טופולוגיה – תרגול 2

מרחבים מטריים, סדרות במרחבים מטריים

הגדרה:

את אוסף כל הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הממשיות נסמן

ב- $\mathbb{R}^{\omega}$

הגדרה:

את אוסף כל הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הממשיות נסמן

ב- $\mathbb{R}^{\omega}$

הגדרה:

$$L_1 := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^{\omega} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \}$$

הגדרה:

את אוסף כל הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הממשיות נסמן

ב- $\mathbb{R}^{\omega}$

הגדרה:

$$L_1 := \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^{\omega} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

$$L_2 := \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^{\omega} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

הגדרה:

את אוסף כל הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הממשיות נסמן

ב- $\mathbb{R}^{\omega}$

הגדרה:

$$L_1 := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{\omega} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$$

$$L_2 := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{\omega} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$

$$L_{\infty} := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{\omega} : \sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} < \infty\}$$

דוגמא:

$\mathbb{R}^{\omega}$ עם הפעולות $\alpha\cdot(a_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$

ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} := (a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$

$\mathbb{R}^{\omega}$ מהווה מרחב וקטורי.

טענה:

א) עם הפעולות $\alpha\cdot(a_n)_{n=1}^{\infty}:=(\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$

ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}+(b_n)_{n=1}^{\infty}:=(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מהווה מרחב וקטורי.

ב) L_1, L_2 ו- L_∞ מהווים תתי מרחב לינאריי של $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

טענה:

א) עם הפעולות $\alpha\cdot(a_n)_{n=1}^{\infty}:=(\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$

ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}+(b_n)_{n=1}^{\infty}:=(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$

$\mathbb{R}^{\omega}$ מהווה מרחב וקטורי.

ב) L_1, L_2 ו- L_∞ מהווים תתי מרחב לינאריים של $\mathbb{R}^{\omega}$.

ג) $L_1\subseteq L_2\subseteq L_\infty$

הוכחה:

א) תרגיל 15

הוכחה:

א) תרגיל 15

ב) אנו נראה ש-l_2 הינו תמ"ו של $\mathbb{R}^\omega$.
לגבי l_1 ו-l_∞, נשאיר כאן כתרגיל 16.

הוכחה:

א) תרגיל 15

ב) אנו נראה ש-L_2 הינו תמ"ו של $\mathbb{R}^\omega$.
לגבי L_1 ו-L_∞, נשאיר זאת כתרגיל 16.

(1) ראשית נדגיש שהסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הינו סימון
של הגבול של הסדרה $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n=1}^{\infty}$. כלומר,

הוכחה:

א) תרגיל 15

ב) אנו נראה ש-ℓ_2 הינו תמ"ו של $\mathbb{R}^{\omega}$.

לגבי ℓ_1 ו-ℓ_∞, נשאיר זאת כתרגיל 16.

(1) ראשית נדגיש שהסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הינו סימון של הגבול של הסדרה $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n=1}^{\infty}$. כלומר,

אם לא ידוע שסדרת הסכום מתכנסת לגבול במובן הרחב, לסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אין משמעות.

אם לא ידוע שסדרת הסכום מתכנסת לפחות
במובן הרחב, לסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אין משמעות.

אם לא ידוע שסדרת הסכום מתכנסת לפחות במובן הרחב, לסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אין משמעות.

למשל, אם $\bar{a} = ((-2)^n)_{n=1}^{\infty}$, אז סדרת הסכום הינה

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (-2)^i\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{-2((-2)^n - 1)}{-3}\right)_{n=1}^{\infty} =$$

אם לא ידוע שסדרת הסכום מתכנסת לפחות במובן הרחב, לסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אין משמעות.

למשל, אם $\bar{a} = ((-2)^n)_{n=1}^{\infty}$, אז סדרת הסכום הינה

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (-2)^i\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{-2((-2)^n - 1)}{-3}\right)_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{2}{3}\right)_{n=1}^{\infty}$$

ולסדרה זו אין אפילו גבול במובן הרחב.

ב) 2 כעת, כפי שלמדנו באלגברה לינארית, אם נראה ש-

$$\forall \bar{x},\bar{y}\in L_2 \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad \alpha\bar{x}+\beta\bar{y}\in L_2$$

נראה ש-L_2 תת מרחב של $\mathbb{R}^W$.

ב) (ב) כעת, כפי שלמדנו באלגברה לינארית, אם נראה ש-

$$\forall \bar{x},\bar{y}\in L_2 \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad \alpha\bar{x}+\beta\bar{y}\in L_2$$

נראה ש-L_2 תת מרחב של $\mathbb{R}^{\omega}$.

יהיו $\bar{x},\bar{y}\in L_2$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

אם נראה שלסדרת הסכום

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2\right)_{n=1}^{\infty}$$

יש גבול ממשי, נוכיח את הטענה לעיל.

יש גבול ממשי, נוכיח את הטענה לעיל.

יש גבול ממשי, נוכיח את הטענה לעיל.

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha^2x_i^2+2\alpha\beta x_iy_i+\beta^2y_i^2)$$

יש גבול ממשי, נוכיח את הטענה לעיל.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^2x_i^2+2\alpha\beta x_iy_i+\beta^2y_i^2\right)$$

(3) כדאי לזכור שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$0\le(|a|-|b|)^2=a^2-2|a||b|+b^2 \Rightarrow$$

יש גבול ממשי, נניח א, הטענה לעיל.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha^2x_i^2+2\alpha\beta x_iy_i+\beta^2y_i^2)$$

3 כדאי לזכור שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$0\le(|a|-|b|)^2=a^2-2|a||b|+b^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab\le 2|a|\cdot|b|\le a^2+b^2\Rightarrow$$

יש גבול ממשי, נוכיח את הטענה לעיל.

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^2 x_i^2+2\alpha\beta x_i y_i+\beta^2 y_i^2\right)$$

(3) כדאי לזכור שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$0\le(|a|-|b|)^2=a^2-2|a||b|+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab\le 2|a|\cdot|b|\le a^2+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2=a^2+2ab+b^2\le a^2+a^2+b^2+b^2=$$

יש גבול ממשי, נוכיח את הטענה לעיל.

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha^2x_i^2+2\alpha\beta x_iy_i+\beta^2y_i^2)$$

(3) כדאי לזכור שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$0\le(|a|-|b|)^2=a^2-2|a||b|+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab\le 2|a|\cdot|b|\le a^2+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2=a^2+2ab+b^2\le a^2+a^2+b^2+b^2=$$

$$=2a^2+2b^2$$

4 מתוך 3 ניתן להסיק ש-

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left(2\alpha^2 x_i^2 + 2\beta^2 y_i^2\right) =$$

4 מתוך 3 ניתן להסיק ש-

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left(2\alpha^2 x_i^2+2\beta^2 y_i^2\right) =$$

$$= 2\alpha^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2\beta^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} L\in\mathbb{R}$$

(4) מתוך (3) ניתן להסיק ש-

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (2\alpha^2 x_i^2 + 2\beta^2 y_i^2) =$$

$$= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\beta^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in \mathbb{R}$$

לכן סדרת הסכום $\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i)^2\right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

ב) (5) מכיוון שהסדרה $\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2\right)_{n=1}^{\infty}$ עולה , נקבל

לפי (4) שהיא מתכנסת לגבול ממשי גם כן,

ב) (5) מכיוון שהסדרה $\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2\right)_{n=1}^{\infty}$ עולה, נקבל

לפי (4) שהיא מתכנס לגבול ממשי גם כן

לכן $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)^2<\infty$ ולכן $(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\in L_2$.

ב) (5) מכיוון שהסדרה $\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)^2\right)_{n=1}^{\infty}$ עולה, נקבל

לפי (4) שהיא מתכנסת לגבול ממשי גם כן

לכן $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)^2<\infty$ ולכן $(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\in L_2$.

