

# טופולוגיה – תרגול 2

מרחבים מטריים, סדרות במרחבים מטריים

למשך

המשפט

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

המשפט

על

של

RW

-2

על

המשפט:

למשך

המשפט

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

הסדרה

ש

היא

$\mathbb{R}^W$

-2

הצורה:

הצורה:

$$L_1 := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^W$$

∴

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \}$$

למשל

המשפט

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

המשפט

על

המשפט

$\mathbb{R}^W$

-2-

המשפט:

המשפט:

$$L_1 := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^W \}$$

::

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

$$L_2 := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^W \}$$

::

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

D

למשל

המשפט

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

המשפט

על

המשפט

$\mathbb{R}^W$

-2-

המשפט:

המשפט:

$$L_1 := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^W : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \}$$

$$: \{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \}$$

$$L_2 := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^W : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$$

$$: \{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$$

$$L_{\infty} := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^W : \sup \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} < \infty \}$$

$$: \{ \sup \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} < \infty \}$$

$$\alpha \cdot (a_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$$

↪ Beispiel

↪  $\mathbb{C}$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$$

↪ Beispiel

↪  $\mathbb{R}$

↪  $\mathbb{C}$

↪  $\mathbb{R}^n$

$\cdot \mathbb{R}^{\omega}$

Se 's'ys

zww

sr

z'w'w

$L_{\infty}^{-1}$

$L_2$

$L_1$

$\hookrightarrow$

$$\alpha \cdot (a_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$$

→ z'w'w

z'w'w

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$$

-1

z'w'w

z'w'w

z'w'w

$\mathbb{R}^{\omega}$

$\cdot \mathbb{R}^{\omega}$

Se 'slyf

amw

in

plid

$L_{\infty}$

$L_2$

$L_1$

$\hookrightarrow$

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_{\infty}$$

$\hookrightarrow$

$$\alpha \cdot (a_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$$

amw

or  $\hookrightarrow$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$$

-1

idic

amw

amw

$\mathbb{R}^{\omega}$



1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. This is essential for ensuring the integrity of the financial data and for providing a clear audit trail.

2. The second part of the document outlines the various methods used to collect and analyze data. These methods include direct observation, interviews, and the use of specialized software tools.

3. The third part of the document describes the results of the data collection and analysis. It shows that there is a significant correlation between the variables being studied, which supports the hypothesis.

4. The fourth part of the document discusses the implications of the findings. It suggests that the results could be used to inform policy decisions and to improve the efficiency of the system.

5. The fifth part of the document concludes the study and provides a summary of the key findings. It also identifies some limitations of the study and suggests areas for future research.

6. The sixth part of the document provides a detailed description of the methodology used in the study. This includes information about the sample size, the data collection instruments, and the statistical tests used.

7. The seventh part of the document discusses the ethical considerations that were taken into account during the study. It ensures that all participants provided informed consent and that their privacy was protected.

8. The eighth part of the document provides a list of references to the literature that was consulted during the study. This helps to establish the context of the research and to show how it fits into the broader field.

9. The ninth part of the document provides a list of appendices that contain additional information related to the study. This includes raw data, detailed questionnaires, and other supporting documents.

10. The tenth part of the document provides a list of figures and tables that are used to present the results of the study. These visual aids help to make the data more accessible and easier to understand.

15

תוכנית: (א) תרגיל

תוכנית:

15 תרגיל

באילן נוטה

עמב

L<sub>1</sub>

L<sub>2</sub>-E

L<sub>1</sub>-L<sub>2</sub>

הילן

נטיה

תה"ל

כאן

של

RW

16 תרגיל

תוכנית:

15 (א) תרגיל

באילו נוסחה

$L_2$  - ש

הינו

תה"ו

של

$R^W$

כמה

16.

עלבי

$L_1$

$L_1$  - ו

נשאיר

כאן

(1) נוסחה

נדדים

שהסיוון

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

הינו

סיוון

של

הקבול

של

הסדרה

$\sum_{i=1}^n a_i$

כלומר

תוכנית:

15 (א) תרגיל

באילו נוסח

$L_2$  - ש

היו

תה"ו

ש

$R^W$

16. כרטיס

כא

נטי

$L_1$  - ו

$L_1$

עב

(1) נוסח

נד

שהס'ו

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

היו

ס'ו

ש

הקב

ש

הסדר

$\sum_{n=1}^n a_i$

כ

כ

א

ע

י

ש

הסכ

מ

פ

במ

הכ

ס'ו

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

א

מ



הסדרה  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנסת  
אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

הסדרה  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנסת  
אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .



הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  גורם  $a_n$   $\rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  גורם  $a_n$   $\rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  גורם  $a_n$   $\rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \right) = \frac{-2((-2)^{\infty} - 1)}{-3} =$$

הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  גורם  $a_n$   $\rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  גורם  $a_n$   $\rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  גורם  $a_n$   $\rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  גורם  $a_n$   $\rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$



אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$  מתכנס

במובן הנכונ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, ולכן  $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$  מתכנס

למשל, אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$  מתכנס

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \right) = \left( \frac{-2((-2)^n - 1)}{-3} \right)_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \left( \frac{2}{3}(-2)^n - \frac{2}{3} \right)_{n=1}^{\infty}$$

ולכן  $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$  מתכנס, ולכן  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס







(2) (2)  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x}, \bar{y} \in L_2$   $\rightarrow$   $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in L_2$   $\rightarrow$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   $\rightarrow$   $\bar{x}, \bar{y} \in L_2$   $\rightarrow$   $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in L_2$

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in L_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in L_2$   
 $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $\mathbb{R}^W$   $\rightarrow$   $\mathbb{R}^W$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \bar{x}, \bar{y} \in L_2$   $\rightarrow$   $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in L_2$

$\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta y_i)^2 \right)_{n=1}^{\infty}$$

$\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$   $\rightarrow$   $L_2$



התאחדות  
העובדים

ה

התאחדות

העובדים

התאחדות

ה



⊖

הוכחה ישירה → הוכחה ישירה, ע"פ אי-שוויון

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i y_i + \beta^2 y_i^2)$$

הוכחה ישירה  $a, b \in \mathbb{R}$   $a \geq b$   $a > b$   $a < b$  (3)

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 \Rightarrow$$

⊖

הוכחה ישירה → הוכחה ישירה, ע"מ פשוט

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i y_i + \beta^2 y_i^2)$$

הוכחה ישירה  $a, b \in \mathbb{R}$  פשוט הוכחה ישירה (3)

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab \leq 2|a| \cdot |b| \leq a^2 + b^2 \Rightarrow$$

⊖

הוכחה ישירה → הוכחה ישירה, ע"מ פשוט

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i y_i + \beta^2 y_i^2)$$

הוכחה ישירה  $a, b \in \mathbb{R}$  פשוט הוכחה ישירה (3)

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab \leq 2|a| \cdot |b| \leq a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + a^2 + b^2 + b^2 =$$

⊖

⊖

הוכחה ישירה → הוכחה ישירה, ע"מ פשוט

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i y_i + \beta^2 y_i^2)$$

הוכחה ישירה  $a, b \in \mathbb{R}$  פשוט הוכחה ישירה (3)

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab \leq 2|a| \cdot |b| \leq a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = \\ &= 2a^2 + 2b^2 \end{aligned}$$

⊖

$$V_{\text{new}} = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 \stackrel{\text{Binomial Expansion}}{=} \sum_{i=1}^n (2\alpha^2 x_i^2 + 2\beta^2 y_i^2) \quad (3)$$

$$= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\beta^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (4)$$



$$\begin{aligned}
 V_{NEW} &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 \stackrel{\text{Binomial}}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i y_i + \beta^2 y_i^2) \stackrel{\text{Linearity}}{=} \\
 &= \alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\alpha\beta \sum_{i=1}^n x_i y_i + \beta^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad \begin{matrix} \downarrow \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ L \in \mathbb{R} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

PLAN (4)

(3)

$$\begin{aligned}
 V_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 &\stackrel{(3)}{\leq} \sum_{i=1}^n (2\alpha^2 x_i^2 + 2\beta^2 y_i^2) = \\
 &= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\beta^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\left( \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2 \right)_{n=1}^{\infty}$  ist eine Folge

כא

ה

ממש

עצמו

מכאן

ש

(4)

ה

, ו

$$\sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)^2$$

ה

ה

ה

(5)

