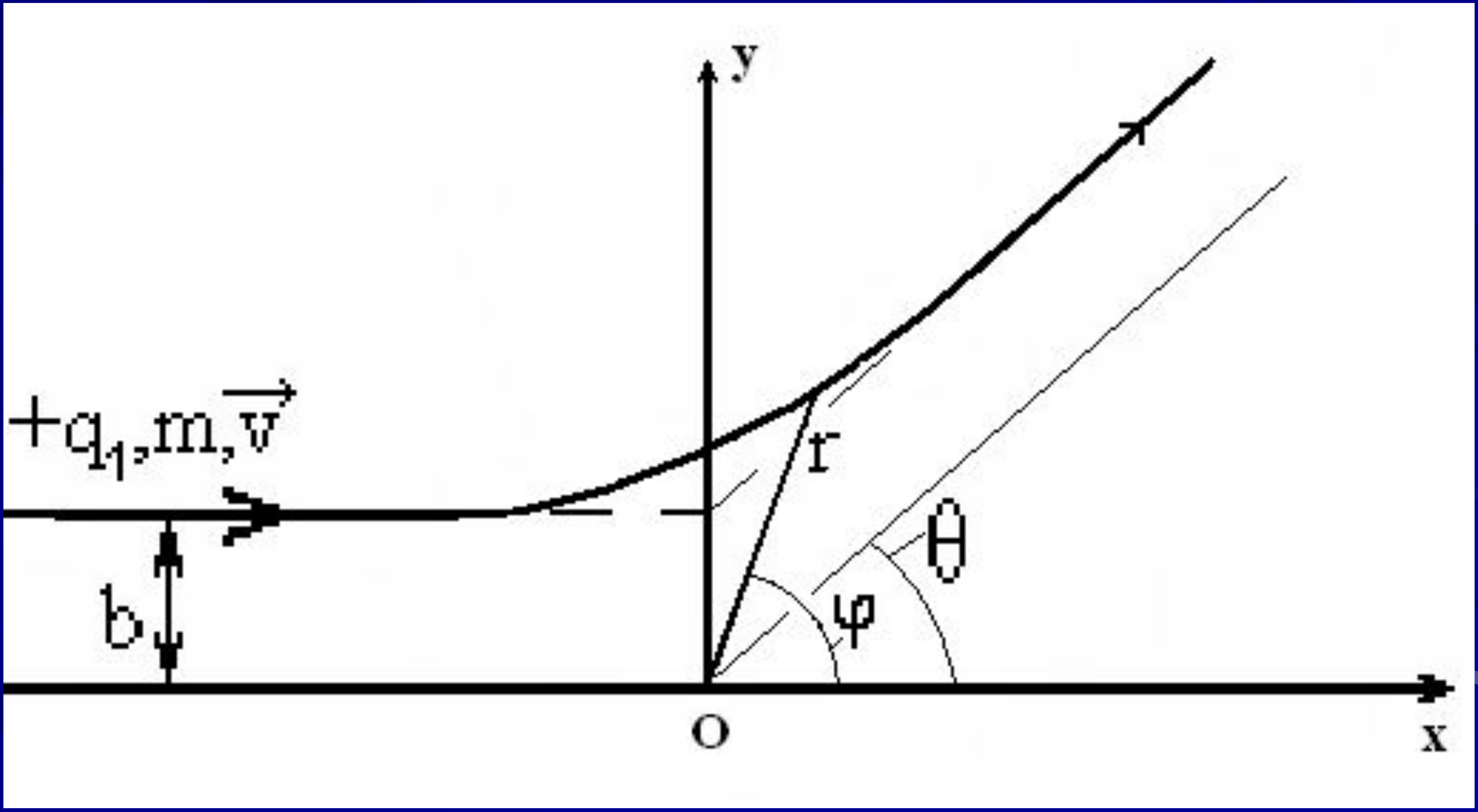
Разделив обе части формулы (2.2) на $d\Omega$, находим характеристику, которая называется "дифференциальное эффективное сечение":