ג) תרגיל 17 (לעשות חזרה על חדו"א ב')

הגדרה:

במרחבים L_1 , L_2 ו- L_∞ נגדיר את הנורמות הבאות:

$$\begin{cases} \| \ \|_1 : L_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\bar{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \end{cases} , \quad \begin{cases} \| \ \| : L_2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\bar{x}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \end{cases} ,$$

הגדרה:

במרחבים L_1 , L_2 ו- L_∞ נגדיר את הפונ' הבאות:

$$\begin{cases} \| \ \|_1 : L_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\bar{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \end{cases} , \quad \begin{cases} \| \ \| : L_2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\bar{x}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} \| \ \|_\infty : L_\infty \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \|\bar{x}\|_\infty = \sup\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty} \end{cases}$$

(נשים לב שהן מוגדרות היטב)

הגדרה:

נסמן ב- $C[0,1]$ את אוסף הפונ' הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

הגדרה:

נסמן ב- $C[0,1]$ את אוסף הפונ' הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

מסקנה:

האוסף $C[0,1]$ עם פעולת הכפל בסקלר $(\alpha f)(x):=\alpha f(x)$

ועם פעולת החיבור $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$,

מהווה מרחב וקטורי.

דוגמה:

הפונ' הבאות מהוות נורמה ב- $C[0,1]$:

$$\begin{cases} \|\ \|_1 : C[0,1] \to \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \end{cases} , \quad \begin{cases} \|\ \|_\infty : C[0,1] \to \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_\infty = \max\{f(x)\}_{x\in[0,1]} \end{cases}$$

טענה:

הפונ' הבאות מהוות נורמה ב- $C[0,1]$:

$$\begin{cases} \|\ \|_1 : C[0,1] \to \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \end{cases} , \quad \begin{cases} \|\ \|_\infty : C[0,1] \to \mathbb{R}_+ \\ \|f\|_\infty = \max\{f(x)\}_{x\in[0,1]} \end{cases}$$

הוכחה:

תרגיל 18.

תזכורת:

לומדים בבית הספר שמעגל סביב נקודה x ברדיוס r הוא אוסף כל הנקודות שמרחקן מ-x שווה ל-r.

תזכורת:

לומדים בבית הספר שמעגל סביב נקודה x ברדיוס r הוא אוסף כל הנקודות שמרחקן מ-x שווה ל-r.

כלומר מעגל זה מתואר ע"י הקבוצה

$$S_r(x) := \{ y \in \mathbb{R}^2 : d(y,x) = r \}$$

בהתאם, עיגול מתואר ע"י הקבוצה

$\{y\in\mathbb{R}^2 : d(y,x)\le r\}$

בהתאם, עיגול מתואר ע"י הקבוצה

$$\{y \in \mathbb{R}^2 : d(y,x) \leq r\}$$

כאשר המעגל מהווה את שפת העיגול

והקבוצה $\{y \in \mathbb{R}^2 : d(y,x) < r\}$ מהווה את פנים

העיגול. לקב' זו קוראים עיגול פתוח ומסמנים

אותה ב- $B_r(x)$.

טענה:

יהיו $x\in\mathbb{R}^2$ ו- $0<r\in\mathbb{R}$.

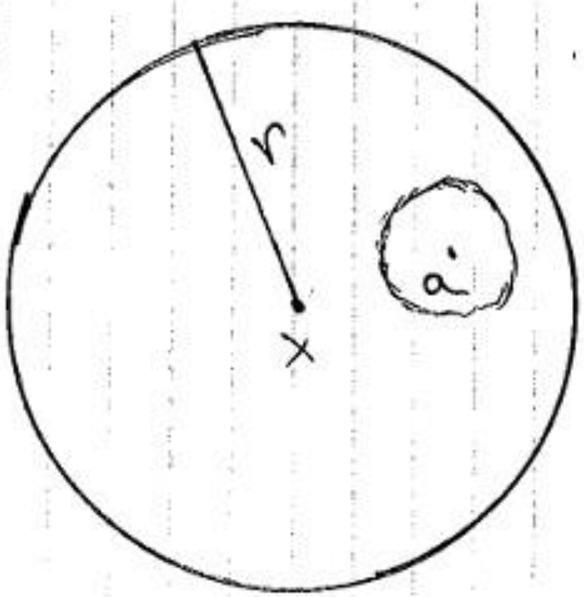
תהי $a\in B_r(x)$, אזי ניתן להקיף בעיגול מספיק שיהיה מוכל כולו ב- $B_r(x)$. כלומר,

טענה:

יהיו $x \in \mathbb{R}^2$ ו- $0 < r \in \mathbb{R}$.

תהי $a \in B_r(x)$, אזי ניתן להקיף בעיגול מספיק שיהיה מוכל כולו ב- $B_r(x)$. כלומר,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : B_{\varepsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$$



הוכחה:

(1) יהי $a \in B_r(x)$, אזי $d(a,x) < r$.

הוכחה:

① יהי $a\in B_r(x)$, אזי $d(a,x)<r$.

② נסמן $\varepsilon_0 = r - d(a,x)$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_0}(a)\subseteq B_r(x)$:

הוכחה:

① יהי $a \in B_r(x)$, אזי $r > d(a,x)$.

② נסמן $\varepsilon_0 = r - d(a,x)$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$:

יהי $y \in B_{\varepsilon_0}(a)$, אזי $d(y,a) < r - d(a,x)$ ולכן,

$d(y,a) + d(a,x) < r$

הוכחה:

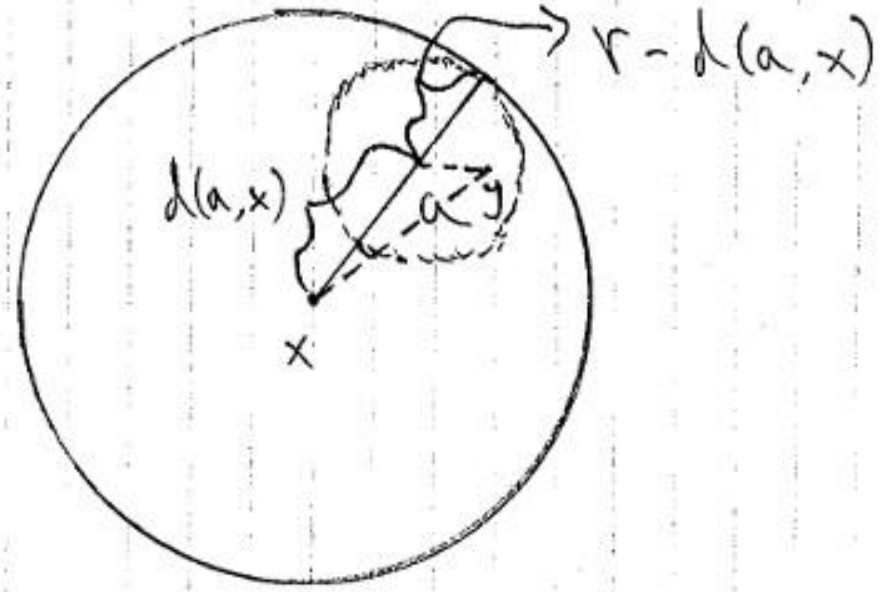
① יהי $a \in B_r(x)$, אזי $d(a,x) < r$.