(5)  $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta y_i)^2 < \infty$  עבור  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)^2 < \infty$  עבור  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(3)  $(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) \in L_2$  עבור  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ב) (5) מניין לסיכור  $\left( \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta y_i)^2 \right)^{\infty}$  עולה, נקבע

א) (4) שיהא מניין  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)^2 < \infty$  עולה ממש גם כן

ג) (6) מניין  $(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) \in L_2$  וכן

ד) (7) מניין  $(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) \in L_2$  וכן

הנורמה הבטוחה:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\| : L_2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\vec{x}\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

הנורמה נעדרת אילו

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\| : L_1 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\vec{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \end{array} \right.$$

הזכרה:  
בגורמים  $L_1, L_2$



הכנסת הנורמלי:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\| : L_2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\vec{x}\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2} \end{array} \right.$$

הכנסת הנורמלי  $L_\infty$  - נעזיר כאן

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\| : L_1 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\vec{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\| : L_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\vec{x}\|_\infty = \sup \{ |x_n| \}_{n=1}^{\infty} \end{array} \right.$$

(פרטים על מרחב הליניאר) - תרגיל

הזכרה:  
במרחבים  $L_1, L_2, L_\infty$



הרציון

הפונקציה

היא

היא

$C[0,1]$  -2

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה

היא



הקצרה:

נסמן

$C[0,1]$  -

או

אלוים

הפונ' הרכיב

הרכיב

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

מסקנה:

האלוים

$C[0,1]$

זם

פעולה

הכפלה

בסקלר

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

זם

פעולה

החיבור

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

מהות

מרחב

וקטורי

הסגור  
הפונקציה

הבאנו מהגורם נוסף -  $C[0,1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \| \cdot \|_{\infty} : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \{f(x)\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \| \cdot \|_1 : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \end{array} \right.$$

הסגור:  
הסגור

הבאות מהווה נורמה - ב  $C[0,1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \| \cdot \|_{\infty} : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \{f(x)\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \| \cdot \|_1 : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \end{array} \right.$$

הנכחה:

תרגיל 18

תלבונית:

עוגים

הכל

בבית

אולם

הספר

כך

שמעתי

התקדתי

סביב

שמתיקן

נקודה

א-א

x

ברזים

שנה 8-7





$r$  ברדיוס  $x$

שווה  $r - \delta$

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(y, x) = r\}$$

נקודה

$x$

הקבוצה

סביב

שמרחקן

$r$

שמעגל

הספר

הנקודה

המרחק

בבית

אולם

מעגל

תלבושת:

עוגים

הכל

כמו

בהתאם,

עלול

למשך

ע"

הקבוצה

$$\{y \in \mathbb{R}^2 : d(y, x) \leq r\}$$

בהתאם,

עיצול

גומא

ע"י

הקבוצה

$$\{y \in \mathbb{R}^2 : d(y, x) \leq r\}$$

כאשר

העיצול

ההווה

או

שם

העיצול

והקבוצה

$$\{y \in \mathbb{R}^2 : d(y, x) < r\}$$

ההווה

או

פנים

העיצול.

עקב

כי

קוראים

עיצול

פתוח

ולסתמים

אלוה

ב-

$$B_r(x)$$

סיגיה  
גסנויים  
בעיאל  
עניקיה  
כעויה

סענה:  
יניו  $x \in \mathbb{R}^2$  ו-  $r \in \mathbb{R}$ ,  $0 < r$   
תהי  $a \in B_r(x)$ , אלני ניניו  
גופל כולו  $B_r(x)$ .



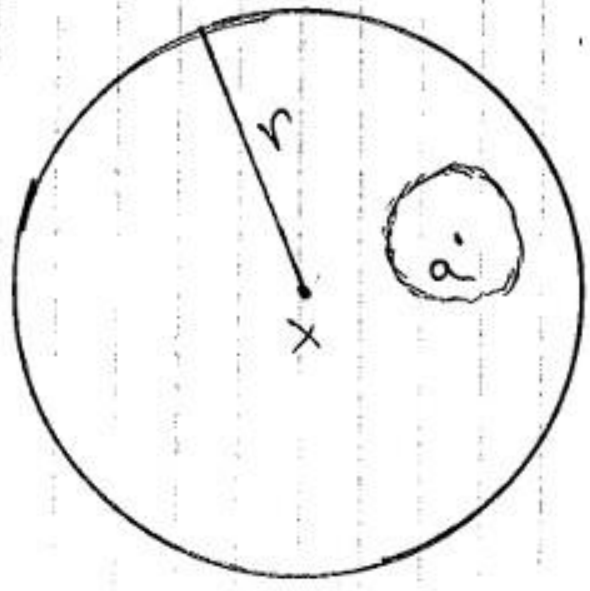
טענה:

י"א  $x \in \mathbb{R}^2$  ו-  $0 < r \in \mathbb{R}$

ת"י  $a \in B_r(x)$  , כל  $a \in B_r(x)$  נ"א  
נאכל כולו  $\rightarrow B_r(x)$

להקפה בעיטל אסויים טיגיה  
כלומר

$\exists \varepsilon_0 > 0 : B_{\varepsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$



$$d(a, x) < r$$

יש/א

$$a \in B_r(x)$$

① יהי

הוכחה:

הוכחה:  
① יהי  $a \in B_r(x)$  , כל  
②  $\epsilon_0 = r - d(a, x)$  , כל  
- כל  $a$  ,  $d(a, x) < r$   
- כל  $a$  ,  $B_{\epsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$

הוכחה:

$d(a, x) < r$  ולכן  $a \in B_r(x)$  יהי (1)

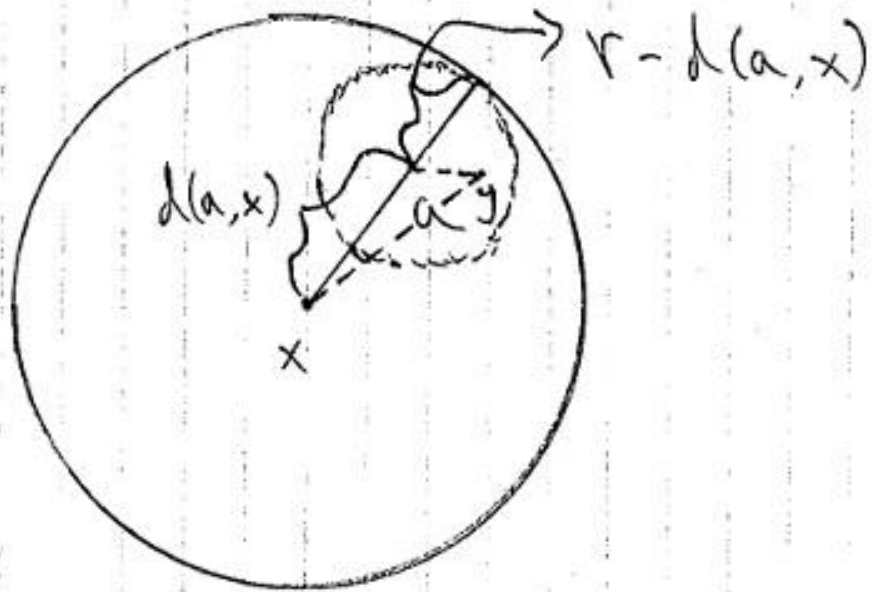
$\therefore B_{\varepsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$  - e נהיה  $\varepsilon_0 = r - d(a, x)$  יהי (2)