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN / d\Omega}{n_1 v_1 n_2 V} \tag{2.3}$$

Проинтегрировав (2.2) или (2.3) по всему телесному углу Ω, получаем величину, которая называется "полное сечение":

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{\Delta N}{n_1 v_1 n_2 V} \tag{2.4}$$

Упругое рассеяние альфа-частиц на ядрах атомов (рассеяние Резерфорда)



Для этого процесса (упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах атомов) Э.Резерфорд получил формулу, носящую его имя (**формула Резерфорда)**:

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{4}\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}} \qquad (2.5)$$

Обозначения: m, v - масса и скорость налетающей частицы, q_1 и q_2 - электрические заряды налетающей частицы и ядра соответственно. Для альфа-частицы $q_1 = 2e$, для ядра $q_2 = Ze$, e - элементарный электрический заряд, по абсолютной величине равный заряду электрона; Z - число протонов в ядре атома мишени, ε_0 - электрическая постоянная.

Вывод формулы Резерфорда

Потенциальная энергия частицы в поле ядра: $U = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Кинетическая энергия частицы: $T = \dfrac{m}{2}\left(\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$

Закон сохранения энергии имеет вид:

$$T + U = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E \qquad (2.6)$$

где $E = const$ – полная энергия частицы.

Закон сохранения момента импульса:

$$mr^2\frac{d\varphi}{dt} = mvb \qquad (2.7)$$

где b – прицельный параметр, v - скорость частицы вдали от центра рассеяния.

Вывод формулы Резерфорда

Из (2.7) находим: $$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{mvb}{mr^2}=\frac{vb}{r^2}$$

подставляем в (2.6):

$$E=\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\frac{v^2b^2}{r^4}\right)+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Отсюда:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2}{m}\left(E-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{v^2b^2}{r^2} \qquad (2.8)$$

Чтобы получить уравнение траектории, исключаем время:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{vb}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \qquad (2.9)$$

Вывод формулы Резерфорда

Подставляем (2.9) в (2.8):

$$\frac{v^2b^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) - \frac{v^2b^2}{r^2} \qquad (2.10)$$

Делаем замену переменной:

$$r = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad dr = -\frac{dz}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{dz}{z^2 d\varphi}$$

и подставляем в (2.10):

$$\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2E}{mv^2b^2} - \frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 mv^2b^2}z - z^2 \qquad (2.11)$$

Дифференцируем (2.11) по ϕ:

$$2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)\frac{d^2z}{d\varphi^2} = -\frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 mv^2b^2}\left(\frac{dz}{d\varphi}\right) - 2z\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)$$

или

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z = -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2b^2} \qquad (2.12)$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Его общее решение можно записать как сумму: любое частное решение плюс общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z = 0 \qquad (2.13)$$

Одно из частных решений уравнения (2.12) можно найти сразу:

$$z_1 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2} \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.13) - это уравнение гармонических колебаний; вид его общего решения общеизвестен:

$$z_0 = A\cos\varphi + B\sin\varphi$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.12):

$$z = z_0 + z_1 = A\cos\varphi + B\sin\varphi - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2} \qquad (2.15)$$

Чтобы найти константы A и B, используем граничные условия. При угле $\varphi \to \pi$ расстояние от частицы до ядра $r \to \infty$, следовательно, $z = 0$. Подставляя в (2.15), находим:

$$A = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2} \qquad (2.16)$$

Чтобы найти константу B, заметим, что ордината y любой точки траектории связана с r и ϕ соотношением $y = r\cdot\sin\phi$, или

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r\sin\varphi} = \frac{z}{\sin\varphi} \qquad (2.17)$$

С другой стороны, из (2.15) с учетом (2.16), находим:

$$B = \frac{z}{\sin\varphi} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2} - A\cos\varphi = \frac{z}{\sin\varphi} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