② נסמן $\varepsilon_0 = r - d(a,x)$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$:

יהי $y \in B_{\varepsilon_0}(a)$, אזי $d(y,a) < r - d(a,x)$ ולכן,

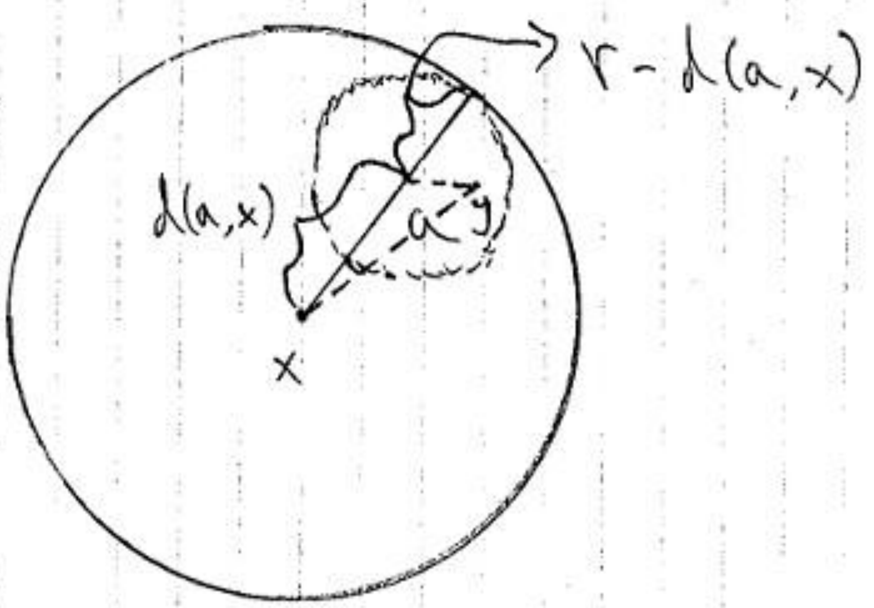
$$d(y,a) + d(a,x) < r$$

$$\Downarrow$$



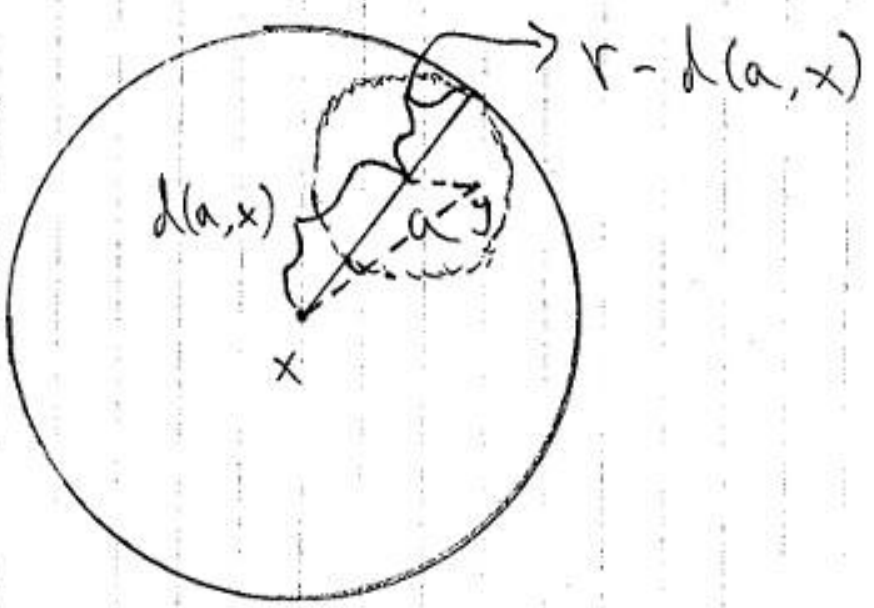
$d(y,a) + d(a,x) < r$

$$\Downarrow$$



$d(y,a) + d(a,x) < r$

$\Downarrow$



$d(y,x) \leq d(y,a) + d(a,x) < r \Rightarrow y \in B_r(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow B_{\varepsilon_0}(a) \subseteq B_r(x)$

הערה:
שימו לב שגם בהגדרת העיגול וגם בהוכחה של
התכונה לעיל לא השתמשנו בשום תכונה
גאומטרית מלבד תכונות של מושג המרחק.
(השרטוט היה כאן להמחשה).

הערה:

שימו לב שגם בהגדרת העיגול וגם בהוכחה של התכונה לעיל לא השתמשנו בשום תכונה גאומטרית מלבד תכונות של מושג המרחק. (השרטוט היה כאן להמחשה).

לכן, אם נכליל את מושג העיגול לכל מרחב מטרי שהוא, נקבל שתכונה זו תתקיים.

הערה:

שימו לב שגם בהגדרת העיגול וגם בהוכחה של
התכונה לעיל לא השתמשנו בשום תכונה
גאומטרית מלבד תכונות של מושג המרחק.
(השרטוט היה כאן להמחשה).
לכן, אם נכליל את מושג העיגול לכל מרחב מטרי
שהוא, נקבל שתכונה זו תתקיים.
כלומר, מצאנו משהו משותף בין כל המרחבים
המטריים.

הגדרה:

יהי מרחב מטרי (X,d), יהי $a\in X$ ויהי $\varepsilon>0$.

לקבוצה $\{y\in X : d(y,a)<\varepsilon\}$ נקרא כדור פתוח סביב a ברדיוס ε ונסמנה ב- $B_\varepsilon(a)$.

שאלה:

נגדיר ב- $\mathbb{R}^2$ את המטריקה

$$\begin{cases} d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ d_1(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_1 \end{cases}$$

שאלה:

נגדיר ב- $\mathbb{R}^2$ את המטריקה
$$\begin{cases} d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ d_1(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|_1 \end{cases}$$

האם הכדור הפתוח סביב הראשית ברדיוס 1 לפי מטריקה זו שווה לכדור הפתוח סביב הראשית ברדיוס 1, לפי המטריקה האוקלידית? כלומר, האם הקבוצות $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 : d_1(\bar{x},\bar{0})<1\}$ ו- $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 : d(\bar{x},\bar{0})<1\}$ שוות?

שאלה:

נגדיר ב- $\mathbb{R}^2$ את המטריקה $\begin{cases} d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ d_1(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|_1 \end{cases}$

האם הכדור הפתוח סביב הראשית ברדיוס 1 לפי מטריקה זו שווה לכדור הפתוח סביב הראשית ברדיוס 1, לפי המטריקה האוקלידית? כלומר, האם הקבוצות $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 : d_1(\bar{x},\bar{0})<1\}$ ו- $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 : d(\bar{x},\bar{0})<1\}$ שוות?

תשובה:

קבוצות אלו אינן שוות.

תשובה:

קבוצות אלו אינן שוות.

הוכחה:

תרגיל 19.

תשובה:

קבוצות אלו אינן שוות.

הערה:

תרגיל פז.

מסקנה:

כדור פתוח יכול להשתנות אם מגדירים מטריקה שונה במרחב מטרי. לכן, אם במרחב מטרי (X, d_1) מגדירים מטריקה נוספת d_2, נהוג לסמן כדור פתוח סביב $a \in X$ ברדיוס ε לפי מטריקה d_1 למשל, כך: $B_\varepsilon(a, d_1)$.

שאלה:

יהי (X,d) מרחב מטרי. האם יש בו קבוצות נוספות עם אותה תכונה של כדורים פתוחים שדנו בה?

שאלה:

יהי (X,d) מרחב מטרי. האם יש בו קבוצות נוספות
עם אותה תכונה של כדורים פתוחים שדנו בה?

תשובה:

אכן כן. למשל, אם יש במרחב המטרי X שתי
נקודות a ו-b, אז לאיחוד של שני כדורים פתוחים
שמקיפים אותן יש את אותה תכונה.

שאלה:

יהי (x,d) מרחב מטרי. האם יש בו קבוצות נוספות עם אותה תכונה של כדורים פתוחים שדנו בה?

תשובה:

אכן כן. למשל, אם יש במרחב המטרי X שתי נקודות a ו-b, אז לאיחוד של שני כדורים פתוחים שמקיפים אותן יש את אותה תכונה.

וגם לחיתוך שלהם יש את אותה תכונה.

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $U \subseteq X$.
נאמר ש- U הינה קבוצה פתוחה אם היא
מקיימת את אותה התכונה של כדורים פתוחים
שדנו בה. כלומר נאמר ש- U פתוחה אם

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$$

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $U \subseteq X$.
נאמר ש- U הינה קבוצה פתוחה אם היא
מקיימת את אותה התכונה של כדורים פתוחים
שדנו בה. כלומר נאמר ש- U פתוחה אם

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$$

לאוסף כל הקבוצות הפתוחות ב- X נקרא הטופולוגיה
של X ונסמנה ב- T.