וכן  $d(y, a) < r - d(a, x)$  ולכן  $y \in B_{\varepsilon_0}(a)$  יהי

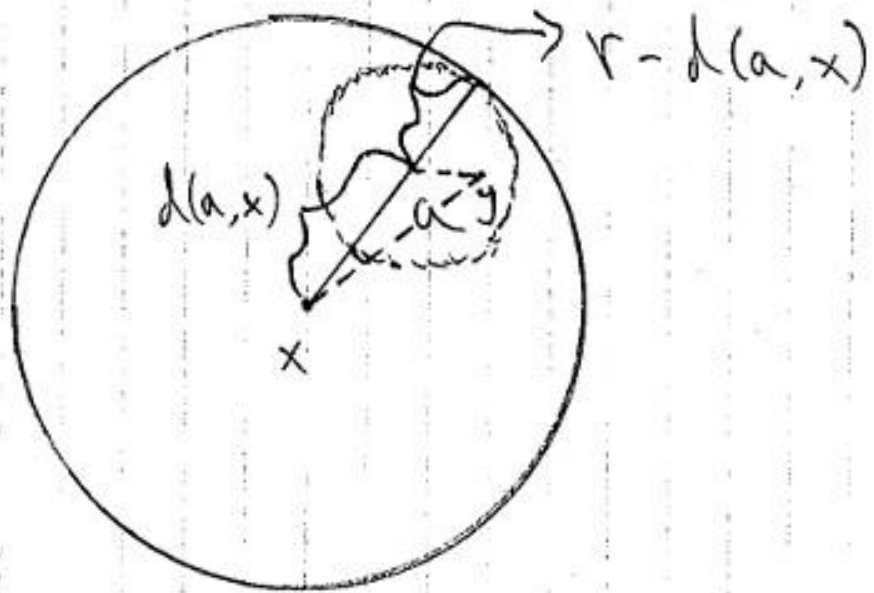
$$d(y, a) + d(a, x) < r$$



$$d(y, a) + d(a, x) < r$$



$$d(y, a) + d(a, x) < r$$



$$d(y, x) \leq d(y, a) + d(a, x) < r \Rightarrow y \in B_r(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{\epsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$$

הצורה:

שימו לב שגם בהקרה הציונית וגם בהוכחה של  
המכונה עצים לא השתמשנו במשקל מכונה  
גאומטרית נאבד תכונות של המרחק  
(השרטוט היה כאלו עתה חסרה).



הצורה:

שימו לב שגם בהזרה הציונות וגם בהוכחה של

המכונה עצים לא השתמשנו בשום מכונה

גאומטרית נעזרנו בכוח של מושג המרחק

(השרטוט היה כולו עומתים).

עכשיו, אם נכפיל את מושג הציונות עם גרמני

שרטוט, נקבל שמתונה לו מתקיים.

הצורה:

שימו לב שגם בהזרה הציגול וגם בהוכחה של

המכונה עצים לא השתמשנו בשום מכונה

גאומטרית נעזרנו במכונה של מושג המרחק

(השרטוט היה כולו עומתים).

לכן, אם נכלים את מושג הציגול עם גרמאטרי

שהוא, נקבל שמכונה זו מתקיים.

כלומר, נגדו. נשים משותף בין כל הגרמאטים

המתקיים.

הוכחה:

יהי  $x$  נקודה נתונה ויהי  $\epsilon > 0$ .  
נבחר  $\delta$  כך שיהיה  $B_\delta(x) \subset B_\epsilon(x)$ .  
אם  $x \in B_\delta(x)$  אז  $d(x, x) = 0 < \delta$  ולכן  $x \in B_\epsilon(x)$ .  
אם  $x \notin B_\delta(x)$  אז  $d(x, x) = 0 \geq \delta$  ולכן  $x \notin B_\epsilon(x)$ .  
לכן  $B_\delta(x) \subset B_\epsilon(x)$ .

$$\begin{cases} d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ d_1(x, y) = \|x - y\|_1 \end{cases}$$

המטריקה

על  $\mathbb{R}^2$

היא

ללא:

שאלה:

נצייר ב- $\mathbb{R}^2$  את המטריקה

$$\begin{cases} d_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ d_1(x, \bar{x}) = \|x - \bar{x}\|_1 \end{cases}$$

האם הכזר הפתוח סביב

המטריקה ב-1 שווה לכזר

ב-1 המטריקה האוקלידית?

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, \bar{x}) < 1\}$$

הוא סביב ברזוס 1 לפי

הפתוח סביב המטריקה ברזוס 1,

כלומר, האם הקבוצה

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, \bar{x}) < 1\}$$

שווה?



שאלה:

נצטרך ב-  $\mathbb{R}^2$  את המטריקה

$$\begin{cases} d_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ d_1(x, y) = \|x - y\|_1 \end{cases}$$

האם הכזר הפתוח סביב

הואש' ברדיוס 1 לפי

המטריקה זו שווה לכזר

הואש' סביב הפתוח ברדיוס 1,

לפי המטריקה האוקלידית?

כלומר, האם הקבוצה

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, 0) < 1\} \quad \text{או} \quad \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$$

משוואה:

קבוצה אלו אינן שוות.

משאבתי:

קבוצתי

הולמתי:

תרגיל 19.

אלו

אין

שלו

משוואה:

קבוצה

אלו

אין

שלו

הוכחה:

תרגיל 9.

מסקנה:

כזו

פתור

יכול

להשתמש

אם

הגזירים

המטריקה

שניה

בהרוב

מטרי

לפי

אם

בהרוב

מטרי

$(a, d, x)$

הגזירים

המטריקה

נוסחה

$d$

ניתן

לסמן

כזו

פתור

סדר

$\alpha \in X$

ברדיוס  $\epsilon$

לפי

המטריקה

$d$

לפי

כך:

$B_\epsilon(a, d)$



שאלה:

יהי

צפ

$(d, x)$

אומה

גרמה

תכונה

גמרי

שם

האם

כרמים

יש

בו

פירותים

קבוצה

טזנו

נוסחה

בה?

שאלה:

יהי  $(d, x)$  גרמה גמטי. האם יש בו קבוצה נוספת  
עם אותו תכונה של כזורים פתוחים סגור בה?

תשובה:

אכן כן. למשל, אם יש בגרמה הגמטי  $x$  שתי  
נקודות  $a$  ו- $b$ , אז כאיחוד של שני כזורים פתוחים  
שהקיים אותן יש את אותו תכונה.

שאלה:

יהי  $(d, x)$  גרמה גמלי. האם יש בו קבוצה נוספת  
עם אותה תכונה של כזורים פתוחים סגור בה?

תשובה:

אכן כן. למשל, אם יש בגרמה הגמלי  $x$  שתי  
נקודות  $a$  ו- $b$ , אז לא ייתור של שני כזורים פתוחים  
שגובלים אותן יש את אותה תכונה.  
אם ליתר דיוק נסתכל יש את אותה תכונה.

הגדרה:

יהי  $(d, x)$  נרמק מטני ומהי  $x \subseteq U$ .  
נאלק  $U$  -  $U$  הינה קבוצה פתומה אמ היט  
לקיילת אמ אמ אורה היכונה של כזורים פתומים  
סגנו בה כפוא נאלק  $U$  פתומה אמ

$$U \subseteq B_{\epsilon_x}(x) : \exists \epsilon_x > 0 \quad \forall x \in U$$

הגדרה:

יהי  $(d, x)$  נרמק למכני ומתה  $x \subseteq U$ .

נאלק  $U$  -  $U$  הנייה קבוצה פתומה אמ התל

לקייה אמ אומה התכונה של כזונים פתומים

סגנו בה כולמ נאלק  $U$  -  $U$  פתומה אמ

$$U \subseteq B_{\epsilon_x}(x) : \exists \epsilon_x > 0 \text{ } \forall x \in U$$

מאוסם  $x$  תקבוצה הפתומה  $B-x$  נקרא האפולוגיה

ל  $x$  וחסיה  $B-T$ .

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \exists \alpha_x : x \in A_{\alpha_x}\}$$

∃ α<sub>x</sub>

→ ∃ α<sub>x</sub> ∩

∩

{A<sub>α</sub>}

α ∈ I

'∩'

: ∩

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \exists \alpha_x : x \in A_{\alpha_x}\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \forall \alpha \in I \quad x \in A_\alpha\}$$

∃ α<sub>x</sub> → ∃ α<sub>x</sub> ∩ ∃ α<sub>x</sub>

{A<sub>α</sub>}<sub>α ∈ I</sub> 'n'

∩ ∪ ∩

: 17/33

∪-קבוצה של קבוצות  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \exists \alpha_x : x \in A_{\alpha_x}\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \forall \alpha \in I \quad x \in A_\alpha\}$$

$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha := \{f : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha : \forall \alpha \in I \quad f(\alpha) \in A_\alpha\}$$



משפט: (מכאן) — עיקריו של קבוצה פתוחה

יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי ויהי  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  קבוצה פתוחה. אז,  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  היא קבוצה פתוחה.   
 (הוכחה: נניח  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ . אז קיים  $\alpha \in I$  כזה ש- $x \in U_\alpha$ . מכיוון ש- $U_\alpha$  פתוחה, קיים  $\epsilon > 0$  כזה ש- $B(x, \epsilon) \subset U_\alpha$ . לכן  $B(x, \epsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ . מכיוון ש- $x$  היה קבוצה פתוחה, נקבל ש- $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  היא קבוצה פתוחה.)