Подставляя сюда (2.17), получаем:

$$B = \frac{1}{y} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

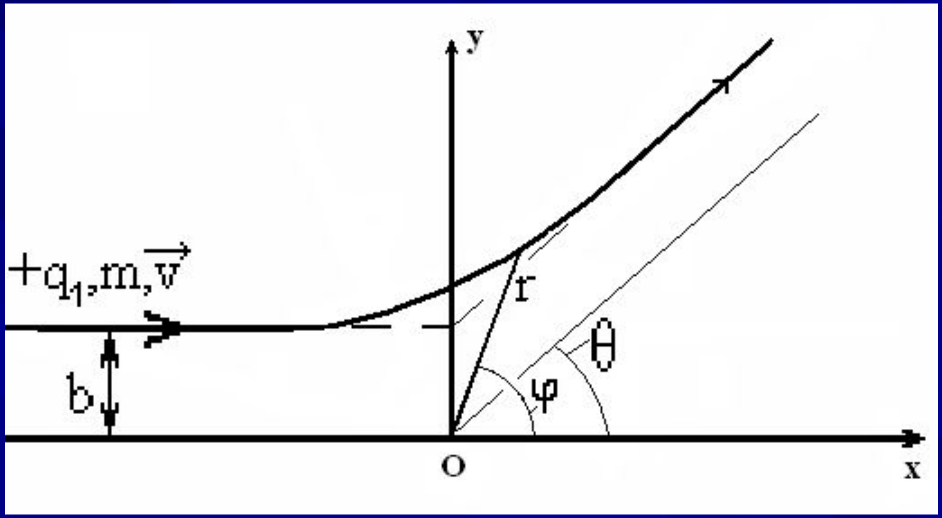
При угле $\varphi \to \pi$ ордината $y \to b$, а $\cos\varphi \to -1$,

Отсюда

$$B = \frac{1}{b} \qquad (2.18)$$

Таким образом, уравнение, связывающее r и ϕ (т.е. уравнение траектории частицы) можно записать в виде:

$$z = \frac{1}{r} = \frac{1}{b}\sin\varphi - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2}\left(1+\cos\varphi\right) \qquad (2.19)$$



После рассеяния угол $\varphi \to \theta$, расстояние от частицы до ядра $r \to \infty$, поэтому из (2.19) в пределе получаем

$$\frac{1}{b}\sin\theta - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2}\left(1+\cos\theta\right) = 0 \qquad (2.20)$$

Используя тригонометрические тождества

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}; \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

запишем (2.20) в виде

$$\frac{1}{b}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{4mv^2 b^2 \pi\varepsilon_0} 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

Отсюда получаем соотношение между углом рассеяния θ и прицельным параметром b:

$$tg\frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b} \qquad (2.21)$$

или

$$b = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b} ctg\frac{\theta}{2} \qquad (2.22)$$

Для сравнения с опытом надо вычислить эффективное сечение рассеяния

Эффективное сечение равно площади кольца:

$$d\sigma = 2\pi b db \qquad (2.23)$$

Дифференцируя уравнение (2.21), находим:

$$d\left(tg\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2(\theta/2)} = -\frac{q_1 q_2 db}{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2} \qquad (2.24)$$

Отсюда

$$db = -\frac{4\pi\varepsilon_0 m v^2 b^2 d\theta}{2 q_1 q_2 \cos^2(\theta/2)} \qquad (2.25)$$

Подставляя (2.22) и (2.25) в (2.23), получаем:

$$d\sigma = 2\pi b|db| = \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2}\right)^2 \frac{\pi d\theta}{tg^3(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \qquad (2.26)$$

Подставляя в (2.26) формулу для телесного угла

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta = 2\pi\, 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$$

получаем в окончательном виде формулу Резерфорда (2.5):

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{4}\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}}$$