תזכורת:

יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות ונגדיר:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \ : \ \exists \alpha_x \ : \ x\in A_{\alpha_x}\}$$

תזכורת:

יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות ונגדיר:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \;:\; \exists \alpha_x \;:\; x\in A_{\alpha_x}\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \;:\; \forall \alpha\in I \quad x\in A_\alpha\}$$

תזכורת:

יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות ונגדיר:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x : \exists \alpha_x : x\in A_{\alpha_x}\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x : \forall \alpha\in I \quad x\in A_\alpha\}$$

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha := \{f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha : \forall \alpha\in I \quad f(\alpha)\in A_\alpha\}$$

משפט: (תכונות עיקריות של קבוצות פתוחות)

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות. אזי, הטענות הבאות מתקיימות:

משפט: (תכונות עיקריות של קבוצות פתוחות)

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של
קבוצות פתוחות. אזי, הטענות הבאות מתקיימות:
א) חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הינו פתוח. כלומר,

$$\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n\in I \qquad \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\in T$$

משפט: (תכונות עיקריות של קבוצות פתוחות)

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות. אזי, הטענות הבאות מתקיימות:

א) חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הינו פתוח. כלומר,

$$\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n\in I \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\in T$$

ב) איחוד שרירותי של קבוצות פתוחות הינו פתוח. כלומר,

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in T$$

הוכחה:

א) יהיו $\alpha_1,\dots\alpha_n\in I$, ונני

$\Leftarrow$ $x\in U_{\alpha_i}$ $\forall x\in\bigcap_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}\ \forall i\in\{1,\dots,n\}$

הוכחה:

א) יהיו $\alpha_1,\ldots\alpha_n \in I$, ואזי

$$\forall x\in\bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \quad \forall i\in\{1,\ldots,n\} \quad x\in U_{\alpha_i} \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_i>0 : \quad B_{\varepsilon_i}(x)\subseteq U_{\alpha_i}$$

הוכחה:

א) יהיו $\alpha_1, \dots \alpha_n \in I$, אזי

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \quad \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_i > 0 \ : \ B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

נסמן $\varepsilon_x = \min \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$. אזי,

הוכחה:

ב) יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$, אזי

$$\Rightarrow \quad x\in U_{\alpha_i} \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}\ \forall x\in\bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

$$\exists \varepsilon_i>0 \ : \ B_{\varepsilon_i}(x)\subseteq U_{\alpha_i}$$

נסמן $\varepsilon_x=\min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$. אזי,

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_x\le\varepsilon_i \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

הוכחה:

א) יהיו $\alpha_1, \dots \alpha_n \in I$, אזי

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \; \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_i > 0 \; : \; B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

נסמן $\varepsilon_x = \min \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$. אזי,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varepsilon_x \leq \varepsilon_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i} \Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

הוכחה:

א) יהיו $\alpha_1, \dots \alpha_n \in I$, אזי

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \; \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in U_{\alpha_i} \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_i > 0 \; : \; B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i}$$

נסמן $\varepsilon_x = \min \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$. אזי,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varepsilon_x \leq \varepsilon_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_{\alpha_i} \Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

ב) תרגיל בס.

משפט:

יהי (X,δ) מרחב מטרי, אזי X ו- $\emptyset$ הינן קבוצות פתוחות.

הוכחה:

תרגיל 21.

תזכורת:

תהי קב' X ותהינה $A,B \subseteq X$. אזי:

תזכורת:

תהי קב' X ותהיינה $A,B \subseteq X$. אזי:

א) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

תזכורת:

תהי קב' X ותהיה $A,B\subseteq X$. אזי:

א) $A\setminus B = A\cap(X\setminus B)$

ב) $X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$

תזכורת:

תהי קב' X ותהיינה $A,B \subseteq X$. אזי:

א) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

ב) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

ג) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

תזכורת:

תהי קב' X ותהיינה $A,B \subseteq X$. אזי:

א) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

ב) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

ג) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

הוכחה:

תרגיל בב.

מסקנה:

תהי קב' X ותהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq P(X)$. אזי:

מסקנה:

תהי קב' X ותהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq P(X)$. אזי:

(1 $X\setminus\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)$

מסקנה:

תהי קב' X ותהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq P(X)$. אזי:

א) $X\setminus\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)$

ב) $X\setminus\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)$

מסקנה:

תהי קב' X ותהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq P(X)$. אזי:

א) $X\setminus\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)$

ב) $X\setminus\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)$

הוכחה:

תרגיל 23.

הגדרה: (קבוצה סגורה)

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$.

נאמר ש-A הינה קב' סגורה אם $X \setminus A$ קב' פתוחה.

הגדרה: (קבוצה סגורה)

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$.

נאמר ש-A הינה קב' סגורה אם $X \setminus A$ קב' פתוחה.

משפט:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף שרירותי

של קבוצות סגורות ב-X. אזי:

הגדרה: (קבוצה סגורה)

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$.
נאמר ש-A הינה קב' סגורה אם $X \setminus A$ קב' פתוחה.

משפט:
יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף שרירותי
של קבוצות סגורות ב-X. אזי:
א) חיתוך שרירותי של קבוצות סגורות הינו סגור.
כלומר הקב' $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ סגורה.

משפט:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף שרירותי

של קבוצות סגורות ב-X. אזי:

א) חיתוך שרירותי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר הקב' $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ סגורה.

משפט:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף שרירותי

של קבוצות סגורות ב-X. אזי:

א) חיתוך שרירותי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר הקב' $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ סגורה.

ב) איחוד סופי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר, לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ הקב' $\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$ סגורה.

משפט:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף שרירותי

של קבוצות סגורות ב-X. אזי:

א) חיתוך שרירותי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר הקב' $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ סגורה.

ב) איחוד סופי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר, לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ הקב' $\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$ סגורה.

ג) X עצמו מהווה קבוצה סגורה.

ב) איחוד סופי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר, לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in I$ הקב' $\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$ סגורה.

ג) X עצמו מהווה קבוצה סגורה.

ב) איחוד סופי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר, לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in I$ הקב' $\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$ סגורה.

ג) X עצמו מהווה קבוצה סגורה.

ד) ϕ הינה סגורה.

ב) איחוד סופי של קבוצות סגורות הינו סגור.

כלומר. לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in I$ הקב' $\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$ סגורה.

ג) X עצמו מהווה קבוצה סגורה.

ד) ϕ הינה סגורה.

הוכחה:

תרגיל 24.

טענה:

ב- $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית מתקיימות הטענות הבאות:

טענה:

ב- $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית מתקיימות הטענות הבאות:

(א יחידון הינו קבוצה סגורה.

טענה:

ב- $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית מתקיימות הטענות הבאות:

א) יחידון הינו קבוצה סגורה.

ב) לכל $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ ולכל $r>0$, הקב' $\{y\in\mathbb{R}^n : d(y,x)\le r\}$ הינה סגורה. (לפעמים קוראים לקבוצה כזו כדור סגור סביב $\bar{x}$ ברדיוס r).

הוכחה:

א) (ד) יהי $\{\bar{x}\}$ יחידון ב- $\mathbb{R}^n$. בשביל להוכיח ש- $\{\bar{x}\}$ קב' סגורה, נראה שהקבוצה $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ פתוחה:

הוכחה:

א) (ד) יהי $\{\bar{x}\}$ יחידון ב-$\mathbb{R}^n$. בשביל להוכיח ש-$\{\bar{x}\}$
קב' סגורה, נראה שהקבוצה $\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$ פתוחה:

יהי $\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$, אזי $\bar{x}\neq\bar{y}$ ולכן $d(\bar{y},\bar{x})\neq 0$.

הוכחה:

א) ① יהי $\{\bar{x}\}$ יחידון ב-$\mathbb{R}^n$. בשביל להוכיח ש-$\{\bar{x}\}$ קב' סגורה, נראה שהקבוצה $\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$ פתוחה:

יהי $\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$, אז' $\bar{x}\neq\bar{y}$ ולכן $d(\bar{y},\bar{x})\neq 0$.