משפט: (מכאן) עיקרון של קבוצות פתוחות

יהי  $(X, d)$  מטרידה ויהי  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  אוסף של

קבוצות פתוחות. אזי, הטענה הבאה מתקיימת:

$\mathcal{Q}$  חיבור של קבוצות פתוחות הן פתוח. כלומר,

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I \quad \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \in \mathcal{I}$$

משפט: (מכאן) עיקריו של קבוצת פתוחות

יהי  $(X, \mathcal{A})$  גרעין נטוי ויהי  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  אוסף של

קבוצות פתוחות. אזי, הטענה הבאה מתקיימת:  
 $\mathcal{A}$  חתום כלפי שם קבוצת פתוחות הן פתוח. כלומר,

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I \quad \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \in \mathcal{A}$$

במיוחד שריבוי של קבוצות פתוחות הן פתוח. כלומר,

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{A}$$



$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \Rightarrow$

יש  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$

הוכחה:  
 $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \exists \varepsilon_i > 0 : B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

הוכחה:  
 $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_i > 0 : B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

$$\text{לכן} \quad \varepsilon_x = \min \{ \varepsilon_i \}_{i=1}^n$$

הוכחה:  
יהיו  $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \forall i, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$$

$$\exists \varepsilon_i > 0 : B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varepsilon_x \leq \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \min \{ \varepsilon_i \}_{i=1}^n \quad \text{conclusion}$$

הוכחה:  
 $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_i > 0 : B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varepsilon_x \leq \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \min \{ \varepsilon_i \}_{i=1}^n \quad \text{con/}$$

$$\Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

הוכחה:  
כל  $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$



$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_i > 0 : B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varepsilon_x \leq \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \min \{ \varepsilon_i \}_{i=1}^n$$

$$\Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

הוכחה:  
יהיו  $(\cdot)$

בה תרונת  $\Rightarrow$

גמטרא:

י"ו (א, א, א)

גמרא

גמרי

גמרי

א

א-א

הי"ו

קבוצה

פתיחה

הנחמה:

תרגיל

אג

תלכוואר:

תרגו

קב' X

X

אמר הניח

$A, B \subseteq X$

אז' :

תזכורת:

תרגי

קב' X

אם הנייה

$$A, B \subseteq X$$

אז:

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$$

(1)



תזכורת:

תרגי קב' X ומהיציג,  $A, B \subseteq X$  . אזי:

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \quad (א)$$

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \quad (ב)$$



תוצאות:

תהי'  $X$  קב' ומהי'  $A, B \subseteq X$  אזי:

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \quad (א)$$

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \quad (ב)$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \quad (ג)$$

תוצאות:

תרגי קב' X ורביזיה A, B  $\subseteq$  X אולי:

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \quad (א)$$

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \quad (ב)$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \quad (ג)$$

הוכחה:

תרגיל ג.ג.



שאלה:  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$

נתון

$X$  קב

שאלה:



:'5)k .  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$      $\Rightarrow$      $X$  '2p

$$x \in \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} (x \in A_\alpha)^c$$

הקבוצה

היא

הקבוצה

:'5)k .  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$      $\Rightarrow$      $X$  '27

$$X \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

$$X \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

הקבוצה

היא

היא

היא

הוכחה:

יהי

קב'  $X$  ויהי  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$  . נ"ל :

$$X \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

ל

$$X \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

ב

הוכחה:

הוכחה

הגדרה: (קבוצה סגורה)

יהי  $(A, x)$

גרמה

נטרי

ומהי

$AX$

מאגר

$A$ -ט

הנ"ל

קב'

סגורה

אך

$A \setminus X$

קב'

פגומה.

הגדרה: קבוצה סגורה

יהי  $(A, x)$

גרמה

נטרי

ויהי  $A \subseteq X$

.

נאמר

$A$ -סגור

היה

קב'

סגורה

אם

$A \setminus X$

קב'

סגורה.

משפט:

$(A, x)$

גרמה

נטרי

ויהי

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$

אוסף

סגורים

של

קבוצות

סגורות

ב- $X$ .

אז:

הגדרה: (קבוצה סגורה)

יהי  $(A, \delta)$  גרמה נטרי ויהי  $X \subseteq A$ .  
נאמר  $X$ -סגורה הן  $X$  קב' סגורה.

משפט:

יהי  $(A, \delta)$  גרמה נטרי ויהי  $\{A_\alpha\}_\alpha$  אוסף סגורות

של קבוצות סגורות  $B_\alpha$ . אז:

האיחוד של סגורות הוא סגורה. הן סגורה.

כמו כן,  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  סגורה.



משפט:

יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי יהי  $\{A_\alpha\}$  סדרה של

סגורים קבוצות סגורות ב- $X$ . אז:

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  סגורה. יהיו סגור

הקבוצה  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  סגורה.



משפט:

יהי  $(A, \alpha)$  למקב למשך יהי  $\{A_\alpha\}$  אוסף סגור

של קבוצות סגורות  $B-A$ . אז:

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  סגורה. יהיו סגור

כלומר הקב'  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$

כל איחוד סופי של קבוצות סגורות יהיו סגור.

כלומר  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  סגורה. יהי  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$  הקב'





משפט:

יהי  $(A, \alpha)$  למקב למשך יהי  $\{A_\alpha\}$  אוסף סגור

של קבוצות סגורות ב- $X$ . אז:

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  סגורה יהיו סגור

כלומר הקב'  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  סגורה

כל איחוד סופי של קבוצות סגורות יהיו סגור.

כלומר  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  סגורה

כל  $x \in X$  יהווה קבוצה סגורה.



בלי איחוד

סופי

סל

קבוצה

סגורה

הינו

סגורה.

כעבור

עכש

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$

הקב'

$\bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$

סגורה.

בלי

x

עצמו

להווה

קבוצה

סגורה.

בלי איחוד

סופי

סל

קבוצה

סגורה

הינו

סגורה.

כעבור

לכל

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$

הקב'

$\bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$

סגורה.

בלי

x

עצמו

להווה

קבוצה

סגורה.

בלי

$\emptyset$

הינו

סגורה.

בלי איחוד

סופי

סל

קבוצה

סגורה

הינו

סגורה.

כעבור

לכל

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$

הקב'

$\bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$

סגורה.

ל

x

עצמו

להווה

קבוצה

סגורה.

ל

$\emptyset$

הנו

סגורה.

תוכחה:

תרגיל

24.

הבאלי :

הטעניו

המקיימו

האוקלדי

המאפיקה

עם

רמ

ב-

הטעניו :



טענה: ב-  $\mathbb{R}^n$  עם המטריקה האוקלידית - המקסימום הטענה - הבאה:

א. יחידות הנין קבוצה סגורה.

ב. לכל  $x \in \mathbb{R}^n$  וכל סדר, הקב'  $\{r \leq d(x, \mathbb{Z}) : r \in \mathbb{R}\}$

היא סגורה. סגורה. (כל) קואסימילר עקביות כל סדר סגור סגור סגור.



הוכחה:  
א) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ב) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ג) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ד) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ה) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ו) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ז) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ח) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
ט) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא  
י) יהי  $\{x\}$  סגורה, יחידון, ב- $\mathbb{R}$ . בטביא







הוכחה:

א) יהי  $\{x\}$  יחידון ב- $\mathbb{R}^n$ . בטבלה  
קב' סימורה, נראה שהקבוצה  $\{x\}$  פתוחה:

יהי  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ , אז  $\bar{y} \neq x$  ולכן  $d(\bar{y}, x) \neq 0$ .

ב) נסמן  $\varepsilon_{\bar{y}} = \frac{1}{2} d(\bar{y}, x)$  ונסה ל- $B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ .



הוכחה:

א) יהי  $\{x\}$  יחידון ב- $\mathbb{R}^n$ . בטבלה בהוכחה ל- $\{x\}$  פתוחה:  
קב' סגורה, נראה שהקבוצה  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$  פתוחה:

יהי  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ , אז  $y \neq x$  ולכן  $d(y, x) \neq 0$ .

ב) נסמן  $\varepsilon_y = \frac{1}{2} d(y, x)$  ונסה ל- $B_{\varepsilon_y}(y) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ :

יהי  $\bar{z} \in B_{\varepsilon_y}(y)$ , אז  $d(\bar{z}, y) < \varepsilon_y$  ולכן:



הוכחה:

(א) יהי  $\{\bar{x}\}$  יחידון ב- $\mathbb{R}^n$ . בטבלה להוכיח ש- $\{\bar{x}\}$  סגור.  
קב' סגורה, נראה, שהקבוצה  $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$  פתוחה:

יהי  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ , אז  $\bar{y} \neq \bar{x}$  ולכן  $d(\bar{y}, \bar{x}) \neq 0$ .

(ב) נסמן  $\varepsilon_{\bar{y}} = \frac{1}{2} d(\bar{y}, \bar{x})$  ונסה ל- $B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ .

יהי  $\bar{z} \in B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y})$ , אז  $d(\bar{z}, \bar{y}) < \varepsilon_{\bar{y}}$  ולכן:

$$d(\bar{z}, \bar{x}) \geq |d(\bar{x}, \bar{y}) - d(\bar{y}, \bar{z})| = |2\varepsilon_{\bar{y}} - d(\bar{y}, \bar{z})| > 0 \Leftrightarrow$$

הוכחה:

(1) יהי  $\{\bar{x}\}$  יחידון ב- $\mathbb{R}^n$ . בטבלה להוכיח ש- $\{\bar{x}\}$  סגור, סדורה, נראה, שהקבוצה  $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$  פתוחה:

יהי  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ , אזי  $\bar{y} \neq \bar{x}$  ולכן  $d(\bar{y}, \bar{x}) \neq 0$ .

(2) נסמן  $\varepsilon_{\bar{y}} = \frac{1}{2} d(\bar{y}, \bar{x})$  ונראה ש- $B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ :

יהי  $\bar{z} \in B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y})$ , אזי  $d(\bar{z}, \bar{y}) < \varepsilon_{\bar{y}}$  ולכן:

$$d(\bar{z}, \bar{x}) \geq |d(\bar{x}, \bar{y}) - d(\bar{y}, \bar{z})| = |2\varepsilon_{\bar{y}} - d(\bar{y}, \bar{z})| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} \neq \bar{x} \Leftrightarrow \bar{z} \notin \{\bar{x}\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$$

:  $B_{\varepsilon_g}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$  - 0 নয়  $\varepsilon_g = \frac{1}{2}d(\bar{y}, \bar{x})$  নয় (2)

: যদি  $d(\bar{z}, \bar{y}) < \varepsilon_g$  'হ'লে,  $\bar{z} \in B_{\varepsilon_g}(\bar{y})$  'হ'

$$d(\bar{z}, \bar{x}) \geq |d(\bar{x}, \bar{y}) - d(\bar{y}, \bar{z})| = |2\varepsilon_g - d(\bar{y}, \bar{z})| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} \neq \bar{x} \Leftrightarrow \bar{z} \notin \{\bar{x}\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$$

$\therefore B_{\varepsilon_g}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$  - 0. 10/11  $\varepsilon_g = \frac{1}{2}d(\bar{y}, \bar{x})$  10/11 (2)

: 10/11  $d(\bar{z}, \bar{y}) < \varepsilon_g$  '3/11',  $\bar{z} \in B_{\varepsilon_g}(\bar{y})$  5/11

$$d(\bar{z}, \bar{x}) \geq |d(\bar{x}, \bar{y}) - d(\bar{y}, \bar{z})| = |2\varepsilon_g - d(\bar{y}, \bar{z})| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} \neq \bar{x} \Leftrightarrow \bar{z} \notin \{\bar{x}\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$$

$$\therefore B_{\varepsilon_g}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\} \quad 10/11$$

$\therefore B_{\varepsilon_g}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$  - כל נקודה  $\varepsilon_g = \frac{1}{2}d(\bar{y}, \bar{x})$  נקודה (2)

: נסו  $d(\bar{z}, \bar{y}) < \varepsilon_g$  כל  $\bar{z} \in B_{\varepsilon_g}(\bar{y})$  נ

$$d(\bar{z}, \bar{x}) \geq |d(\bar{x}, \bar{y}) - d(\bar{y}, \bar{z})| = |2\varepsilon_g - d(\bar{y}, \bar{z})| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} \neq \bar{x} \Leftrightarrow \bar{z} \notin \{\bar{x}\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$$

$$\therefore B_{\varepsilon_g}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\} \quad \text{נסו}$$

כל נקודה (2)



תרגיל אב:

ההלו	שב- ירו	צמ	המלניקה	הדסיסקיט	כל	תמ	קבוצה
התה	קבוצה	פתוחה.					
(ראו: ההלו		שבמלניקה	בו	כל	יה'צון	להלוה	קבוצה פתוחה)

תרגיל אב:

ההלו שג- ירו עם המלניקה הדסיקטי- כל ימ קבוצה

הינה קבוצה פתוחה.

(ראו: ההלו שבמלניקה בו כל יחידון מהווה קבוצה פתוחה)

מסקנה:

פתיחה של קבוצה איננה בהכרח אטומית או פתוחה

בו. כלומר, היא איננה פתוחה או אטומית או פתוחה

במלניקה המוגדרת בו.

הערה:

שימו לב שקבוצה אינה פתוחה אב"מ ים ליבר גסוים  
בה שלם כזר סביבו אינו נאכא בקבוצה. כלאמר:





הערה:

שיהיו  $A$  ו- $B$  קבוצות אינן פתוחות  
 בה  $A$  ו- $B$  סגורות אינן פתוחות  
 אלא  $A$  ו- $B$  פתוחות אינן סגורות  
 כלומר:

קבוצה  $A$  איננה פתוחה אם  
 $\exists x_0 \in A : \forall \epsilon > 0 \exists x \in B_\epsilon(x_0) \setminus A$

תרגיל 27:

(א) נסמן

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$$

של המסלול של האינטגרל, יחד עם התחומים של הצירים.

כאשר  $A$  הוא התחום

הנ"ל המואב"ם הראשון

תרגיל 27:

א) נסמן  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ . כאלו  $A$  הינה הרביע

המשולש של האיכות, יחד עם החלקים החיצוניים.

האנחנו שוקבו  $B_1(\vec{0}) \cap A$  פתוחה.

תרגיל 27:

א) נסמן  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ . כעבור  $A$  הינה הרביע

המלבני של האינטרו, יחד עם החלקים המואב"ם של הצירים.

האפיון המקבוצה  $B_n(\vec{0}) \cap A$  אינה פתוחה.

ב) הנה  $B_n(\vec{0}) \cap A$  אינה סגורה.

מספר : 1000  
מספר : 1000

מספר : 1000

מספר : 1000

מספר : 1000

מספר : 1000

מספר : 1000





סקירה:

תוכן קבוצה סגור בתחום ואליו סגור.

הצגה:  $(M, \sim)$  (מרחב מטרי).

יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי ויהי  $\phi: A \rightarrow X$ .

נסיון  $(A, d|_{A \times A})$  קבול  $\sim$  מרחב מטרי (מרחב מטרי).

סקירה:

כך  $\sim$  מרחב מטרי יחיד מרחב מטרי בעצמו.

מסקנה:

שימו

לב שהקבוצה שהגדרנו

בתחילה

גד

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$$

צפ

הגסיקה

האוקסידי

להווה

תג"ל

של

$\mathbb{R}^2$

מסקנה:

שימו

לב שהקבוצה שהגזרנו

בתחילת

גד

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$$

צפ הגטמיקה האוקלידית - אהווה תג"ל של  $\mathbb{R}^2$

והקבוצה

$$B_\gamma(0) \cap A$$

אהווה

כזור

בתוך

A-ב

מסקנה:

שימו

לב שהקבוצה שהגדרנו

בתחילה, גם

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$$

צ'ם הנטיקה האוקלידית - מהווה תת-חלל של  $\mathbb{R}^2$

והקבוצה  $B_1(\vec{0}) \cap A$  מהווה כזור פתוח ב-A.

וכן - משום ש-

$$B_1(\vec{0}) \cap A = \{\vec{x} \in A : d(\vec{x}, \vec{0}) < 1\}$$

בהקדוּצָה  $B_1(\bar{0}) \cap A$  שֶׁהִיא כְּדוּר פְּתוּחַ ב- $A$ .

לְעֵינֵינוּ

$$B_1(\bar{0}) \cap A = \{x \in A : d(x, \bar{0}) < 1\}$$

נהקבוצה  $B_1(\bar{x}) \cap A$  גתווה כזור פתוח ב-A.