② נסמן $\varepsilon_y=\frac{1}{2}d(\bar{y},\bar{x})$ ונראה ש-$B_{\varepsilon_y}(\bar{y})\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$:

הוכחה:

א) ① יהי $\{\bar{x}\}$ יחידון ב- $\mathbb{R}^n$. בשביל להוכיח ש- $\{\bar{x}\}$ קב' סגורה, נראה שהקבוצה $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ פתוחה:

יהי $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$, אז' $\bar{x} \neq \bar{y}$ ולכן $d(\bar{y},\bar{x}) \neq 0$.

② נסמן $\varepsilon_{\bar{y}} = \frac{1}{2} d(\bar{y},\bar{x})$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$:

יהי $\bar{z} \in B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y})$, אז' $d(\bar{z},\bar{y}) < \varepsilon_{\bar{y}}$ ולכן:

הוכחה:

א) (1) יהי $\{\bar{x}\}$ יחידון ב- $\mathbb{R}^n$. בשביל להוכיח ש- $\{\bar{x}\}$ קב׳ סגורה, נראה שהקבוצה $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ פתוחה:

יהי $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$, אזי $\bar{x} \neq \bar{y}$ ולכן $d(\bar{y},\bar{x}) \neq 0$.

(2) נסמן $\varepsilon_y = \frac{1}{2} d(\bar{y},\bar{x})$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_y}(\bar{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$:

יהי $\bar{z} \in B_{\varepsilon_y}(\bar{y})$, אזי $d(\bar{z},\bar{y}) < \varepsilon_y$ ולכן:

$$\Leftrightarrow \quad d(\bar{z},\bar{x}) \geq |d(\bar{x},\bar{y}) - d(\bar{y},\bar{z})| = |2\varepsilon_y - d(\bar{y},\bar{z})| > 0$$

הוכחה:

א) ① יהי $\{\bar{x}\}$ יחידון ב-$\mathbb{R}^n$. בשביל להוכיח ש-$\{\bar{x}\}$ קב' סגורה, נראה שהקבוצה $\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$ פתוחה:

יהי $\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$, אזי $\bar{x}\neq\bar{y}$ ולכן $d(\bar{y},\bar{x})\neq 0$.

② נסמן $\varepsilon_y=\frac{1}{2}d(\bar{y},\bar{x})$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_y}(\bar{y})\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$:

יהי $\bar{z}\in B_{\varepsilon_y}(\bar{y})$, אזי $d(\bar{z},\bar{y})<\varepsilon_y$ ולכן:

$$\Leftarrow \quad d(\bar{z},\bar{x})\geq\left|d(\bar{x},\bar{y})-d(\bar{y},\bar{z})\right|=\left|2\varepsilon_y-d(\bar{y},\bar{z})\right|>0$$

$$\Leftarrow \quad \bar{z}\neq\bar{x} \quad \Leftarrow \quad \bar{z}\notin\{\bar{x}\} \quad \Leftarrow \quad \bar{z}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$$

② נסמן $\varepsilon_y=\frac{1}{2}d(\bar{y},\bar{x})$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_y}(\bar{y})\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$:

יהי $\bar{z}\in B_{\varepsilon_y}(\bar{y})$, אזי $d(\bar{z},\bar{y})<\varepsilon_y$ ולכן:

$$d(\bar{z},\bar{x})\geq|d(\bar{x},\bar{y})-d(\bar{y},\bar{z})|=|2\varepsilon_y-d(\bar{y},\bar{z})|>0 \iff$$

$$\iff \bar{z}\neq\bar{x} \iff \bar{z}\notin\{\bar{x}\} \iff \bar{z}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$$

(2) נסמן $\varepsilon_{\bar y}=\frac{1}{2}d(\bar y,\bar x)$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_{\bar y}}(\bar y)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\{\bar x\}$:

יהי $\bar z\in B_{\varepsilon_{\bar y}}(\bar y)$, אזי $d(\bar z,\bar y)<\varepsilon_{\bar y}$ ולכן:

$$d(\bar z,\bar x)\geq\left|d(\bar x,\bar y)-d(\bar y,\bar z)\right|=\left|2\varepsilon_{\bar y}-d(\bar y,\bar z)\right|>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar z\neq\bar x \Leftrightarrow \bar z\notin\{\bar x\} \Leftrightarrow \bar z\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar x\}$$

ולכן $B_{\varepsilon_{\bar y}}(\bar y)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\{\bar x\}$.

(ג) נסמן $\varepsilon_y = \frac{1}{2} d(\bar y, \bar x)$ ונראה ש- $B_{\varepsilon_y}(\bar y) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar x\}$:

יהי $\bar z \in B_{\varepsilon_y}(\bar y)$, אזי $d(\bar z, \bar y) < \varepsilon_y$ ולכן:

$$\Leftarrow \quad d(\bar z, \bar x) \geq |d(\bar x, \bar y) - d(\bar y, \bar z)| = |2\varepsilon_y - d(\bar y, \bar z)| > 0$$

$$\bar z \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar x\} \quad \Leftarrow \quad \bar z \notin \{\bar x\} \quad \Leftarrow \quad \bar z \neq \bar x \quad \Leftarrow$$

לכן $B_{\varepsilon_y}(\bar y) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\bar x\}$.

(ד) תרגיל 25.

תרגיל לג:

הראו שב-$\mathbb{R}$ עם המטריקה הדיסקרטית – כל תת קבוצה הינה קבוצה פתוחה.

(רמז: הראו שבמטריקה זו כל יחידון מהווה קבוצה פתוחה)

תרגיל לב:

הראו שב- $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה הדיסקרטית כל תת קבוצה הינה קבוצה פתוחה.

(רמז: הראו שבמטריקה זו כל יחידון מהווה קבוצה פתוחה)

מסקנה:

פתיחות של קבוצה במרחב מטרי תלויה במטריקה המוגדרת בו. כלומר, הטופולוגיה של מרחב מטרי תלויה במטריקה המוגדרת בו.

הערה:

שימו לב שקבוצה אינה פתוחה אמ"ם יש איבר מסוים
בה שאף כדור סביבו אינו מוכל בקבוצה. כלומר:

הערה:

שימו לב שקבוצה אינה פתוחה אמ"מ יש איבר גסנים
בה שאף כדור סביבו אינו מוכל בקבוצה. כלומר:

קבוצה A אינה פתוחה אמ"מ

$$\exists x_0 \in A \ : \ \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x_0) \not\subseteq A$$

תרגיל 27:

א) נסמן $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$. כלומר A הינו הרביע הראשון של המישור, יחד עם החלקים החיוביים של הצירים.

תרגיל 27:

א) נסמן $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$. כלומר A הינה הרביע הראשון של המישור, יחד עם החלקים החיוביים של הצירים.

הוכיחו שהקבוצה $B_1(\bar{0})\cap A$ אינה פתוחה.

תרגיל 27:

א) נסמן $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$. כלומר A הינה הרביע הראשון של המישור, יחד עם החלקים החיוביים של הצירים.

הוכיחו שהקבוצה $B_1(\bar{0})\cap A$ אינה פתוחה.

ב) הראו ש- $B_1(\bar{0})\cap A$ אינה סגורה.

מסקנה:

תתכנה קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.

מסקנה:

תת קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.

הגדרה: (תת מרחב מטרי).

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\phi \neq A \subseteq X$.

לזוג $(A, d|_{A\times A})$ נקרא תת מרחב מטרי (תמ"מ).

מסקנה:
תת כנה קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.

הגדרה: (תת מרחב מטרי).

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\phi \neq A \subseteq X$.

לזוג $(A, d|_{A\times A})$ נקרא תת מרחב מטרי (תמ"מ).

מסקנה:
כל תת מרחב מטרי הינו מרחב מטרי בעצמו.

מסקנה:

שימו לב שהקבוצה שהגדרנו בתרגיל 27,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x,y \geq 0\}$$

עם המטריקה האוקלידית מהווה תמ"מ של $\mathbb{R}^2$

מסקנה:

שימו לב שהקבוצה שהגדרנו בתרגיל 27,

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$

עם המטריקה האוקלידית מהווה תמ"מ של $\mathbb{R}^2$

והקבוצה $B_r(\bar{0})\cap A$ מהווה כדור פתוח ב-A.