וכן משום ש-

$$B_1(\bar{x}) \cap A = \{x \in A : d(x, \bar{x}) < 1\}$$

עם כן, חשב מאז לעבור לכזור פתוח בהי

מרחב גמרי לא קייב עתה כזור פתוח

בהרחב הגדול יותר. (לפניו עתה קייב עתה)

קבוצה פתוחה בהרחב הגדול יותר.

הצגה :  $(x, d)$  גמב נטרי , יהי  $A \subseteq X$  תה"נ יהי  $x \in A$  -1  $r > 0$ .



הצגה:

יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי, יהי  $A \subseteq X$  תת-קבוצה ויהי  $x \in A$  ו- $r > 0$ .

אז הכתוב הפירוט  $A$ -ב, סביב  $x \in A$ , ברדיוס  $r$  הוא

$$B_r(x, A) := \{a \in A : d(a, x) < r\}$$

ב-

הצגה:

יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי, יהי  $A \subseteq X$  תת-קבוצה ויהי  $x \in A$  ו- $r > 0$ .

אז הכדור הפתוח  $B_r(x, A)$  סביב  $x \in A$  בקוסי  $r$  נטוי

$$B_r(x, A) := \{a \in A : d(a, x) < r\}$$

תרגיל 28:

הכאן טהוקבוצה  $\mathbb{R} \subseteq (\mathbb{R}, d)$  הינה כדור פתוח

בהתאמה המרחב המטרי  $(\mathbb{R}, d)$ .



הצורה:

$Y \subseteq A$	ומהי	$A \subseteq X$	מהי	אשר	$(x, d)$	מהי
$A$ -ב	פונה	הוא	$A$ -ב	פונה	$Y$ -ב	פונה
		כאשר:	אשר:	בפני	הוא	כאשר





תרגיל 30:

יהי  $(M, d)$  מרחב מטרי, ויהי  $A \subseteq M$  קבוצת סגורה, ויהי  $x \in A$ .  
הראו כי:

$$B_r(x, A) = B_r(x) \cap A$$

תגובה

קב' פתוחה.  
פתוחים.

אֶפְסֹס  
כְּבוֹרוֹיִם

אֶפְסֹס  
אֶפְסֹס

גִּוְחָב  
הַיָּרְחָה

(d, x)  
ט

טֶפְסֵי  
יֵה

קב' פתוחה.  
 $X \subseteq U$  כצורות פתוחים.

גומב גטכ' ורת' של אויור הי'ה

$(d, x)$   
 $U$

גשנה:  
יה  
אז'

הוכחה:

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$$

①



$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subset U \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$$

הוכחה:

①

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subset U \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$$

$$\forall x \in U \quad x \in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow$$

הוכחה:

①

②



$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subset U \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$$

$$\forall x \in U \quad x \in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \subset \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$$

הוכחה:

①

②

הוכחה:

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$$

$$\forall x \in U \quad x \in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \subseteq \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$$

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$$

סגור

①

②



משפט:

יהי  $(M, \chi)$

מרחב

מטרי

ויהי

$\chi$

תח"מ.

תהי

$\chi$

אלב

$\chi$

פמוח

$\chi$  - ב

אלמ"מ

קייג

$\chi$

קב

פמוח

$\chi$  - ב

כך

ל -

$\chi = \chi$



משפט:

יהי  $(M, \alpha)$

מרחב

ממדי

ויהי

$\alpha$

תמ"מ.

תהי

$\alpha$

אלו

$\alpha$

פמוח

$\alpha$

אלמ"מ

קיימת

$\alpha$

קב'

פמוח

$\alpha$

כך

$\alpha$

$\alpha = \alpha$

הוכחה:

תרגיל

31.

תרגיל 1.31:

יהי  $(M, d)$  גרעין גאטרני, יהי  $X = \mathbb{R}$  תה"ג ויהי  $\gamma \in \mathbb{R}$ . הוכיחו ש-:

תרגיל 1.31:

יהי  $(d, x)$  גרמב גארי, יהי  $x \in \mathbb{Z}$  תמ"ג ותהי  $\mathbb{Z}_n$ . הוכיחו ש-:  
(א) אם  $\mathbb{Z}_n$  פתומה ב- $\mathbb{Z}$  ו- $\mathbb{Z}$  פתומה ב- $\mathbb{Z}_n$ , אז  $\mathbb{Z}$  פתומה ב- $\mathbb{Z}_n$ .



תרגיל 1.31:

יהי  $(d, x)$  גורם ראשוני, יהי  $x \neq 1$  תהי  $u$  ותהי  $v$  הוכיחו ש-:

(א) אם  $u$  פתוחה ב- $v$  ו- $v$  פתוחה ב- $x$ , אז  $u$  פתוחה ב- $x$ .

(ב) אם  $u$  סגורה ב- $v$  ו- $v$  סגורה ב- $x$ , אז  $u$  סגורה ב- $x$ .

תרגיל 1.31:

יהי  $(A, x)$  גרמב גארי, יהי  $x = Ax$  תה"ג ומהי  $\text{צפ"ט}$ . תוכיחו ש-:

(א) אם  $u$  פתוחה ב- $u$  ו- $u$  פתוחה ב- $x$ , אז  $u$  פתוחה ב- $x$ .

(ב) אם  $u$  סגורה ב- $u$  ו- $u$  סגורה ב- $x$ , אז  $u$  סגורה ב- $x$ .

(תוכיחו ש- $u$  סגורה ב- $u$  אם קיימת  $u$  סגורה

ב- $x$  כך ש- $u = u$ ).

תרגיל 32:

נסמן

וזהה

הגדרה

אל

האלקטרוני

$$\mathbb{Z}^n := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\} \ x_i \in \mathbb{Z} \}$$

כמה

מרחב

ממדי

של

$\mathbb{R}^n$

אם

תרגיל 32:

נסמן

אנליזה

הגאומטריה

הוכיחו

הינה

$$\mathbb{Z}^n := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\} \ x_i \in \mathbb{Z} \}$$

אל

האלקטרוניקה

שב- $\mathbb{Z}^n$

פירושה

כמה

כמה

מרחב

מרחב

מספר

אלקטרוניקה

של

כל

$\mathbb{R}^n$

תה

עם

קב'

$$A \subseteq \mathbb{Z}^n$$

הצורה:

יהי

$(x, d)$

אנחנו

נראה,

יהי

$x \in X$

ואז יהי

$ACX$

תהי

קב'

$\epsilon - x$  שיהיה  $\delta$ .

הצורה:

יהי  $(x, d)$  גורם ראשוני, יהי  $x \in X$  ותהי  $ACX$  תת קב'

$x$  - ש  $x$  שייך  $d$  זה. נאמר  $s-A$  הטל סביבה של  $x$

אלו קייג קבוצה פתוחה  $U$  ב- $X$ , כך  $s-A$   $x \in U \subseteq A$



הצורה:

יהי  $(x, d)$  גרמה מטרי, יהי  $x \in A$  ותהי  $AC \subseteq X$  תת קב'

ש- $x$  שייך אליה. נאמר ש- $A$  הטל סביבה של  $x$

אם קיים קבוצה פתוחה  $U$  ב- $X$ , כך ש- $x \in U \subseteq A$ .

דוגמה:

הקטע החצי פתוח  $[1, 2)$  הינו סביבה של המספר

1.5, והכיוון ש- $B_{\frac{1}{2}}(1.5) \subseteq [1, 2)$ .



הצורה:

יהי  $(x, d)$  גרמה נטרי, יהי  $x \in A$  ותהי  $A \subseteq X$  תת קב'

$x$  - ש-  $x$  שייך  $d$  זה. נאמר ש-  $A$  הטל סביבה של  $x$

אלו קיימת קבוצה פתוחה  $U$  ב-  $X$ , כך ש-  $x \in U \subseteq A$ .

דוגמה:

הקטע החצי פתוח  $(1, 2]$  הינו סביבה של הנספר

$1.5$ , והכיוון  $U = (1, 2] \subseteq B_{\frac{1}{2}}(1.5)$ .

לדוגמה  $U = ]1, 2]$  הקטע  $(1, 2]$  אינו סביבה של הנספר  $1$ ,

והכיוון  $U = ]1, 2]$  קבוצה פתוחה  $U$ , כך ש-  $1 \in U \subseteq (1, 2]$ .





טענה:

יהי  $(d, x)$  ארמב מטרי ויהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , אזי  $A \neq \phi$ , קבוצה  
פירוט אק"מ  $A$  אלוה סביבה לכל איבר בה.

הוכחה:

תרגיל 33.



תרגיל 34:

יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי ויהיו  $x \neq y \in X$ .

הוכיחו שקיים סביבה  $V_x$  של  $x$  וקיים סביבה  $V_y$  של  $y$  כך ש-  
 $V_x \cap V_y = \emptyset$ .

תשובה: (הגדרת המרחב המטרי)

יהי  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ , נלקח סביבה  $\delta$  של  $\bar{a}$  ב- $\mathbb{R}^n$ .

$\exists \epsilon > 0 \mid \exists U \subset V_A : \exists U \in \mathcal{A}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

הוכיח





מסקנה:

נזכור

שהערך

המקסימום

ב-  $\mathbb{R}$  ו

הטרה

הטריקיה

(זה

המטריקיה

בו

קוראים

הטריקיה

אלקטריקיה).

ער

כאן,

נאכל

לנסה

אך

ההגדה

ההבוא

לסדרה

המשוואה

באופן הבא:

$$\begin{cases} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ d(x, y) = |x - y| \end{cases}$$

מסקנה:

נזכור

שיעור

המוקדם

ב-  $\mathbb{R}$

מטרה

מטריקה

$$\begin{cases} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ d(x, y) = |x - y| \end{cases}$$

(זה

מטריקה

בו

קואליט

מטריקה

אלקטרי)

על

כאן

נאלץ

לנסח

את

הגורם

הגבול

לסדרו

למשל

באופן

הבא:

נתון

$\epsilon > 0$

$a \in \mathbb{R}^w$

מתקיים

קיים

$\delta \in \mathbb{R}$

אם

$$|a_n - a| < \delta \Rightarrow d(a_n, a) < \epsilon$$

$$\exists \delta > 0 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \epsilon > 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

מסקנה:

נזכור

שגודל המרחק

המרחק

ב-  $\mathbb{R}$

גודל

המרחק

$$\begin{cases} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ d(x, y) = |x - y| \end{cases}$$

(זה

המרחק

בו

קואורדינטות

המרחק

אלקטרוני)

על

כאן

נראה

לנו

אם

הגודל

המרחק

המרחק

המרחק

באופן

המרחק:

נראה

ש-

$$\bar{a} \in \mathbb{R}^n$$

המרחק

המרחק

המרחק

המרחק

$$d(a_n, a) < \epsilon$$

המרחק

המרחק

המרחק

מסקנה:

לפי

המרחק

המרחק

המרחק

המרחק

המרחק

המרחק

המרחק

הזכרה:

תנוי קבוצה  
האינסופיים

$\chi$   
של

אוסטן  
איברים

ב- $\chi^w$   
ב- $\chi$ .

א

אוסט

של

הסדרה



$\bar{a} = 0$      $\forall \epsilon > 0$

$\bar{a} \in X^w$

$\forall \epsilon > 0$      $\exists \delta > 0$      $\forall x \in X$      $d(x, \bar{a}) < \delta$

$(x, d)$      $\forall \epsilon > 0$

$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : \forall n > n_\epsilon \quad d(a_n, L) < \epsilon$

הגדרה:

הקדמה:

יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי

ממדי  $n$  ויהי  $L \in X$  נקודה

במרחב.  $\bar{a} \in X^w$  ויהי  $\epsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \text{ כזה ש-} \forall x \in X, d(x, L) < \delta \Rightarrow d(x, \bar{a}) < \epsilon$$

כלומר, אם המרחק בין  $x$  ל- $L$  קטן מספיק, אז המרחק בין  $x$  ל- $\bar{a}$  קטן מספיק.

כלומר, אם המרחק בין  $x$  ל- $L$  קטן מספיק, אז המרחק בין  $x$  ל- $\bar{a}$  קטן מספיק.

כלומר, אם המרחק בין  $x$  ל- $L$  קטן מספיק, אז המרחק בין  $x$  ל- $\bar{a}$  קטן מספיק.

כלומר, אם המרחק בין  $x$  ל- $L$  קטן מספיק, אז המרחק בין  $x$  ל- $\bar{a}$  קטן מספיק.

תרגיל 35:

הראו שניתן לנסח את הגדרת הגבול במרחבים מטריים  
בישבה של סביבות. כלומר, אם  $\bar{a}$  היא סדרה  
אנצוסווי - ב -  $(d, x)$ , אז  $\bar{a}$  מתכנסת ל-  $x$   
אם"ם לכל סביבה  $V_x$  של  $x$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך  
שכל  $n > N$ ,  $a_n \in V_x$ .



תרגיל 35:

הראו שניתן לנסח את הגדרת הגבול בגרמנים נטורים  
 בשיטה של סביבות. כלומר, אם  $a$  היא סדרה  
 אינסופית ב-  $(\mathbb{R}, d)$ , אז  $a$  מתכנסת ל-  $L$  אם ורק אם  
 אם "מ" לכל סביבה  $V_L$  של  $L$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך  
 שכל  $n > N$ ,  $a_n \in V_L$ .

תרגיל 36:

הראו שכל פונקציה גרמה נטורי, אם סדרה בו מתכנסת לגבול.  
 אז גבול פה הינו יחיד.  
 רמז: אפשר לקבל רציון גרמניים 34 ו-35.

מסקנה:

בגלל

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

מקרה

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

מקרה

תרגיל 37:

ההלו סטור הוקטורים ב- $\mathbb{R}^3$

$$\left( \begin{array}{c} 1/n \\ 2 \\ n \cdot \sin(1/n) \end{array} \right)_{n=1}^{\infty}$$

גורמים אוקטור

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בגאומטריה האוקטור

האם סדרה זו היא סדרה גורמים בגאומטריה הזיסטית?

תרגיל 39 :

יהי  $(L, d)$  מרחב מטרי, נתון  $\bar{a} \in X^{\omega}$  ויהי  $L \in X$ . תוכיחו  $\bar{a} - \epsilon$

מבני  $L - \delta$  אק"מ סדר  $n$  המספרים הממשיים  $(d(a_n, t))_{n=1}^{\infty}$   $\delta - \epsilon$ .



תרגיל 39 :

יהי  $(L, X)$  מרחב מטרי, תהי  $w \in X$  ויהי  $LEX$ . תוכיחו ש- $\bar{a}$



המרחב  $L$ - $\delta$  אק"ם סגור. המספרים הממשיים  $(d(a_n, L))_{n=1}^{\infty}$  מתכנסים ל- $0$ .

הצגה:

תהי  $X$  קבוצה ויהי  $w \in X$ . נגד  $\bar{a}$  יהי סגור

מרחב מטרי  $L$ - $\delta$  עם  $LEX$

$L = a_n$  :  $a_n < \bar{a}$  :  $a_n \in E$



תרגיל 40:

יהי  $(X, d)$  מטריד דיסקרטי ויהי  $\bar{a} \in X^W$ .  
תוכיחו כי  $\bar{a}$  הוא פתרון ל- $L_{\delta}$  אם ורק אם  $\bar{a}$  הוא פתרון ל- $L_{\delta}$ .

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

מרחב

ר

$$\left( \begin{matrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{matrix} \right)_{n=1}^{\infty}$$

מרחב

$$(x_1, d_1), \dots, (x_k, d_k)$$

מרחב

הצגה

הגדרה:  
יהי

משפטים נתונים,  $(x_1, d_1), \dots, (x_k, d_k)$

$\prod_{i=1}^k x_i$  -  $(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}_{n=1}^{\infty}$

יהי סדרה

$d: \prod_{i=1}^k x_i \times \prod_{i=1}^k x_i \rightarrow \mathbb{R}_+$

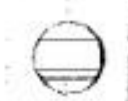
כל משפחה

$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \end{pmatrix} \in \prod_{i=1}^k x_i$

יהי

$d(\vec{x}, \vec{y}) = \left( \sum_{i=1}^k d_i^2(x_i, y_i) \right)^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = L \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, k\} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{ni} = L_i)$



$\forall i \in \{1, \dots, k\}$   $\exists A_i > 0$   $\exists N_i \in \mathbb{N}$   $\forall n > N_i$   $|a_{ni} - L_i| < A_i$

$\forall \epsilon > 0$   $\exists N \in \mathbb{N}$   $\forall n > N$   $\forall i \in \{1, \dots, k\}$   $|a_{ni} - L_i| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \text{d}_i(a_{ni}, L_i) < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow \text{d}_i(a_{ni}, L_i) < \epsilon \Leftrightarrow \text{d}_i(a_{ni}, L_i) < \epsilon$

①  $\Leftrightarrow$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ni} = L_i$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{\epsilon_i} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow d_i^2(a_{ni}, L_i) < \frac{\epsilon_i^2}{k}$$

$$\forall n > N_{\epsilon_i} \quad \exists u < u_{\epsilon_i}$$

$$d_i(a_{ni}, L_i) < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \delta_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{1}$$

forall

Slc,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ni} = L_i$

$i \in \{1, \dots, k\}$

SS Slc (1.1)

Wichtig:

①  $\Leftrightarrow$

$\forall i \in \{1, \dots, k\} \forall \epsilon > 0 \exists N_{\epsilon i} \in \mathbb{N}$

$\forall n > N_{\epsilon i}$

$d_i(a_{ni}, L_i) < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d_i^2(a_{ni}, L_i) < \frac{\epsilon^2}{k}$

- a. für alle  $n_{\epsilon} = \max_{i=1}^k \{N_{\epsilon i}\}$

gilt Slc

Wieder:

①  $\Leftrightarrow$

Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ni} = L_i$   $i \in \{1, \dots, k\}$  gS. (1.1) gS.