מסקנה:

שימו לב שהקבוצה שהגדרנו בתרגיל 27,

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$

עם המטריקה האוקלידית מהווה תמ"מ של $\mathbb{R}^2$

והקבוצה $B_1(\bar{0})\cap A$ מהווה כדור פתוח ב-A.

וזאת משום ש-

$B_1(\bar{0})\cap A=\{\bar{x}\in A : d(\bar{x},\bar{0})<1\}$

והקבוצה $B_1(\bar{0})\cap A$ מהווה כדור פתוח ב-A.

וזאת משום ש-

$$B_1(\bar{0})\cap A=\{\bar{x}\in A\ :\ d(\bar{x},\bar{0})<1\}$$

והקבוצה $B_1(\bar{0})\cap A$ מהווה כדור פתוח ב-A.

וזאת משום ש-

$$B_1(\bar{0})\cap A=\{\bar{x}\in A \ : \ d(\bar{x},\bar{0})<1\}$$

על כן, חשוב מאוד לזכור שכדור פתוח בתת מרחב מטרי לא חייב להיות כדור פתוח במרחב הגדול יותר. (ואפילו לא חייב להיות קבוצה פתוחה במרחב הגדול יותר).

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $A\subseteq X$ תמ"מ ויהיו $x\in A$ ו- סלר.

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $A\subseteq X$ תמ"מ ויהיו $x\in A$ ו- $0<r$.

את הכדור הפתוח ב-A, סביב $x\in A$, ברדיוס r נסמן

ב- $B_r(x,A):=\{a\in A : d(a,x)<r\}$

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $A\subseteq X$ תת"מ ויהי $x\in A$ ו- $r>0$.

את הכדור הפתוח ב-A, סביב $x\in A$, ברדיוס r נסמן

ב- $B_r(x,A):=\{a\in A : d(a,x)<r\}$

תרגיל 28:

הראו שהקבוצה $[1,3)\subseteq\mathbb{R}$ הינה כדור פתוח

בתת המרחב המטרי $[1,\infty)$.

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $A \subseteq X$ תמ"ג ותהי $Y \subseteq A$.
נאמר ש- Y פתוחה ב- A אם היא פתוחה ב-A כמרחב מטרי בפני עצמו. כלומר:

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $A\subseteq X$ תמ"ג ותהי $Y\subseteq A$.
נאמר ש- Y פתוחה ב- A אם היא פתוחה ב-A
כמרחב מטרי בפני עצמו. כלומר:

$$\forall y\in Y \quad \exists \varepsilon_y>0 \quad : \quad B_{\varepsilon_y}(y,A)\subseteq Y$$

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $A\subseteq X$ תמ"ק ותהי $Y\subseteq A$.
נאמר ש- Y פתוחה ב- A אם היא פתוחה ב-A
כמרחב מטרי בפני עצמו. כלומר:

$$\forall y\in Y \quad \exists \varepsilon_y>0 \quad : \quad B_{\varepsilon_y}(y,A)\subseteq Y$$

תרגיל פב:

נסמן $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$, $Y=[0,1)\times[0,1)$.

הראו ש- Y קב' פתוחה ב- A.

תרגיל 30:

יהי (X,d) מרחב מטרי, ויהי $A \subseteq X$ תת"מ.

הראו שלכל $x \in A$ ולכל $r>0$,

$B_r(x,A) = B_r(x) \cap A$.

טענה:

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $U \subseteq X$ קב' פתוחה.

אזי U הינה איחוד של כדורים פתוחים.

טענה:

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $U \subseteq X$ קב' פתוחה.
אזי, U הינה איחוד של כדורים פתוחים.

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$ $\forall x \in U \ \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$

$\Leftarrow$ $\bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$

הוכחה:

(1) $\forall x \in U \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$$

הוכחה:

(1) $\forall x\in U \quad \exists \varepsilon_x>0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x)\subseteq U \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)\subseteq U$

(2) $\forall x\in U \quad x\in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow x\in \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x) \quad \Rightarrow$

הוכחה:

(1) $\forall x\in U \quad \exists \varepsilon_x>0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x)\subseteq U \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)\subseteq U$

(2) $\forall x\in U \quad x\in B_{\varepsilon_x}(x) \;\Rightarrow\; x\in \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad U\subseteq \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)$

הוכחה:

1. $\forall x\in U \quad \exists \varepsilon_x>0 \quad : \quad B_{\varepsilon_x}(x)\subseteq U \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)\subseteq U$

2. $\forall x\in U \quad x\in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow x\in \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad U\subseteq \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)$

לכן $\quad U=\bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)$.

משפט:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $Y \subseteq X$ תמ"מ.

תהי $U \subseteq Y$, אזי U פתוחה ב-Y אמ"מ

קיימת $V \subseteq X$ קב' פתוחה ב-X כך ש-$U = V \cap Y$

משפט:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $Y\subseteq X$ תמ"מ.

תהי $U\subseteq Y$, אזי U פתוחה ב-Y אמ"מ
קיימת $V\subseteq X$ קב' פתוחה ב-X כך ש-$U=V\cap Y$

הוכחה:

תרגיל 31.

תרגיל 31.1:

יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $Y \subseteq X$ תמ"מ ותהי $U \subseteq Y$. הוכיחו ש-:

תרגיל 31.1:

יהי (M,X) מרחב מטרי, יהי $X \subseteq Y$ תמ"מ ותהי $Y \subseteq U$. הוכיחו ש-:

א) אם U פתוחה ב-Y ו-Y פתוחה ב-X, אז U פתוחה ב-X.

תרגיל 31.1:

יהי (X,d) מרחב מטרי, יהי $Y\subseteq X$ תמ"מ ותהי $U\subseteq Y$. הוכיחו ש-:

א) אם U פתוחה ב-Y ו-Y פתוחה ב-X, אז U פתוחה ב-X.

ב) אם U סגורה ב-Y ו-Y סגורה ב-X, אז U סגורה ב-X.

תרגיל 31.1:

יהי (M,X) מרחב מטרי, יהי $X \subseteq Y$ תמ"מ ותהי $U \subseteq Y$. הוכיחו ש-:

א) אם U פתוחה ב-Y ו-Y פתוחה ב-X, אז U פתוחה ב-X.

ב) אם U סגורה ב-Y ו-Y סגורה ב-X, אז U סגורה ב-X.

(תוכיחו ש-U סגורה ב-Y אמ"מ קיימת V סגורה ב-X כך ש- $U = V \cap Y$).

תרגיל 32:

נסמן $\mathbb{Z}^n := \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \forall i\in\{1,\dots,n\}\ x_i\in\mathbb{Z}\}$

ונזהה את $\mathbb{Z}^n$ כתת מרחב מטרי של $\mathbb{R}^n$ עם

המטריקה האוקלידית.

תרגיל 32:

נסמן $\mathbb{Z}^n := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1,\dots,n\} \ x_i \in \mathbb{Z}\}$

ונזהה את $\mathbb{Z}^n$ כתת מרחב מטרי של $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית.

הוכיחו שב- $\mathbb{Z}^n$, כתת מרחב אוקלידי, כל תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ הינה פתוחה.

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי. יהי $x\in X$ ותהי $A\subseteq X$ תת קב' ש-x שייך לה.

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי. יהי $x\in X$ ותהי $A\subseteq X$ תת קב'

ש-x שייך לה. נאמר ש-A היא סביבה של x

אם קיימת קבוצה פתוחה U ב-X, כך ש- $x\in U\subseteq A$.

הגדרה:

יהי (x,d) מרחב מטרי. יהי $x\in X$ ותהי $A\subseteq X$ תת קב'
ש-x שייך לה. נאמר ש-A היא סביבה של x
אם קיימת קבוצה פתוחה U ב-X, כך ש- $x\in U\subseteq A$.

דוגמה:

הקטע החצי פתוח $[1,2)$ הינו סביבה של המספר
1.5, ומכיוון ש- $B_{\frac{1}{2}}(1.5)\subseteq[1,2)$.

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי. יהי $x\in X$ ותהי $A\subseteq X$ תת קב'
ש- x שייך לה. נאמר ש-A היא סביבה של x
אם קיימת קבוצה פתוחה U ב-X, כך ש- $x\in U\subseteq A$.

דוגמה:

הקטע החצי פתוח $[1,2)$ הינו סביבה של המספר
1.5, ומכיוון ש- $B_{\frac{1}{2}}(1.5)\subseteq[1,2)$.

לעומת זאת, הקטע $[1,2)$ אינו סביבה של המס' 1,
ומכיוון שאין קבוצה פתוחה U, כך ש- $1\in U\subseteq[1,2)$.

טענה:

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $X \supseteq A \neq \phi$, אזי A קבוצה פתוחה אם"ם A מהווה סביבה לכל איבר בה.

הוכחה:

תרגיל 33.

תרגיל 34:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהיו $x\neq y\in X$.

הוכיחו שקיימת סביבה V_x של x וקיימת סביבה V_y

של y, כך ש- $V_x\cap V_y=\phi$.

תרגיל 34:

יהי (X,d) מרחב מטרי ויהיו $x \neq y \in X$.
הוכיחו שקיימת סביבה V_x של x וקיימת סביבה V_y של y, כך ש- $V_x \cap V_y = \phi$.

תזכורת: (הגדרת מושג הגבול לסדרות ממשיות)
תהי סדרה $\bar{a} \in \mathbb{R}^{\omega}$, נאמר שהיא מתכנסת ל- $L \in \mathbb{R}$ אם

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

ונסמן $L = \lim_{n \to \infty} a_n$.

מסקנה:

נזכור שהערך המוחלט ב- $\mathbb{R}$ משרה מטריקה.

$$\begin{cases} d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \\ d(x,y)=|x-y| \end{cases}$$

(גם למטריקה כן קוראים מטריקה אוקלידית).

מסקנה:

נזכור שהערך המוחלט ב- $\mathbb{R}$ משרה מטריקה

$$\begin{cases} d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \\ d(x,y)=|x-y| \end{cases}$$

(גם למטריקה זו קוראים מטריקה אוקלידית).

על כן, נוכל לנסח את הגדרת הגבול לסדרות ממשיות באופן הבא:

מסקנה:

נזכור שהערך המוחלט ב- $\mathbb{R}$ משרה מטריקה

$$\begin{cases} d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \\ d(x,y)=|x-y| \end{cases}$$

(גם למטריקה זו קוראים מטריקה אוקלידית).

על כן, נוכל לנסח את הגדרת הגבול לסדרות ממשיות באופן הבא:

נאמר ש- $\bar{a}\in\mathbb{R}^{\omega}$ מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$ אם

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon \quad d(a_n,L)<\varepsilon$$

מסקנה:

נזכור שהערך המוחלט ב- $\mathbb{R}$ משרה מטריקה

$$\begin{cases} d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \\ d(x,y)=|x-y| \end{cases}$$

(גם למטריקה זו קוראים מטריקה אוקלידית).

על כן, נוכל לנסח את הגדרת הגבול לסדרות ממשיות באופן הבא:

נאמר ש- $\bar{a}\in\mathbb{R}^{\omega}$ מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$ אם

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon\ \ d(a_n,L)<\varepsilon$$

מסקנה:

ניתן להכליל את הגדרת הגבול לכל מרחב מטרי שהוא.

הגדרה:

תהי קבוצה X ונסמן ב- X^{ω} את אוסף כל הסדרות האינסופיות של איברים ב-X.

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\bar{a} \in X^{\omega}$. נאמר ש-$\bar{a}$ מתכנסת ל-$L \in X$ אם

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \ d(a_n, L) < \varepsilon$$

הגדרה:

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\bar{a}\in X^{\omega}$. נאמר ש-$\bar{a}$ מתכנסת ל-$L\in X$ אם

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n>n_\varepsilon:\ d(a_n,L)<\varepsilon$$

שימו לב שבשביל לתת סימון מיוחד לגבול כמו בסדרות ממשיות, צריך להראות שהוא יחיד בכל מרחב מטרי.

תרגיל 35:

הראו שניתן לנסח את הגדרת הגבול במרחבים מטריים בשפה של סביבות. כלומר, אם $\bar{a}$ היא סדרה אינסופית ב- (X,d), אז $\bar{a}$ מתכנסת ל- $L\in X$ אמ"ם לכל סביבה V_L של L קיים $n_{V_L}\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_{V_L}$, $a_n\in V_L$.

תרגיל 35:

הראו שניתן לנסח את הגדרת הגבול במרחבים מטריים בשפה של סביבות. כלומר, אם $\bar{a}$ היא סדרה אינסופית ב- (X,d), אז $\bar{a}$ מתכנסת ל- $L\in X$ אמ"מ לכל סביבה V_L של L קיים $n_{V_L}\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_{V_L}$, $a_n\in V_L$.

תרגיל 36:

הראו שבכל מרחב מטרי, אם סדרה בו מתכנסת לגבול, אז גבול זה הינו יחיד.

רמז: אפשר לקבל רעיון מתרגילים 34 ו-35.

מסקנה:

בכל מרחב מטרי ניתן לתת סימון מיוחד לגבול של סדרה מתכנסת. כלומר, אם $\bar{a}$ מתכנסת ל-L,

נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

תרגיל 37:

האם סדרת הוקטורים ב-$\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix} 1/n \\ 2 \\ n\cdot\sin(\frac{1}{n}) \end{pmatrix}\right)_{n=1}^{\infty}$$

מתכנסת לוקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ במטריקה האוקלידית.

האם סדרה זו הינה סדרה מתכנסת במטריקה הדיסקרטית?

תרגיל 39:

יהי (X,d) מרחב מטרי, תהי $\bar{a}\in X^{\omega}$ ויהי $L\in X$. הוכיחו ש-$\bar{a}$ מתכנסת ל-L אמ"מ סדרת המספרים הממשיים $\left(d(a_n,L)\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

תרגיל 39:

יהי (X,d) מרחב מטרי, תהי $\bar{a}\in X^{\omega}$ ויהי $L\in X$. הוכיחו ש-$\bar{a}$ מתכנסת ל-L אמ"ם סדרת המספרים הממשיים $(d(a_n,L))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

הגדרה:

תהי X קבוצה ותהי $\bar{a}\in X^{\omega}$. נאמר ש-$\bar{a}$ הינה סדרה מתייצבת ביחס ל-$L\in X$

$$\exists n_0 : \forall n\ge n_0 \quad a_n=L$$

תרגיל 40:

יהי (X,d) מרחב דיסקרטי ותהי $\bar{a}\in X^{\omega}$.

הוכיחו ש-$\bar{a}$ מתכנסת ל-$L\in X$ אם"ם $\bar{a}$ מתייצבת ביחס ל-L.