$\forall i \in \{1, \dots, k\} \forall \epsilon > 0 \exists N_{\epsilon_i} : \forall n > N_{\epsilon_i} d_i(a_{ni}, L_i) < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d_i^2(a_{ni}, L_i) < \frac{\epsilon^2}{k}$$

Sei  $N_{\epsilon} = \max_{i=1, \dots, k} \{N_{\epsilon_i}\}$  gS. gS.

$$\forall n > N_{\epsilon} \quad d(\bar{a}_n, \bar{L}) = \left( \sum_{i=1}^k d_i^2(a_{ni}, L_i) \right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left( \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( k \cdot \frac{\epsilon^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon$$

$\forall n > n_\varepsilon$

$$d(\bar{a}_n, \bar{L}) = \left( \sum_{i=1}^k d_i^2(a_{ni}, L_i) \right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left( \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

$n_\varepsilon = \max \{n_{\varepsilon_i}\}_{i=1}^k$



$\forall n > n_\varepsilon$   $d(\bar{a}_n, \bar{L}) = \left( \sum_{i=1}^k d_i^2(a_{ni}, L_i) \right)^{1/2} < \varepsilon$  p/s

$$< \left( \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^{1/2} = \left( k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^{1/2} = \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \bar{L}$$

p/s

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon$

b/c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \bar{L}$$

$$d(\bar{a}_n, \bar{L}) < \varepsilon$$

p/c (2.1)

$\Rightarrow$  (2)

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \quad d(\bar{a}_n, \bar{L}) < \varepsilon$  (2.1)

$n \in \mathbb{N}$   $\exists j$   $\exists \delta$   $\exists \delta$  (2.2)

$$d_j(a_{n_j}, L_j) = |d_j(a_{n_j}, L_j)| = \sqrt{d_j^2(a_{n_j}, L_j)} \leq$$

$\Rightarrow$  (2)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \quad d(\bar{a}_n, \bar{L}) < \varepsilon$

$\text{b/c } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \bar{L}$

p/c (2.1)

$\Rightarrow$  (2)

$n \in \mathbb{N}$  b/c  $j$  b/c  $\geq \delta$  p/c (2.2)

$$d_j(a_{n_j}, L_j) = |d_j(a_{n_j}, L_j)| = \sqrt{d_j^2(a_{n_j}, L_j)} \leq$$

$$\leq \left( \sum_{i=1}^k d_i^2(a_{n_i}, L_i) \right)^{\frac{1}{2}} = d(\bar{a}_n, \bar{L})$$



$$d_j(a_{n_j}, L_j) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_j} = L_j$$

$$n > n_\varepsilon \quad \text{für}$$

$$j \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{für}$$

$$j \in \{1, \dots, k\}$$



כל  $n > n_\epsilon$  לכל  $j \in \{1, \dots, k\}$  לכל  $\epsilon > 0$

$\square \quad d_j(a_{n_j}, L_j) < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_j} = L_j$

נסקרו: (מאונג שיטתיות)

ב-  $\mathbb{R}^n$  תת-המרחב הליניארי, האנלייזיס, והתכנסות של חזרה  
 וקטורים, בול, שקלות, הקולורציות של  
 איברי הסדרה.

$$(\tilde{a}_n)_{n=1}^{\infty}$$

הצורה הכללית

הצורה

$$(x_1, d_1), \dots, (x_k, d_k)$$

→

הצורה

הצורה

$$\tilde{L} \in \prod_{i=1}^k x_i$$

הצורה

$$\prod_{i=1}^k x_i$$

→

$(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$  תהי סדרה

למילים,  $(x_1, d_1), \dots, (x_k, d_k)$  אומרים

תרגיל יב' א1

$\bar{L} \in \prod_{i=1}^k x_i$  ויהי  $\prod_{i=1}^k x_i$  ג-

$$d_{\infty}: \prod_{i=1}^k x_i \times \prod_{i=1}^k x_i \rightarrow \mathbb{R}_+$$

הוכיח כי סדרת המספרים הנתונה

$$d_{\infty}(\bar{x}, \bar{y}) = \max \{d_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^k$$

התכנסו - הסדרה  $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$  סקרו  $\bar{\delta} - \delta$   $\delta$  הנתון

הקואורדינטות





התכנסות של סדרה שקורה

תהי  $\infty$  או  $\infty$  .  
הקולקציה

מסוקה:  
ב- $\infty$  , גם  
עומתים

תרגיל 42 :

הרמנו  $L_\infty$  - סדרה, תהי  $\| \cdot \|_\infty$  הנורמה המקסימלית, סדרה

הרמנו  $L_\infty$  - סדרה, תהי  $\| \cdot \|_\infty$  הנורמה המקסימלית, סדרה  
 $\tilde{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in L_\infty$  ,  $L_k$  ,  $\tilde{L}$  - סדרה

סדרה  $(a_{kn})_{n=1}^\infty$  קואורדינטות - סדרה  $(a_{kn})_{n=1}^\infty$  קואורדינטות - סדרה

פרק 2:

ב) הבה  $L_\infty$  - סדרה חזרה חזרה, הנורמה  $\| \cdot \|_\infty$  - אם סדרה

אם  $\bar{a}_n = \left( \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \end{pmatrix} \right)_{n=1}^\infty$  - גבול  $\delta$  -  $\tilde{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in L_\infty$  , אם

כל סדרה קואורדינטה  $(a_{kn})_{n=1}^\infty$  גבול  $\delta - L_k$

ב) (i) הבה שהסדרה

$\left( a_{kn} = \begin{cases} 0 & k \leq n \\ 1 & k > n \end{cases} \right)_{k=1}^\infty_{n=1}^\infty$  נמצא  $L_\infty$  -

פרקים 2:

(א) הכול טכניקה,  $L_\infty$  הנוכח,  $\|\cdot\|_\infty$  אף סדרה

אם  $\bar{a}_n = \left( \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \end{pmatrix} \right)_{n=1}^\infty$  גבול  $\delta$  -  $\bar{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in L_\infty$  אם

כל סדרה קונורגנטית  $(a_{kn})_{n=1}^\infty$  גבול  $\delta - L_k$

(i) הכול שחסרה

$L_\infty$  גבול  $\left( \begin{pmatrix} a_{kn} = \begin{cases} 0 & k \leq n \\ 1 & k > n \end{cases} \end{pmatrix} \right)_{n=1}^\infty$  נמצא

(ii) הכול טכניקה  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn} = 0$$

פרקים 2 א:

(א) תהא  $L_\infty$  סב-  $L_\infty$  תהא תורה הורה  $\| \cdot \|_\infty$  אל סדרה

אל  $\bar{a}_n = \left( \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \end{pmatrix} \right)_{n=1}^\infty$  גבס  $\delta$   $\bar{L} = \left( \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \in L_\infty$  אל

ס סדרה קארניס  $(a_{kn})_{n=1}^\infty$  גבס  $\delta - L_k$

(ב) (i) תהא שסדרה  $\left( \begin{pmatrix} a_{kn} = \begin{cases} 0 & k \leq n \\ 1 & k > n \end{cases} \end{pmatrix} \right)_{n=1}^\infty$  גבס  $L_\infty$

(ii) תהא שס  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn} = 0 \quad k \in \mathbb{N}$

(iii) תהא שסדרה  $\| \cdot \|_\infty$  אל גבס  $\| \cdot \|_\infty$