טענה:

יהיו $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ מרחבים מטריים,

תהי סדרה $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}\right)_{n=1}^{\infty}$ ב- $\prod_{i=1}^{n} X_i$

טענה:

יהיו $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ מרחבים מטריים,

תהי סדרה $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}=\left(\begin{pmatrix}a_{n1}\\ \vdots\\ a_{nk}\end{pmatrix}\right)_{n=1}^{\infty}$ ב- $\prod_{i=1}^{n}X_i$

ויהי $\bar{L}=\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_k\end{pmatrix}\in\prod_{i=1}^{k}X_i$, אזי במטריקה $\begin{cases}d:\prod_{i=1}^{k}X_i\times\prod_{i=1}^{k}X_i\longrightarrow\mathbb{R}_+\\ d(\bar{x},\bar{y})=\left(\sum_{i=1}^{k}d_i^2(x_i,y_i)\right)^{1/2}\end{cases}$,

$$\lim_{n\to\infty}\bar{a}_n=L \iff \left(\forall i\in\{1,\dots,k\}\ \lim_{n\to\infty}a_{n_i}=L_i\right)$$

הוכחה:

1 $\Leftarrow$:

(1.1) אם לכל $i\in\{1,\dots,k\}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n_i}=L_i$ אז

$\Leftarrow$ $\forall i\in\{1,\dots,k\}\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_{\varepsilon_i} : \forall n>n_{\varepsilon_i}\ d_i(a_{n_i},L_i)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$:

(1.1) אם לכל $i\in\{1,\dots,k\}$ $\lim_{n\to\infty} a_{n_i}=L_i$, אז

$\Leftarrow$ $\forall i\in\{1,\dots,k\}\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_{\varepsilon_i} : \forall n>n_{\varepsilon_i}\quad d_i(a_{n_i},L_i)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$

$\Leftarrow\quad d_i^2(a_{n_i},L_i)<\frac{\varepsilon^2}{k}$

הוכחה:

① $\Rightarrow$:

(1.1) אם לכל $i\in\{1,\dots,k\}$ $\lim_{n\to\infty} a_{n_i}=L_i$, אז

$$\Leftarrow \forall i\in\{1,\dots,k\}\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_{\varepsilon_i} : \forall n>n_{\varepsilon_i}\ \ d_i(a_{n_i},L_i)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftarrow d_i^2(a_{n_i},L_i)<\frac{\varepsilon^2}{k}$$

לכן אם נסמן $n_\varepsilon=\max\{n_{\varepsilon_i}\}_{i=1}^{k}$, נקבל ש-

הוכחה:

① $\Leftarrow$:

(1.1) אם לכל $i\in\{1,\dots,k\}$ $\lim_{n\to\infty} a_{n_i}=L_i$, אז

$$\Leftarrow\ \forall i\in\{1,\dots,k\}\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_{\varepsilon_i}: \forall n>n_{\varepsilon_i}\ \ d_i(a_{n_i},L_i)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftarrow\ d_i^2(a_{n_i},L_i)<\frac{\varepsilon^2}{k}$$

לכן אם נסמן $n_\varepsilon=\max\{n_{\varepsilon_i}\}_{i=1}^k$, נקבל ש-

$$\forall n>n_\varepsilon\quad d(\bar{a}_n,\bar{L})=\left(\sum_{i=1}^k d_i^2(a_{n_i},L_i)\right)^{1/2}<$$

$$<\left(\sum_{i=1}^k\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2}=\left(k\cdot\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2}=\varepsilon$$

לכן אם נסמן $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_i}\}_{i=1}^{k}$, נקבל ש-

$$\forall n > n_\varepsilon \quad d(\bar{a}_n, \bar{L}) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2(a_{n_i}, L_i)\right)^{1/2} <$$

$$< \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \left(k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

לכן אם נסמן $n_\varepsilon=\max\{n_{\varepsilon_i}\}_{i=1}^{k}$, נקבל ש-

$$\forall n>n_\varepsilon \quad d(\bar{a}_n,\bar{L})=\left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2(a_{n_i},L_i)\right)^{1/2} <$$

$$< \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \left(k\cdot\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

לכן $\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{L}$.

(2) $\Rightarrow$:

(2.1) אם $\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{L}$, אז

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon \quad d(\bar{a}_n, \bar{L})<\varepsilon$

(2) $\Rightarrow$:

(2.1) אם $\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{L}$, אזי

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon \quad d(\bar{a}_n,\bar{L})<\varepsilon$$

(2.2) נשים לב שלכל j ולכל $n\in\mathbb{N}$

$$d_j(a_{n_j},L_j) = |d_j(a_{n_j},L_j)| = \sqrt{d_j^2(a_{n_j},L_j)} \le$$

② $\Rightarrow$:

(2.1) אם $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{L}$, אז

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : \ \forall n>n_\varepsilon \quad d(\bar{a}_n,\bar{L})<\varepsilon$$

(2.2) נשים לב שלכל j ולכל $n\in\mathbb{N}$

$$d_j(a_{n_j},L_j) = |d_j(a_{n_j},L_j)| = \sqrt{d_j^2(a_{n_j},L_j)} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2(a_{n_i},L_i)\right)^{1/2} = d(\bar{a}_n,\bar{L})$$

לכן, לכל $j\in\{1,\dots,k\}$ ולכל $n>n_\varepsilon$

$$d_j(a_{n_j},L_j)<\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_j}=L_j \quad \blacksquare$$

לכן, לכל $j\in\{1,\dots,k\}$ ולכל $n>n_\varepsilon$

$$d_j(a_{n_j},L_j)<\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_j}=L_j \qquad \blacksquare$$

מסקנה: (מאוד שימושית)

ב-$\mathbb{R}^n$ תחת המטריקה האוקלידית, התכנסות של סדרת וקטורים בו, שקולה להתכנסות הקואורדינטות של איברי הסדרה.

תרגיל 41:

יהיו $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ מרחבים מטריים, תהי סדרה $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$

ב- $\prod_{i=1}^{k} X_i$ ויהי $\bar{L}\in\prod_{i=1}^{k} X_i$.

תרגיל 41:

יהיו $(X_k,d_k),\dots,(X_1,d_1)$ מרחבים מטריים, תהי סדרה $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$

ב- $\prod_{i=1}^{k} X_i$ ויהי $\bar{L}\in\prod_{i=1}^{k} X_i$.

תוכיחו שגם תחת המטריקה
$$\begin{cases} d_\infty : \prod_{i=1}^{k} X_i \times \prod_{i=1}^{k} X_i \to \mathbb{R}_+ \\ d_\infty(\bar{x},\bar{y}) = \max\{d_i(x_i,y_i)\}_{i=1}^{k} \end{cases}$$

התכנסות הסדרה $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ ל- $\bar{L}$ שקולה להתכנסות הקואורדינטות.

מסקנה:

ב-$\mathbb{R}^n$, גם תחת $\|\|_\infty$, התכנסות של סדרה שקולה

להתכנסות הקואורדינטות.

תרגיל בית:

1) הראו שב- L_∞, תחת הנורמה $\|\,\|_\infty$, אם סדרה

$\bar{a}_n = \left(\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \end{pmatrix}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in L_\infty$, אז

כל סדרת קואורדינטות $(a_{kn})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L_k.

תרגיל בא:

א) הראו שב- L_∞, תחת הנורמה $\|\ \|_\infty$, אם סדרה

$\bar{a}_n=\left(\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\end{pmatrix}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L}=\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ \vdots\end{pmatrix}\in L_\infty$, אז

כל סדרת קואורדינטות $(a_{kn})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L_k.

ב) (i) הראו שהסדרה $\left(\left(a_{kn}=\begin{cases}0 & k\le n\\ 1 & k>n\end{cases}\right)_{k=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty}$ נמצאת ב- L_∞.

תרגיל בית:

א) הראו שב- L_∞, תחת הנורמה $\|\ \|_\infty$, אם סדרה $\bar{a}_n=\left(\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\end{pmatrix}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L}=\begin{pmatrix} L_1\\ L_2\\ \vdots\end{pmatrix}\in L_\infty$, אז

כל סדרת קואורדינטות $(a_{kn})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L_k.

ב) (i) הראו שהסדרה $\left(\left(a_{kn}=\begin{cases}0 & k\le n\\ 1 & k>n\end{cases}\right)_{k=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty}$ נמצאת ב- L_∞.

(ii) הראו שלכל $k\in\mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} a_{kn}=0$.

תרגיל בית:

א) הראו שב-L_∞, תחת הנורמה $\| \|_\infty$, אם סדרה

$\bar{a}_n = \left(\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \end{pmatrix}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\bar{L}=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in L_\infty$, אז

כל סדרת קואורדינטות $(a_{kn})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L_k.

ב) (i) הראו שהסדרה $\left(\left(a_{kn}=\begin{cases} 0 & k \le n \\ 1 & k > n \end{cases}\right)_{k=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty}$ נמצאת ב-L_∞.

(ii) הראו שלכל $k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} a_{kn} = 0$.

(iii) הראו שהסדרה לא אינה מתכנסת ב-$\| \|_\infty$.